Ricapitolazioni

$$\vec{J} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}\,dt = \Delta\vec{p}$$ Teor. dell'impulso

$$\vec{p} = m\vec{v}$$ q.tà di moto

$$W_{AB} = \int_{c\,A}^{B} \vec{F}\cdot d\vec{r}$$ Lavoro della forza

$$W_{TOT} = \Delta E_K$$ Teor. dell'energia cinetica

$$E_K = \frac{1}{2} m v^2$$ Energia cinetica

Per forze conservative:

$$W_{AB} = -\Delta E_p$$ $E_p(\vec{r})$ dipende dalla forza

- F. peso $E_p(z) = mgz$ [+ cost]
  F. elastica $E_p(x) = \frac{1}{2}kx^2$ [+ cost]

$$E_m = E_K + E_p$$ energia meccanica

$$W_{NC} = \Delta E_m$$

$\Delta E_m = 0$ per forze conservative ($E_m = \text{cost}$)

I Prob. 4

nel piano

Esercizio 5-11

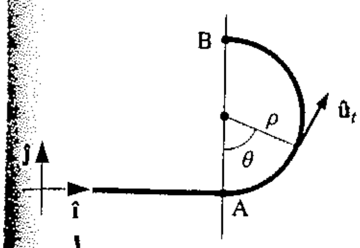


Figura 5-11

Un piccolo oggetto P di massa m in moto con una velocità di modulo v su un piano orizzontale liscio lungo la direzione dell'asse x, si immette su una rotaia semicircolare AB di raggio ρ priva di attrito (*vedi* figura 5-11). 1) Dimostrare che il moto lungo AB è uniforme. 2) Individuare la forza responsabile della variazione della quantità di moto fra A e B e determinarne il modulo. 3) Calcolare esplicitamente l'impulso $\vec{J}$ da essa impartito durante il tempo di permanenza di P sulla rotaia, senza utilizzare il teorema dell'impulso. | Usiamo anche il Teor.

Soluzione

1) * il piano è liscio – Non ci sono forze dissipative

* La reazione vincolare della guida è $\perp$ allo spostamento e non compie lavoro

* il moto avviene nel piano orizzontale
$h = cost \longrightarrow$ F peso non compie lavoro

$W_{TOT} = 0 \longrightarrow E_k = cost$

La velocità è costante in modulo $\Longrightarrow$ il moto circolare è uniforme

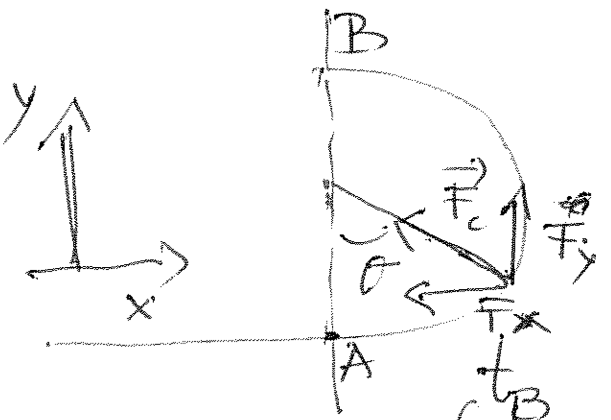
2) La reazione vincolare determina una forza centripeta ~~$F = m v^2/\rho$~~ di modulo
$F_c = m v^2/\rho$

3a) dal teorema dell'impulso:

$$\vec{J} = \Delta\vec{p} = m\vec{v}_f - m\vec{v}_i = -2m\vec{v}_i$$

Agisce lungo x in verso negativo.

