

Revisione leggi dinamica:

(B)

- 1) Leggi consistenti con transf. di Lorentz e richiesta di universalità (invarianza in forma) delle leggi fisiche
- 2) Per $v \ll c$ consistente con dinamica classica.

Nota: accelerazioni non sono invarianti relativistici - non lo erano, ma concettualmente i fenomeni sono semplici

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} \rightarrow a_x' = \frac{dv_x'}{dt'} \dots$$

Massa e qta' di moto:

In analogia al caso classico definiamo

$$\vec{p} = \gamma(v) \cdot m_0 \vec{v} \quad m_0 = \text{massa classica}$$

dove essere $\gamma(v) \rightarrow 1$ per $v \ll c$ per utilizzare il limite classico

Per semplicità di notazione scriviamo

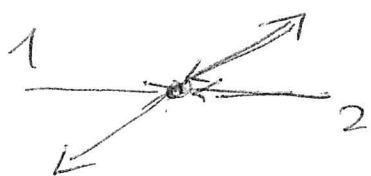
$$m_v = \gamma(v) m_0$$

Abbiamo fatto l'ipotesi che $\vec{p}$ sia $\parallel$ a $\vec{v}$

Facciamo l'ipotesi che qta' di moto e energia meccanica sono conservate in ERT, cioè che le relazioni che esprimono le leggi di conservazione sono inv. in forme.

[Nella meccanica abbiamo derivato qd. relazioni come conseguenze delle leggi di Newton, che ora vogliamo modificare per renderle compatibili con la relatività ristretta. Troviamo le modifiche assumendo il principio di relatività per le leggi di conservazione]

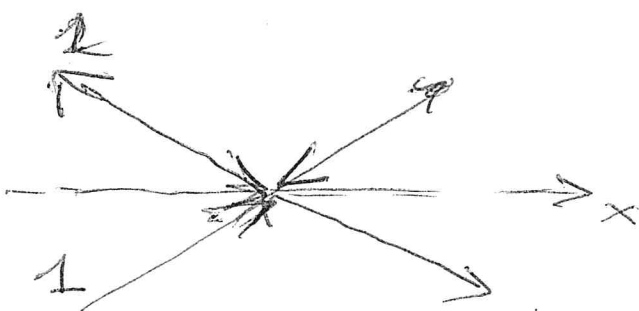
Consideriamo una collisione elastica nel c.d.m. tra due pti materiali di massa identica M



e di $v_1 = -v_2 = v$

Si osserva un urto come in figura: simmetrico in angoli e direzioni

Si può descrivere l'urto nel sistema con



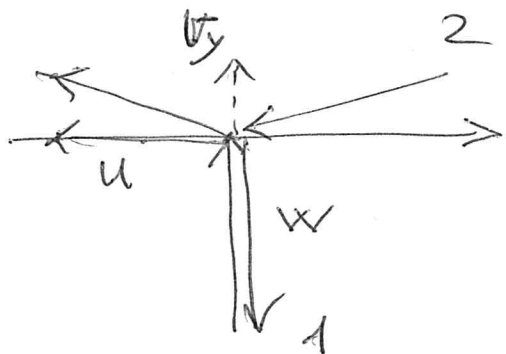
e si scotti come in figura, con x bisettrice delle velocità nel c.d.m.

Scegliamo 2^a S' solidale con la

(3)

~~particella~~ 1 componente x delle part. ①

La collisione appare come in figura in S'



① ha solo comp. verticali della velocità, che indicheremo con w

② ha una comp ~~orizz~~ lungo x , u , e una verticale y

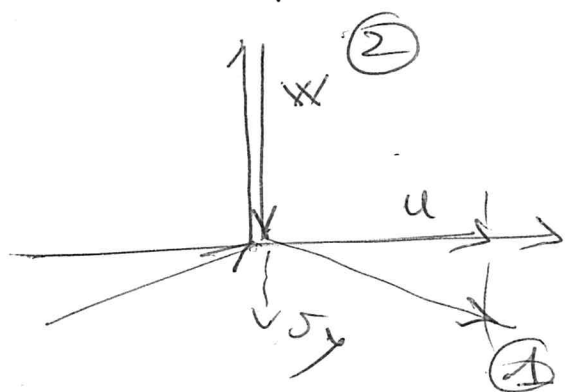
Ora descriviamo il fenomeno in S'' in moto rispetto a S' con velocità relativa

