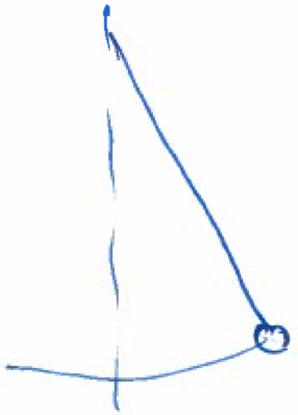
Probl. 1

Altalena



– si spezza per $\alpha_{max} = 45°$ ~~per~~

A quale angolo?

Quale $T_{rottura}$?

– Bis. T_{max} a $\vartheta = 0$?

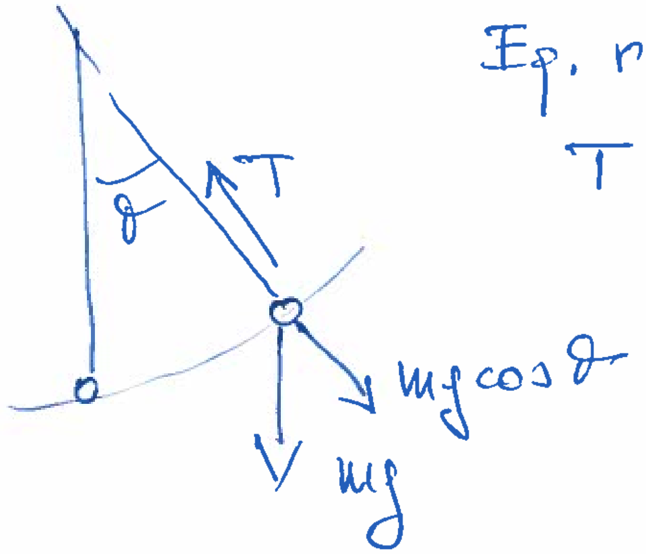
T_{max} per $\alpha_{max} = 90°$?

Problema 1 ; Procedimento ;

A)* Troviamo espressione per $T = T(\theta)$ con θ angolo rispetto alla verticale – Il filo si romperà all'angolo θ_m per cui T è massima in modulo – /

B)* Individuato l'angolo θ_m, calcoliamo $T(\theta_m)$ per un'oscillazione ampia $\alpha = 45°$ – Quella tensione corrisponde alla tensione di rottura –

A)



Eq. radiale ;

$$T - mg\cos\theta = m\,v^2/R$$

$$T(\theta) = mg\cos\theta + \frac{2E_k}{R} \qquad E_k = \frac{1}{2}mv^2$$

$$T^{max} = mg + \frac{2E_k(\theta=0)}{R} \qquad \theta_m = 0$$

B) Scegliendo $E_p(\theta=0)=0$

$$E_p = mgR(1-\cos\theta)$$

Poiché $E_m = E_k + E_p = \text{cost}$, si ha

che $E_k(\theta=0) = E_p(\theta=\alpha)$

$$= mgR(1-\cos\alpha)$$

dove α ~~$\neq 45°$~~ è la max ampiezza di oscillazione – ($\alpha = 45°$ nel caso in esame)

Dunque

$$T^{max} = mg + \frac{2}{R} mgR(1-\cos\alpha)$$

$$= 3mg - 2mg\cos\alpha$$

Per $\alpha = 45°$ $\Rightarrow$

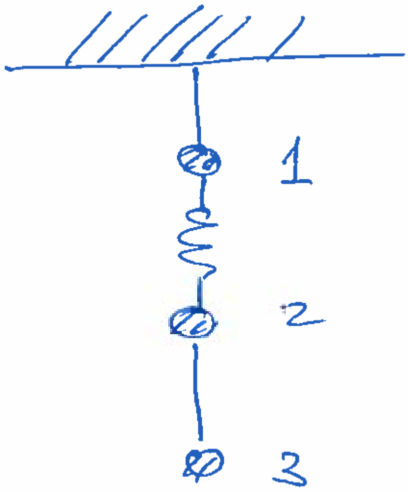
$$T^{max} = (3-\sqrt{2})mg = 1554\ N$$

$\Longrightarrow$ <u>COROLLARIO</u>

per $\alpha = 90°$ — $T^{max} = 3mg$

$\Longrightarrow$ Sia $T^{max} = 1554\ N$ –

Dove si rompe il filo se lo lascio cadere da $\alpha = 90°$?