3b) senza usare il teorema dell'impulso



$$\vec{F}_c = -\frac{mv^2}{\rho}\sin\theta\,\hat{u}_x + \cos\theta\,\hat{u}_y$$

$$\vec{J} = -\frac{mv^2}{\rho}\hat{u}_x\int_{t_A}^{t_B}\sin(\omega t)\,dt + \frac{mv^2}{\rho}\int_{t_A}^{t_B}\cos(\omega t)\,dt$$

$\theta = \omega t$ $\qquad \omega = v/\rho$

$d\theta = \omega dt$

$t_A \rightarrow \theta_A = 0$

$t_B \rightarrow \theta_B = \pi$

$$\vec{J} = -\frac{mv^2}{\rho}\hat{u}_x\int_0^{\pi}\sin(\theta)\frac{d\theta}{\omega} + \cancel{\frac{mv^2}{\rho}\hat{u}_y\int_0^{\pi}\cos\theta\frac{d\theta}{\omega}}$$

$$= -mv^2\,\hat{u}_x\int_0^{\pi}\sin\theta\,d\theta = -2mv^2\,\hat{u}_x$$ ovvero

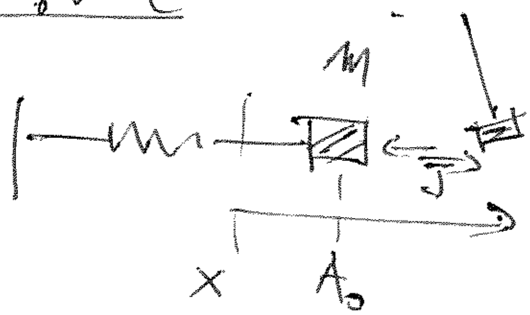
Esercizio 5.12

Un corpo di massa $m = 1$ kg, posto su un piano orizzontale privo di attrito, si muove di moto armonico unidirezionale sotto l'azione di una forza elastica. Con semplici misure si determinano il periodo di oscillazione $T = 6{,}28$ s e l'ampiezza $A_0 = 10$ cm. Nel momento in cui il corpo raggiunge il massimo di spostamento dal centro di oscillazione, gli viene conferito, tramite un rapido colpo longitudinale, un impulso $\vec{I}$ il cui effetto è di portare l'ampiezza di oscillazione al valore $A = 20$ cm. Calcolare il valore dell'impulso I.

Risposta

$I = 0{,}17$ Ns

Soluzione



$$x(t) = A_0 \cos(\omega_0 t)$$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = 1\ s^{-1}$$

Nel punto di max elongazione prima dell'azione della forza impulsiva -

$x = A_0$ e $v = 0$

L'azione della forza impulsiva determina

$$\Delta p = mv' - \cancel{mv} \qquad (v = 0)$$

nel punto A_0

Per conservazione dell'energia meccanica dopo l'azione della forza impulsiva -

$$\frac{1}{2} k A_0^2 + \frac{1}{2} m v'^2 = \underbrace{\frac{1}{2} k A_0'^2}_{\text{Punto di massima elongazione } v=0}$$

Dunque $v' = \sqrt{\frac{k}{m}} \left[A_0'^2 - A_0^2 \right]^{1/2}$

$$v' = \omega_0 \left[4A_0^2 - A_0^2 \right]^{1/2}$$

$$v' = \omega_0 \sqrt{3}\, A_0$$

$$J = \Delta p = m\omega_0 \sqrt{3}\, A_0$$

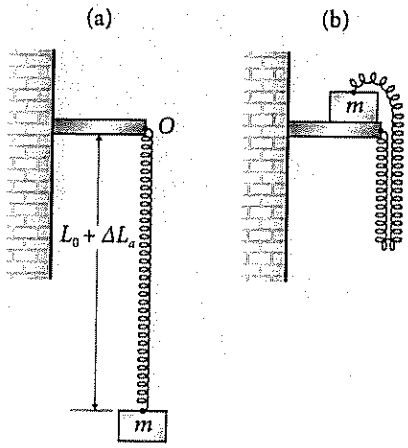
$$= 1\,\mathrm{kg} \cdot 1\,\mathrm{s}^{-1} \sqrt{3} \cdot 0.1\,\mathrm{m}$$

$$= 0.17\ \mathrm{Ns}$$

Fine

Problema 1

Esercizio 5.6 *(Esercizi correlati: 5.6* e 5.6**)*



Una molla, di lunghezza a riposo L_0 e massa trascurabile, si allunga di una quantità ΔL_a quando l'estremo O è fissato a un supporto rigido e all'altro estremo viene appeso un piccolo corpo di massa m, come mostrato nella parte (a) della figura. Nella situazione della parte (b) il corpo è posto sul supporto alla quota dell'estremo fisso O della molla dal quale, partendo da fermo, viene lasciato cadere per effetto della gravità. Ricavare l'espressione dell'allungamento ΔL della molla nel punto di minima quota raggiunta dopo la caduta.