tale da annullare la componente x di ②

Cioè S'' si muove con vel $-u$ e

osserva q.s. collisione, con w , u , e y come

in S' , ma ~~per~~ con particelle scambiate

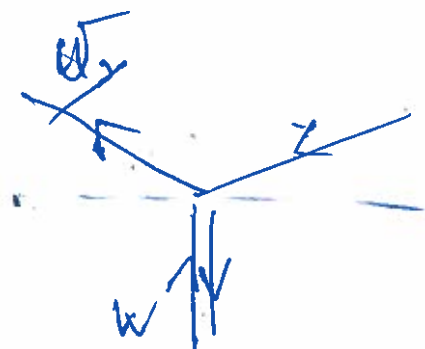


Le trasf. di velocità dicono che S' a S''

danno:

$$\gamma_y = \frac{w}{\gamma(1 + \frac{u_x u}{c^2})} \Rightarrow \gamma_y = \frac{w}{\gamma} = w \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}$$

Dettagli:



$$(u, \sigma_y) \quad (0, w)$$

in S' : $\vec{v}_2 = (u, \sigma_y)$
 $\vec{v}_1 = (0, w)$



in S'' $\vec{v}_2 = (0, w)$
 $\vec{v}_1 = (u, \sigma_y)$

Poiché $m_1 = m_2$ situazione simmetrica con scambio di particelle -

Troviamo la relazione tra w e σ_y usando la composizione di velocità:

$$\sigma_x'' = \frac{\sigma_x - u}{1 - \frac{\sigma_x u}{c^2}}$$

- moto relativo u
 - componente $\sigma_x = 0$

$$\sigma_y'' = \frac{w \sqrt{1 - u^2/c^2}}{\left(1 - \frac{\sigma_x u}{c^2}\right)}$$

$$[\sigma_x = 0]$$

[ricorda : $\sigma_y' = \frac{\sigma_y}{\gamma \left[1 - \frac{u \sigma_x}{c^2}\right]}$]

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$$

Cons. qta' di moto

(4)

Nella collisione per tutti i SRIF, la comp.
x del momento è conservata ($U=0$ per una
particella, U medesimo prima e dopo l'urto
per l'altra) -

Componente y: $\Delta p_1 = 2m_w \gamma$
in S'

~~qta'~~ $\Delta p_2 = 2m_o \gamma \sqrt{1 - u^2/c^2}$

il pedice o indica che (2) si muove a
velocità $U = \sqrt{u^2 + v^2}$

Affinché la qta' di moto

$$\Delta p_{tot} = 0 \Rightarrow \Delta p_1 = \Delta p_2$$

$$\frac{m_w \gamma}{m_o} = \sqrt{1 - u^2/c^2}$$

Consideriamo il limite in cui $\gamma \rightarrow 0$, che
implica $U \rightarrow 0$ e si ottiene

$$m_u = \frac{m_o}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}$$

$\rightarrow m_o$ per $u/c \ll 1$
MASSA A RIPOSO

La massa di un corpo in movimento aumenta
di un fattore γ : $m_u = \gamma m_o$

Energia cinetica (relativistica)

(5)

In dinamica relativistica, ~~legge~~ di Newton è

$$(1) \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} \quad \text{Sist. a massa variabile}$$

$$\text{con } \vec{p} = m\vec{v} = \gamma m_0 \vec{v}$$

Da (1) e richiedendo invarianza del teorema dell'energia cinetica, si ricavi l'espressione di E_k relativistico:

$$\begin{aligned} (*) \quad dE_k &= \delta L = \vec{F} \cdot d\vec{r} \\ &= \frac{d\vec{p}}{dt} d\vec{r} = d\vec{p} \cdot \vec{v} = d\vec{p} \cdot \frac{\vec{p}}{\gamma m_0} \\ &= d\vec{p} \cdot \frac{\vec{p}}{m_0 \gamma} = \frac{d\vec{p}^2}{2m_0 \gamma} \end{aligned}$$

L'espressione delle pta' di moto relativistico può essere manipolata:

$$\vec{p} = \gamma m_0 \vec{v} \rightarrow p^2 = (\gamma m_0 v)^2$$

$$p^2 - (\gamma m_0 c)^2 = \gamma^2 m_0^2 (v^2 - c^2)$$

$$p^2 - (\gamma m_0 c)^2 = -\gamma^2 m_0^2 c^2 (1 - \beta^2)$$

$$p^2 - (\gamma m_0 c)^2 = \underbrace{-m_0^2 c^2}_{\text{costante}} \quad (II)$$