Prob. 2.16 Dal PAPA

$m_1 = m_2 = 0.5\ kg$

$m_3 = 2 m_1 = 1.0\ kg$

$k = 250\ N/m$

$l_0 = 0.20\ m$

a) Allungamento all'equilibrio

b) A un certo istante il filo tra 2 e 3 viene tagliato e 2 inizia a salire
→ cosa succede alla pallina 1? Rimane ferma o si muove –

a) Fili inestensibili – Pallina (2)

$$m_2 g - k\Delta l + T = 0$$

$$m_3 g - T = 0 \qquad \Rightarrow k\,\Delta l = (m_2 + m_3) g$$

$$\Delta l = \frac{m_2 + m_3}{k} g = \frac{1{,}5\ kg}{250\ N/m} \cdot 9{,}8\ m/s^2 = 5{,}9\ cm$$

b) Eq per (2) dopo il taglio : solo con (2) $\Delta l_q = m_2 g/k$

ora $mg - k\Delta l = m_2 a$

Come avviene il moto ?

Nel moto di oscillazione di (2)

$$\Delta \ell_2 = \frac{m_2}{k} g \quad \text{elong. max}$$

$\Longrightarrow$ max compressione è simmetrica rispetto a ℓ_0:

$$\Delta x = -\frac{m_2}{k} g \quad -$$

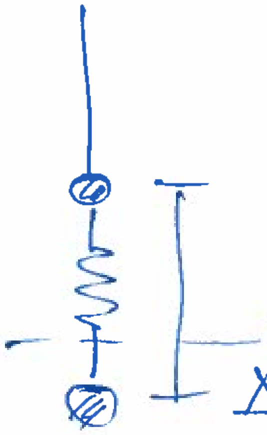
Poiché nel problema $m_1 = m_2$ per la massima compressione nel moto di (2) $\vec{F}_1 = 0$ quindi il corpo (1) rimane sempre in equilibrio –

(1) sarebbe spinto verso l'alto se

$$\Delta x = \frac{m_1}{k} g < \Delta \ell_2 = \frac{m_2}{k} g$$

se $m_1 < m_2$

se invece $m_1 \geq m_2$ la massa m_1 è ferma



$$\Delta l_2 = \frac{m}{k} g$$

$$\Delta l = \frac{m_2 + m_3}{k} g \quad \text{posizione iniziale}$$

- La pallina (2) oscilla ~~con k elastica~~
  con $\omega_0^2 = \frac{m_2}{k}$ attorno a Δl_2

- Calcoliamo la Forza su (1) durante
  qs. moto –
  Se $F_1 \geq 0$ la corda rimane tesa
  e la pallina non si muove, altrimenti
  $F_1 < 0$ la pallina salirebbe verso l'alto

$$F_1 = m_1 g + k\Delta x \qquad \text{dove } \Delta x \text{ allung. rispetto a } l_0$$

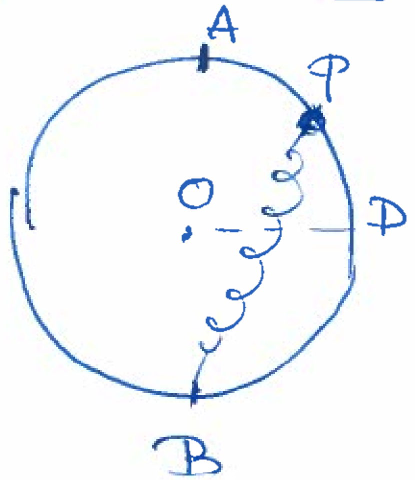
$$F_1 < 0$$

$$m_1 g + k\Delta x < 0 \implies \Delta x < -\frac{m_1 g}{k} < 0$$

molla <u>compressa</u> di un tratto

$$|\Delta x| \geq \frac{m_1 g}{k} \quad \text{per avere spinta verso l'alto}$$

Problema 6.14



Guida liscia di raggio R. –
Punto materiale di massa m (manicotto)

– Biglia inizialmente in A, viene scostata leggermente dall'equilibrio

– Lunghezza a riposo della molla è nulla (AB)

1) Modulo di v e acc. in B
2) modulo della reazione della guida in B

Soluzione: Cons. energia meccanica — F_{guida} non compie lavoro

$$E_m^i = E_p(A) = \underbrace{mg2R}_{F.\,peso} + \frac{1}{2}k(2R)^2$$

$$E_m^f = E_p(D) + E_k(D)$$
$$= mgR + \frac{1}{2}k(\sqrt{2}R)^2 + \frac{1}{2}mv^2$$