Risposta

$\Delta L = [mg + (m^2g^2 + 2mgKL_0)^{1/2}]/K$
$K = mg/\Delta L_a$

Soluzione

- Dalla configurazione (a) si può ricavare la costante elastica della molla: in equilibrio $k\Delta L_a = mg$ $(\vec{F}_{TOT} = 0)$

$$\Longrightarrow \quad k = \frac{mg}{\Delta L_a}$$

- Per risolvere (b) ricorriamo alla conservazione dell'energia meccanica. Il punto di massimo allungamento della molla durante il moto verticale corrisponde alla condizione $v = 0$, ossia $E_K = 0$. Nella caduta, infatti, il corpo accelera sotto l'azione di $m\vec{g}$ fino alla distanza L_0, quando interviene

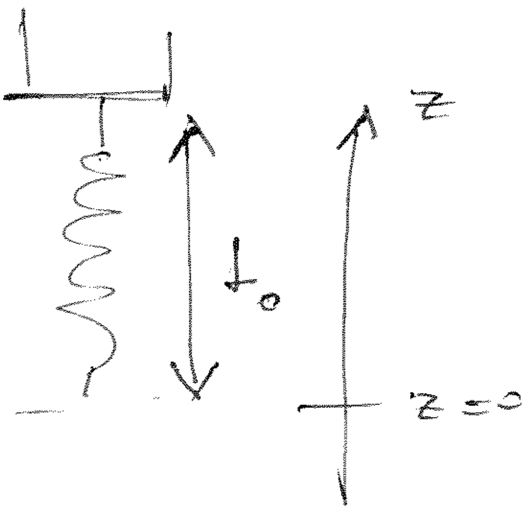
Anche la forza elastica –

L'en. cinetica acquisita viene progressivamente trasferita all'energia potenziale della molla fino a quando E_p e' max e $E_k = 0$ –

L'en. potenziale ha due termini:

$$E_p(z) = mgz$$

<u>Peso</u> con asse verticale verso l'alto –
$z = 0$ nella condizione di molla rilassata L_0 –



$$E_p(z) = \frac{1}{2} k z^2$$

Forza elastica
z rappresenta l'allungamento della molla –

Sia nella condizione iniziale, sia in quella finale $E_k = 0$ (corpo fermo o istantaneamente fermo dunque per E_m, quando $E_k = 0$:

$$E_m(z = L_0) = mgL_0 \quad \text{stato iniziale}$$

$$E_m(z = -\Delta L) = \frac{1}{2} m \Delta L^2 - mg\Delta L$$

allungamento finale

<u>nota</u>: l'allungamento della molla è positivo la coord. z è negativa

$z = -\Delta L$

Soluzione per ΔL :

$$\frac{1}{2} k \Delta L^2 - mg\Delta L = mgL_0$$

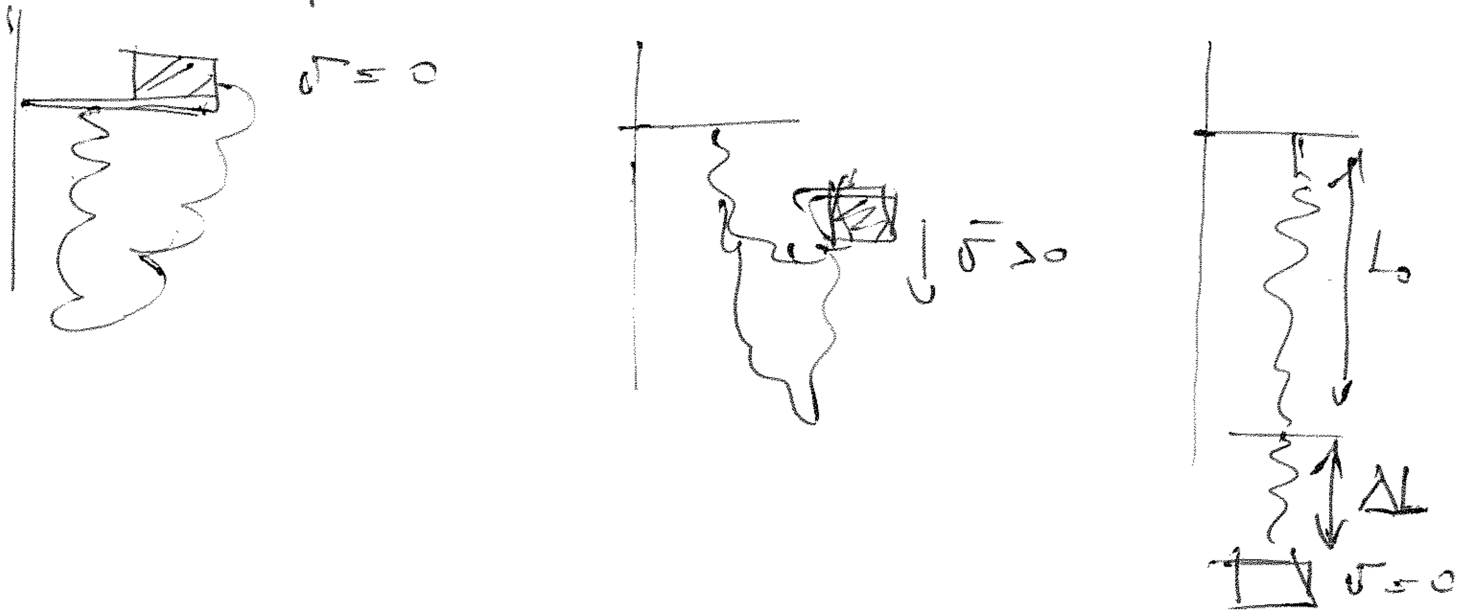
$$k\Delta L^2 - 2mg\Delta L - 2mgL_0 = 0$$

$$\Delta L = \left(mg \pm \sqrt{(mg)^2 + 2mgkL_0}\right)/k$$

Solo la soluzione positiva è accettabile

Problema 1 - bis

Nel problema precedente, si trovi la coordinata verticale o l'allungamento che corrisponde a velocità max -



Metodo A   Intuitivo -

+ molla rilassata $\vec{F}_{TOT} = m\vec{g}$

corpo accelera v cresce

+ molla allungata $\vec{F}_{TOT} = (mg - k\Delta l)\hat{u}_z$

Se $|\vec{F}_{TOT}| > 0$ corpo accelera - v cresce

Se $|\vec{F}_{TOT}| < 0$ corpo decelera - v diminuisce

Se $|\vec{F}_{TOT}| = 0$ ~~corpo~~ acc. nulla - v_{max}

$$\longrightarrow \Delta L_0 = \frac{mg}{k}$$

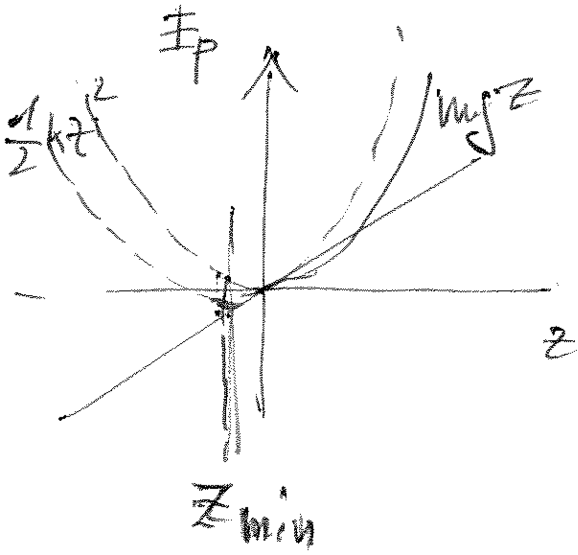
- Nelle situazioni dinamica si raggiunge v_{max} nella condizioni che corrisponde all'equilibrio statico : $\vec{F}_{TOT} = 0$