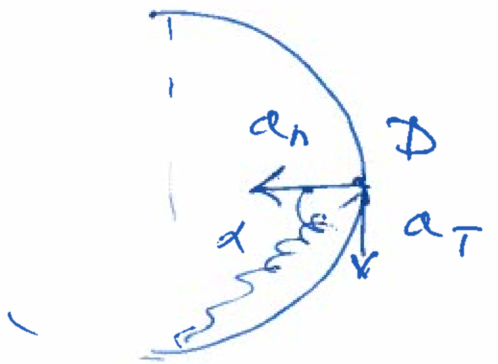
$$mg2R + \frac{1}{2}k(2R)^2 = mgR + \frac{1}{2}k(\sqrt{2}R)^2 + \frac{1}{2}\cancel{m}v^2$$

$$mgR + \frac{1}{2}k\,2R^2 = \frac{1}{2}mv^2$$

1a) $v^2 = 2gR + 2\frac{k}{m}R^2$

1b) Accelerazione in D – Risultante delle forze

Accelerazione



Perché?

$$- \; a_n = \dot{\theta}^2/R = \frac{gR + \frac{2k}{m}R^2}{R}$$

$$a_n = 2g + 2\frac{k}{m}R$$

$$- \; a_T = g + \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{F_{el}}{m} \qquad \sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$= g + \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{k}{m}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\cancel{2}}R = g + \frac{k}{m}R$$

Modulo della reazione vincolare

$$F_c = m\,\dot{\theta}^2/R$$

direttà orizz. verso C

$$k\sqrt{2}R\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} + F_N = m\,\dot{\theta}^2 R$$

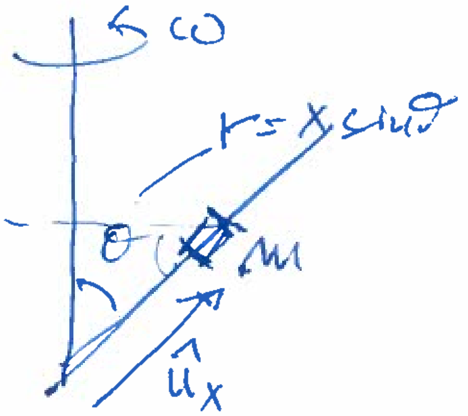
$$F_N = m\,\cancel{\dot{\theta}^2/R} - kR$$

$$= 2mg + 2\frac{k}{\cancel{m}}R - kR$$

$$= 2mg + kR$$

Prob. 3

Espressione della comp tangenziale di F lungo la sbarra –



– Guida in rotazione con velocità ω

– manicotto scorrevole con massa m – Privo di attrito

Soluzione ~~SRI – Forze lungo la guida~~

Forza agente sul manicotto –

Nel SRNI moto lungo x :

F_{vere} : $-mg\cos\theta\,\hat{u}_x$ = F_{peso} lungo x

F_{app} : $-m\,a_{SRNI}$ =

il punto x è in rotazione con acc. centripeta

$a_{cp} = -\omega^2 r = -\omega^2 x \sin\theta$

$\vec{F}_{ap} = m\omega^2 x \sin\theta\,\hat{u}\cos$

Componente tangenziale

$F_{app} = m\omega^2 x \sin^2\theta$

$$F_t = +m\left(-g\cos\theta + \omega^2 x \sin^2\theta\right)$$

Condizione di equilibrio per il manicotto –

$$F_t = 0 \qquad g\cos\vartheta = \omega^2 x \sin^2\vartheta$$

pone una relazione per ω e x –

Nota: per qs. condizione $F_t = 0$ e l'acc. è nulla – Si potrebbe pensare che un moto a $v =$ cost sia una soluzione possibile – Però la condizione è dipendente da x ÷ $\omega = \omega(x)$ – Quindi per $\omega =$ cost si ha $F_t = 0$ solo a un determinato valore di x – Se $v \neq 0$, appena il punto materiale si sposta da quel punto si trova soggetto a $F_t \neq 0$ e dunque accelera –