⟿ Risultato notevole (valido in generale)

<u>Metodo B</u>

v_{max} equivale a E_k^{max} e, per $E_m = cost$, a E_p ~~min~~ minima — Nel moto si ha cioe' En. cinetica max quando En. potenziale e' minima — Posso dunque trovare la coordinata verticale per cui v e' max, cercando la condizioni per cui $E_p(z)$ e' minima :

$$E_p(z) = mgz + \frac{1}{2}kz^2 \quad \text{con} \quad z = -\Delta l$$
(allungamento)



Minimo di una funzione:

$$\frac{dE_p}{dz} = 0$$

segue ⟶

$$\frac{dE_p}{dz} = kz + mg = 0$$

$$\Longrightarrow z = -\frac{mg}{k} \qquad \Longrightarrow \Delta l_0 = \frac{mg}{k}$$

$\Rightarrow$ Risultato notevole

La condizione di E_p minima corrisponde alla configurazione di equilibrio statico $\bar{F}_{TOT} = 0$

[Dimostreremo in modo formale e generale qs. proprietà nella prossima lezione]

Probl 2

18 Luglio 2017

Compito generale di Fisica I

1)Una massa puntiforme di massa **m**= 2.5 kg si muove su un piano inclinato di un angolo $\alpha = 30°$ rispetto all'orizzontale. La massa **m** urta con velocità $\mathbf{v_0}$ = 2.0 m/s una molla ideale con costante elastica **k**=25.0 N/m, disposta lungo il piano inclinato. Si determini la massima compressione della molla nel caso:

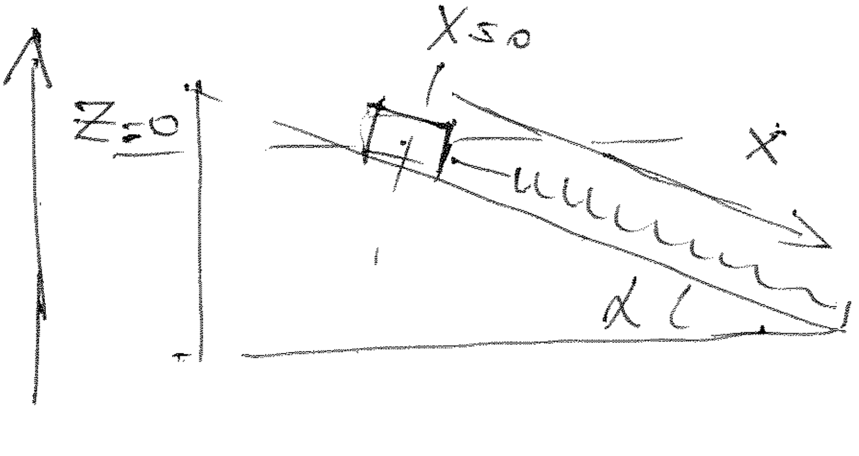
a) non vi è attrito fra la massa **m** ed il piano inclinato

b) vi è attrito con coefficiente di attrito dinamico $\mu = \tan(\alpha)$ fra la massa **m** ed il piano inclinato

Soluzione

a) Nel caso (a) ci sono solo forze conservative e si può ricorrere alla cons. dell'energia meccanica.

Scegliamo come punto di riferimento per il calcolo di E_p la posizione in cui la massa urta la molla



Con questa scelta :

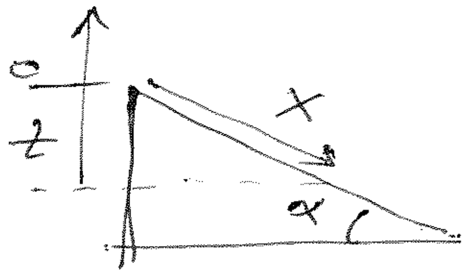
$$E_m^i = E_m(z=0,\ x=0) = E_k^i = \frac{1}{2} m v_0^2$$