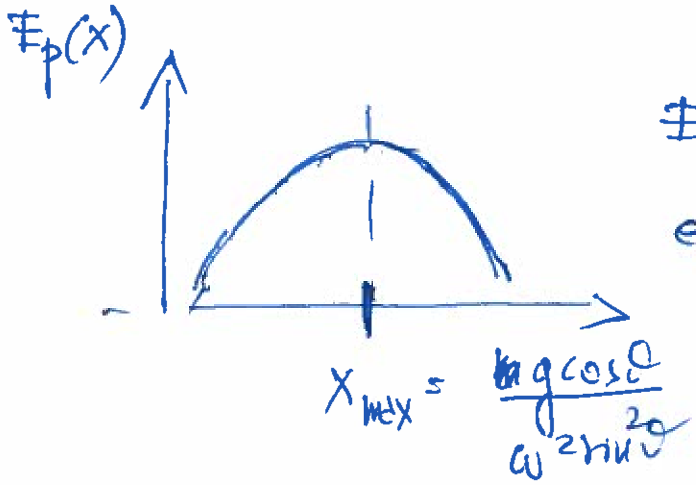
Il punto di equilibrio è instabile

Commento: Possiamo verificare che l'equilibrio è instabile tramite l'energia potenziale (APPARENTE) associata alla forza F_t –

Poiché F_t è monodimensionale, dipende solo dalla coordinata x e non dipende dallo stato di moto del punto

• Si ha per $F_t(x) = -mg\cos\vartheta + \omega^2 \sin^2\vartheta x$

$$F_p(x) = +mg\cos\vartheta\, x - \frac{1}{2} m\omega^2 \sin^2\vartheta\, x^2 + \text{cost}$$

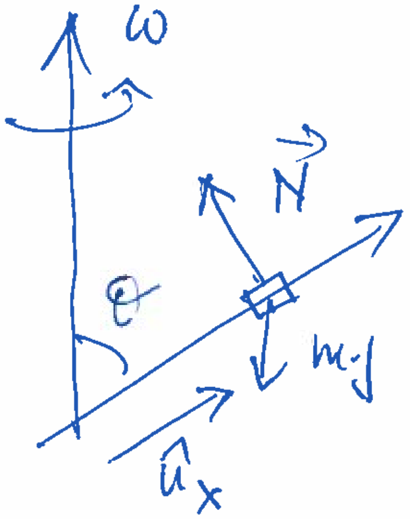


F_p ha un max (parabola con concavità verso l'alto)

~~eq~~

Eq. instabile

• <u>Analisi del moto</u> nel RIF SRI



moto lungo x

$$m\, \cancel{\frac{d^2x}{dt^2}}\, a_x = -mg\cos\vartheta$$

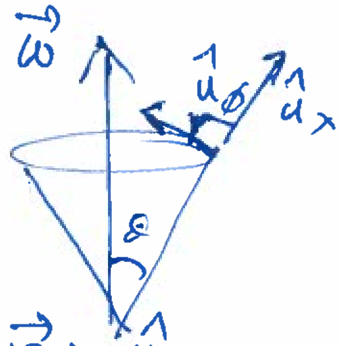
a_x è l'accelerazione lungo un asse in rotazione.

$$\circledast \quad v_x = \frac{d}{dt}(x\,\hat{u}_x) = \frac{dx}{dt}\hat{u}_x + x\frac{d\hat{u}_x}{dt}$$

il versore $\hat{u}_x$ precede attorno a $\vec{\omega}$

Per un moto di precessione

$$\frac{d\hat{u}_x}{dt} = \vec{\omega} \times \hat{u}_x$$



Perciò: $\vec{v} = \frac{dx}{dt}\hat{u}_x + x\,\underline{\vec{\omega} \times \hat{u}_x}$

$$= \frac{dx}{dt}\hat{u}_x + x\,\underline{\omega \sin\theta}\;\underline{\hat{u}_\phi}$$

seno dell'angolo compreso tra $\vec{\omega}$ e $\hat{u}_x$

direzione ortogonale a $\vec{\omega}$ e $\hat{u}_x$ –

Sono interessato alla componente di $\vec{a}$ lungo x – In termini vettoriali posso scrivere:

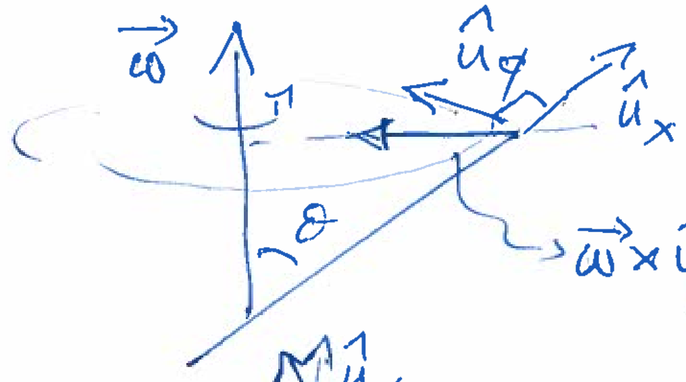
$$a_x = \vec{a} \cdot \hat{u}_x = \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{u}_x$$

Poiché $\hat{u}_x \perp \hat{u}_\phi$, questa espressione estrae solo i termini dip. da $\hat{u}_x$:

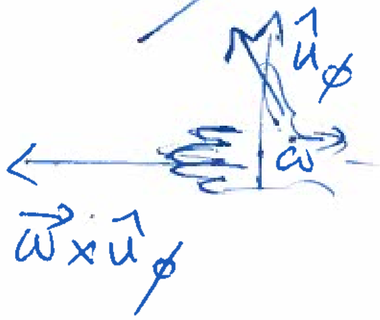
$$a_x = \frac{d^2x}{dt^2} + x\omega\sin\theta\left(\frac{d\hat{u}_\phi}{dt}\right)\cdot\hat{u}_x$$ (gli altri termini della derivazione sono lungo $\hat{u}_\phi$

$$= \frac{d^2x}{dt^2} + x\omega\sin\theta\left(\vec{\omega} \times \hat{u}_\phi\right)\cdot\hat{u}_x$$

$$a_x = \frac{d^2x}{dt^2} + x \sin\vartheta \, \omega \left(\vec{\omega} \times \hat{u}_\phi\right) \cdot \hat{u}_x$$



$\vec{\omega} \times \hat{u}_\phi = -\omega \hat{u}_r$



$$\left(\vec{\omega} \times \hat{u}_\phi\right) \cdot \hat{u}_x =$$

$$-\omega \hat{u}_r \cdot \hat{u}_x = -\omega \cos\left(\frac{\pi}{2} - \vartheta\right) = -\omega \sin\vartheta$$

Dunque: $a_x = \dfrac{d^2x}{dt^2} - \omega^2 \sin^2\vartheta \, x$

Per l'equazione del moto:

$$-mg\cos\vartheta = m a_x$$

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = \underbrace{-mg\cos\vartheta + \omega^2 \sin^2\vartheta \, x}_{F_t}$$

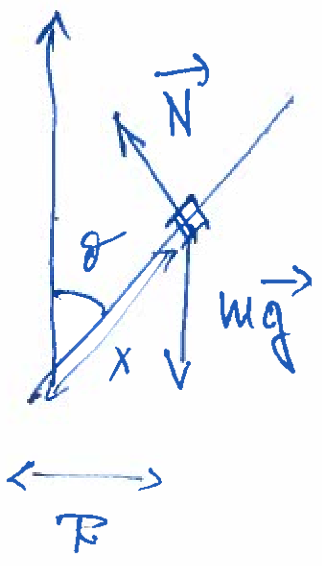
$\longrightarrow$ acc. della coordinata tangenziale lungo la guida

Abbiamo il risultato cercato

$\longrightarrow$ Soluzione nel SRNI molto più semplice

Condizioni di Equilibrio in SRI

Qs. si trova facilmente, senza dover risolvere il problema dinamico –



$$N \sin\vartheta = mg \quad \text{Eq. verticale}$$

$$N \cos\vartheta = m\omega^2 R \quad \text{F centripeta} = m a_c$$

Combinando:

$$mg \frac{\cos\vartheta}{\sin\vartheta} = m\omega^2 x \sin\vartheta$$

ossia $\quad mg\cos\vartheta = m\omega^2 x \sin^2\vartheta$

che corrisponde alla condizione di equilibrio trovata con l'analisi dinamica nel SRNI e SRI, ponendo $\frac{d^2x}{dt^2} = 0$