$E_p(z) = mgz$ f. peso e z = coord. verticale

$E_p(x) = \frac{1}{2} k x^2$ x = contrazione della molla

- Dalla trigonometria :

$$|z| = |x| \sin\alpha$$



ma per la scelta degli assi

$$z = -x \sin\alpha \, .$$

Dunque $E_p(x) = -mgx\sin\alpha + \frac{1}{2} k x^2$

ossia ... mentre il corpo scende, comprimendo la molla

E_p - peso diminuisce

E_p - F. elastica cresce (molla si carica)

ok. i segni tornano

finale $E_p(x'_{max})$ e $E_k = 0$

Ho usato x'_{max}, perché la soluzione (b) non coincide con la soluzione (a) [x_{max}] dato che ora c'è anche la forza di attrito in gioco –

Esplicitando i termini:

$$W_{n.c.} = -\underbrace{\mu m g \cos\alpha}_{F.\,attrito} \; \underbrace{x}_{spostam.}$$

→ segno negativo poiché $F_{attrito}$ opposta in verso a spostam.

– dunque $W_{nc} = \Delta E_m$ diventa

$$-\mu m g \cos\alpha \, x'_{max} = \underbrace{\frac{1}{2} k x'^{2}_{max} - m g \sin\alpha \, x'_{max}}_{E_m \text{ finale}} \underbrace{- \frac{1}{2} m v_0^2}_{E_m \text{ iniziale}}$$

— Nella condizione di max compressione della molla $v = 0$, tutta E_m è E_p

$$E_m(x_{max}) = E_p(x_{max})$$

Per la conservazione di E_m:

$$\frac{1}{2} k x_{max}^2 - mg\, x_{max} \sin\alpha = \frac{1}{2} m v_0^2$$

$$\omega_0^2 x_{max}^2 - 2g \sin\alpha\, x_{max} - v_0^2 = 0$$

$$x_{max} = \frac{g\sin\alpha \pm \sqrt{(g\sin\alpha)^2 + \omega_0^2 v_0^2}}{\omega_0^2}$$

Solo la soluzione positiva è accettabile (la molla si contrae)

— b) —

Nel caso b) c'è F non conservativa

$$W_{nc} = \Delta E_m \leftarrow$$

il lavoro della forza non conservativa eguaglia la variazione di E_m tra la condizione iniziale ($E_p = 0$ $E_k = \frac{1}{2} m v_0^2$) e quella

$$\omega_0^2 \, x'^2_{max} - g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha) - v_0^2 = 0$$

Nel caso specifico di qs. esercizio

$$\mu = tg\,\alpha \implies \sin\alpha - \mu\cos\alpha = 0$$

$$\omega_0^2 \, x'^2_{max} = v_0^2$$

$$x'_{max} = \frac{v_0}{\omega_0}$$

→ <u>Nota</u>: $\mu = tg(\alpha)$ è la condizione che rende ~~l'attrito~~ $F_{attrito} = F_{peso}$ lungo il piano – in qs. condizione le due forze si elidono – In assenza di altre forze darebbero un moto a $v = cost.$

$\implies$ v varia solo per effetto di F. elastica

(lo avevamo visto nel caso dell'attrito statico).

Problema 5

Esercizio 6-8

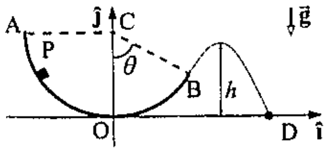


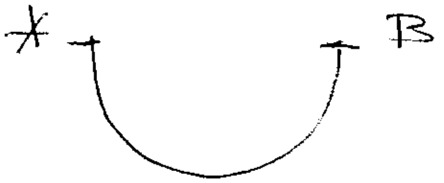
Figura 6-5

Un punto materiale P, di massa m, scivola senza attrito lungo una guida fissa AB che ha la forma di un arco di circonferenza (di raggio R e centro C) avente ampiezza angolare $\widehat{ACB} = \frac{\pi}{2} + \theta$, ove $\theta = \frac{\pi}{3}$ (*vedi* figura 6-5). P parte da fermo dal punto A; dopo essere giunto in B si muove nel vuoto fino a raggiungere il punto D. 1) Qual è la massima quota h raggiunta da P rispetto al piano orizzontale in cui si trova il punto più basso O della guida? 2) Determinare la velocità di P al momento in cui arriva in D.

Soluzione

Conservazione dell'energia meccanica e della quantità di moto –

Attenzione – Se guida semicircolare



$v_B = v_A = 0$

e $h_B = h_A$

1) In qs. caso invece $h_B \neq h_B$ il corpo esce dalla guida con v diretta tangente alla guida: $\vec{v} = v_x \hat{u}_x + v_y \hat{u}_y$

– il punto di quota max ha $v_y = 0$ ma lungo x non ci sono forze: $v_x = cost$ dopo che viene lasciata la guida –

segue →

All'apice della traiettoria:

$$mgh + \frac{1}{2} m v^2 = mgh + \frac{1}{2} m v_x^2 + \frac{1}{2} m v_y^2$$

$$v_y = 0$$

Cons. E_m : $\cancel{m}gh + \frac{1}{2} \cancel{m} v_x^2 = \underbrace{\cancel{m}gR}_{E_m \text{ iniziale in } A}$ (**)

Per trovare v_x usiamo E_m in B:

~~mgR <~~

$$E_m(A) = E_m(B)$$

$$\cancel{m}gR = \cancel{m}gR(1-\cos\theta) + \frac{1}{2}\cancel{m} v_B^2$$

$$v_B = \left[2gR\cos\theta\right]^{1/2}$$

$$v_{B,x} = v_B\cos\theta = \left[2gR\cos^3\theta\right]^{1/2}$$

Poichè nel moto di caduta libera $v_x = \text{cost}$ sostituendo in (**):

$$h = -\frac{1}{2g} 2gR\cos^3\theta + \frac{gR}{g} = \underline{\underline{R(1-\cos^3\theta)}}$$

$h < R$ come atteso

2) Nel punto di caduta D — $h = 0$

$$E_m(D) = E_m(A)$$

$$\frac{1}{2}\cancel{m} v_D^2 = \cancel{m} g R$$

$$v_D = \sqrt{2gR}$$

componenti di v_D :

$$v_{D,x} = v_{B,x} = \left[2gR\cos^3\vartheta\right]^{1/2}$$

$$v_{D,y} = \left(v_D^2 - v_{B,x}^2\right)^{1/2} =$$

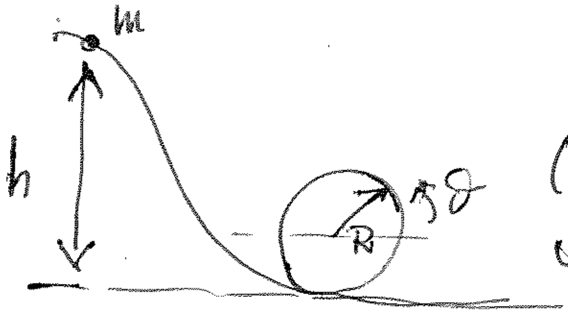
$$= \left(2gR - 2gR\cos^3\vartheta\right)^{1/2} =$$

$$= \left[2gR\left(1-\cos^3\vartheta\right)\right]^{1/2}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{v_{D,y}}{v_{D,x}}$$ angolo con l'orizzontale

Problema 5. Montagne russe

~~Mont~~



Nell'ipotesi di attrito trascurabile (a) si trovi h minimo affinché una biglia compia un giro della morte in una guida liscia di raggio R.

(b) Se h iniziale è $h_{min}/2$, si trovi a quale angolo ϑ la biglia si stacca dalla guida.

Soluzione.

La reazione vincolare della guida compie lavoro nullo ($\perp$ allo spostamento). La forza peso è conservativa. L'en. meccanica è conservata.