Con attrito STATICO – intervallo di valori di ω per eq. di x –

Soluzione esplicita complicata

$$N\sin\vartheta + f_s \cos\vartheta = mg \quad \text{- verticale}$$

$$N\cos\vartheta - f_s \sin\vartheta = m\omega^2 R \quad \text{oriz.} \qquad |f_s| \le \mu N$$

$$f_s \sin\theta = m\omega^2 R - N\cos\theta$$

se $f_s > 0$ $\quad \mu N \sin\theta \geq m\omega^2 R - N\cos\theta$

$$\frac{N(\mu\sin\theta + \cos\theta)}{mR} \geq \omega^2$$

se $f_s < 0$ $\quad \mu N \sin\theta \leq +N\cos\theta - m\omega^2 R$

$$N(\mu\sin\theta - \cos\theta) \leq -m\omega^2 R$$

$$\omega^2 \geq \frac{N(\mu\sin\theta - \cos\theta)}{mR}$$

Però N rimane inespresso —

~~perché dipende da mg~~

$$N = \frac{mg}{\sin\theta} - f_s\frac{\cos\theta}{\sin\theta} \leftarrow \text{dipende da } f_s$$

$$\cancel{N \leq \frac{mg}{\sin\theta} - \mu\frac{\cos\theta}{\sin\theta}N \Rightarrow 2N \leq \frac{mg}{\sin\theta}}$$

$\longrightarrow$ CASO PIÙ SEMPLICE —

coppa semisferica $\vec{N} \perp \vec{f_s}$

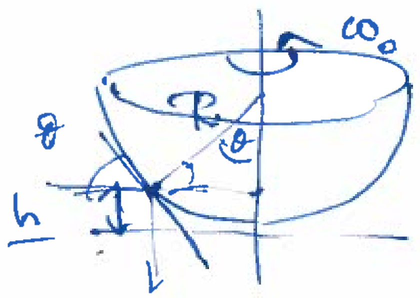
e si disaccoppiano $\underline{\text{NEXT}} \rightarrow$

DEL PAPA - 2.33

Coppa semisferica - $R = 0.30$ m
in rotazione con ω_0 -
Corpo puntiforme all'interno in equilibrio
statico con la coppa ad $h = 0.10$ m

a) V. angolare in assenza di attrito

b) V. angolare per eq. con $\mu_s = 0.4$



$$\frac{R-h}{R} = \cos\vartheta$$

~~Corpo in moto con ω_0 e acc. centripeta~~

$\cancel{m\omega_0^2 R\,r = m\omega_0^2}$

Il punto è fisso nel rif. della coppa

SR NI $\longrightarrow$ Eq. statico delle Forze
Reali + F apparenti

Lungo la direzione tangente alla coppa

$F_{centrif}$: $m\omega_0^2 r\cos\vartheta - mg\sin\vartheta = 0$

$$\cancel{m}\omega_0^2 R\cancel{\sin\vartheta}\cos\vartheta - \cancel{m}g\cancel{\sin\vartheta} = 0$$

$$\omega_0^2 = \frac{g}{R\cos\vartheta}$$

stesso risultato
della guida circolare

In presenza di <u>attrito</u>

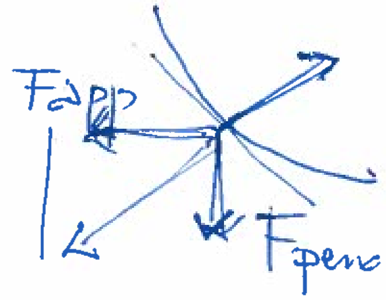
$$F_{app} + F_p + f_{st} = 0$$

$$\Rightarrow \quad m\omega^2 R\cos\vartheta\sin\vartheta - mg\sin\vartheta + f_s = 0$$

$$|f_s| \leq \mu_s N$$ ← in modulo perchè se tende a scivolare in su o in giù equilibrio

$$|m\omega^2 r\cos\vartheta - mg\sin\vartheta| \leq \mu_s N$$

— La reazione normale è



$$N = + mg\cos\vartheta + m\omega^2 r\sin\vartheta$$

$$|\cancel{m}\omega^2 r\cos\vartheta - \cancel{m}g\sin\vartheta| \leq \mu_s(\cancel{m}g\cos\vartheta + \cancel{m}\omega^2 r\sin\vartheta)$$

$$\omega^2 r\cos\vartheta - g\sin\vartheta \leq \mu_s g\cos\vartheta + \mu_s\omega^2 r\sin\vartheta$$

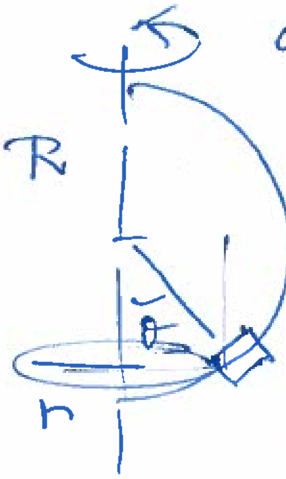
$$g\sin\vartheta - \omega^2 r\cos\vartheta \leq \mu_s g\cos\vartheta + \mu_s\omega^2 r\sin\vartheta \quad \text{(quindi il doppio)}$$

$$\omega^2 r(\cos\vartheta - \mu_s\sin\vartheta) \leq g(\sin\vartheta + \mu\cos\vartheta)$$

$$\omega^2 \leq \frac{g}{r}\,\frac{\sin\vartheta + \mu\cos\vartheta}{\cos\vartheta - \mu_s\sin\vartheta}$$

$$\omega^2 \geq \frac{g}{r}\,\frac{\sin\vartheta - \mu_s\cos\vartheta}{\cos\vartheta + \mu_s\sin\vartheta}$$

Prob. 2



manicotto di massa m - senza attrito

— Condizioni di equilibrio per m —

— Rif. inerziale —

Per equilibrio $v_y = 0 \quad a_y = 0$

$\Rightarrow \quad F_y = 0 : \quad mg = N\cos\theta$

$F_x = m\omega^2 r = m\omega^2 R\sin\theta$

$N\cancel{\sin\theta} = m\omega^2 R\cancel{\sin\theta}$

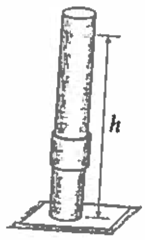
$\cancel{m}g/\cos\theta = \cancel{m}\omega^2 R$

$$\omega = \left[\frac{g}{R\cos\theta}\right]^{1/2}$$

~~— Rif. NI — F centripeta app~~

~~$m\omega^2 r = N$ equilibrio~~

Esercizio 4.10



Una forza di attrito dinamico si manifesta quando un corpo si muove a contatto con un corpo esterno (per esempio quando un corpo si muove strisciando su un piano). Schematizzando l'attrito come una forza costante in modulo e diretta sempre in verso contrario allo spostamento, risolvere il seguente problema. Un manicotto cilindrico di massa $m = 0{,}3$ kg può scorrere a contatto con un'asta cilindrica verticale. Per effetto di una forza impulsiva (di durata praticamente trascurabile) il manicotto, inizialmente fermo alla base dell'asta, viene lanciato verso l'alto e raggiunge una quota massima $h = 3$ m. Successivamente il manicotto ricade al suolo e lo raggiunge con una velocità $v = 5$ m/s. Calcolare il valore I dell'impulso della forza di lancio.

RISPOSTA

$I = 2{,}89$ Ns

Esercizio 4.11

Il sistema mostrato in figura consta di due masse $M_1 = 10$ kg e $M_2 = 6$ kg, collegate da un filo inestensibile di massa trascurabile, che può scorrere senza attrito su un supporto semicilindrico S di massa $M_s = 1$ kg. L'intero sistema è sostenuto da un dinamometro ancorato a un sostegno fisso. Mentre le masse M_1 e M_2 si muovono per effetto della forza peso, quale forza misura il dinamometro?

RISPOSTA

$F = \sim 157$ N

Usare $W_{nc} = \Delta E_m$

(si può anche risolvere con le relazioni per il moto unif. accelerato)

Prob. 4.11 + Mencuccini

$$\begin{cases} M_1 a = M_1 g - T \\ M_2 a = T - M_2 g \end{cases}$$

$$(M_1 + M_2)\, a = (M_1 - M_2)\, g$$

$$a = \frac{M_1 - M_2}{M_1 + M_2}\, g$$

$$a = \frac{\cancel{4}\,kg}{\cancel{16}\,kg} \cdot 9.8\ m/s^2$$

$$= \frac{9.8}{4}\ m/s^2 = 2.45\ m/s^2$$

$$T = M_1 (g - a) = 10\,kg \cdot (9.8 - 2.45)\ m/s^2$$

$$= 10\,kg\ 7.3\ m/s^2$$

$$= 73\ N$$

$$F_d = 2T + mg = 146\,N + 9.8\,N$$

$$\simeq 156\,N$$

~~Allungamento:~~ $\cancel{k =}$

$\cancel{F = k\,\Delta l \qquad \Delta l = \frac{F}{}}$