Nel cerchio della morte v cambia e la biglia subisce una forza centripeta data dalla componente normale alla guida del peso e dalla reazione vincolare:

$$F_c = mg \sin\vartheta + N$$

La biglia rimane attaccata alla guida se $N \geq 0$ in ogni punto — Ciò pone una condizione sulla velocità: Per il moto circolare; $a_c = v^2/R$ $(= \omega^2 R)$:

$$m\, v^2/R = mg \sin\vartheta + N$$

La condizione $N \geq 0$ significa

$$v^2 \geq gR \sin\vartheta \qquad (**)$$

Sulla verticale $\sin\vartheta = 0$ $\qquad v \geq \sqrt{gR}$

(a) — condizione affinchè la biglia possa compiere un giro completo —

$$E_m(z = h) = E_m(z = 2R)$$

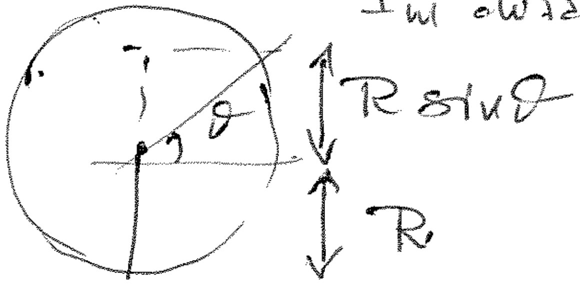
$$mgh_{min} = mg2R + \frac{1}{2} m v_{min}^2 \qquad v_{min} = \sqrt{gR}$$

$$h_{min} = 2R + \frac{1}{2}R = \frac{5}{2}R$$

(b) Per $h = \frac{h_{min}}{2} = \frac{5}{4}R$ scriviamo

~~la relazione tra~~ E_m in funzione di ϑ

$$E_m(\vartheta) = \underbrace{\frac{1}{2}mv^2 + mgR(1+\sin\vartheta)}_{E_m \text{ durante il moto}} = \underbrace{mg\frac{5}{4}R}_{E_m \text{ iniziale}}$$



Risolvendo per v^2:

$$v^2 = \frac{5}{2}gR - gR(1+\sin\vartheta)$$

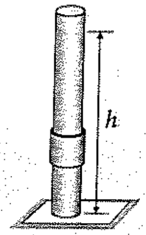
$$v^2 = \frac{3}{2}gR - gR\sin\vartheta \qquad (\square)$$

La condizione affinché $N \geq 0$ implica (*) $v^2 \geq gR\sin\vartheta$ — Sostituendo in $(\square)$ si ha le disuguaglianza:

$$\frac{3}{2}gR - gR\sin\vartheta \geq gR\sin\vartheta$$

$$\frac{3}{4} \geq \sin\vartheta \implies \vartheta \leq \arcsin\left(\frac{3}{4}\right)$$

Esercizio 4.10

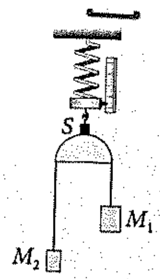


Una forza di attrito dinamico si manifesta quando un corpo si muove a contatto con un corpo esterno (per esempio quando un corpo si muove strisciando su un piano). Schematizzando l'attrito come una forza costante in modulo e diretta sempre in verso contrario allo spostamento, risolvere il seguente problema. Un manicotto cilindrico di massa $m = 0{,}3$ kg può scorrere a contatto con un'asta cilindrica verticale. Per effetto di una forza impulsiva (di durata praticamente trascurabile) il manicotto, inizialmente fermo alla base dell'asta, viene lanciato verso l'alto e raggiunge una quota massima $h = 3$ m. Successivamente il manicotto ricade al suolo e lo raggiunge con una velocità $v = 5$ m/s. Calcolare il valore I dell'impulso della forza di lancio.

Risposta

$I = 2{,}89$ Ns

Esercizio 4.11



Il sistema mostrato in figura consta di due masse $M_1 = 10$ kg e $M_2 = 6$ kg, collegate da un filo inestensibile di massa trascurabile, che può scorrere senza attrito su un supporto semicilindrico S di massa $M_s = 1$ kg. L'intero sistema è sostenuto da un dinamometro ancorato a un sostegno fisso. Mentre le masse M_1 e M_2 si muovono per effetto della forza peso, quale forza misura il dinamometro?

Risposta

$F = \sim 157$ N

Usare $W_{nc} = \Delta E_m$

(si può anche risolvere con le relazioni per il moto unif. accelerato)