(6)

Differentiando q.s. relazione si ottiene:

$$dp^2 = 2\gamma d\gamma m_0^2 c^2$$

Sostituendo in (*):

$$dE_K = \frac{2\gamma d\gamma m_0^2 c^2}{2\gamma} = m_0^2 c^2 d\gamma$$

Integrando e ponendo $E_K = 0$, per $\gamma = 1$

$$\boxed{E_K = m_0 c^2 (\gamma - 1)} \quad (**)$$

Limite classico: $\beta \rightarrow 0$

$$E_K = m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1 \right)$$

$$\approx m_0 c^2 \left(1 + \frac{1}{2} \beta^2 - 1 + \dots \right)$$

$$\approx \frac{1}{2} m_0 v^2$$

coincide con l'espressione classica di E_K

Limite ultra relativistico: $\gamma \gg 1$

$$E_K = \gamma m_0 c^2 \quad (m_0 c^2 \text{ trascurabile})$$

Ma qual è il significato dei termini?

Esperimento con accelerazione

Verifica sperimentale

- Particella carica $\vec{F} = q\vec{E}$

$$L = \int \Delta E_p = q \Delta V$$

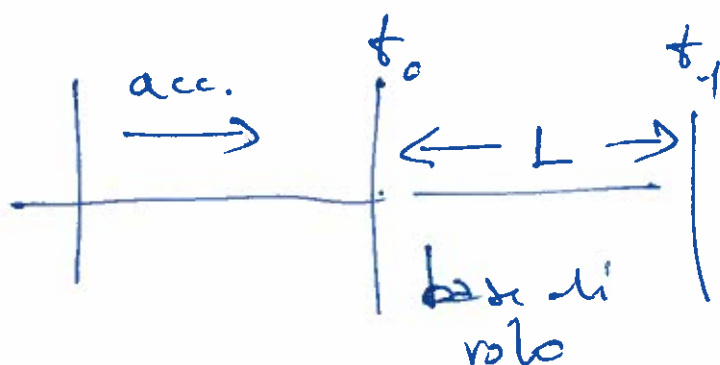
Dal teorema dell'energia cinetica:

$$W = q \Delta V = \Delta E_k$$

$$\rightarrow E_k = \frac{1}{2} m_0 v^2$$

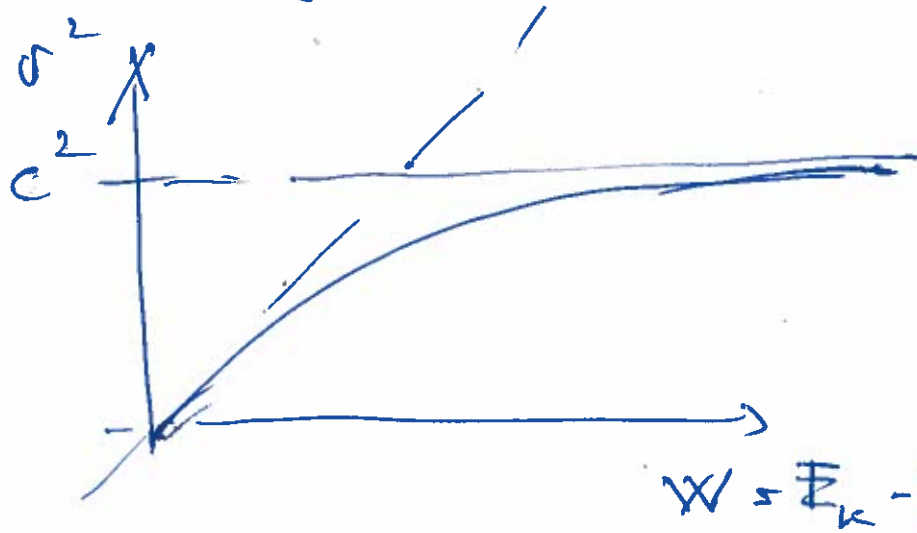
classica

$$= E_k - E_k(0)$$



$$\sigma = \frac{\Delta t}{\Delta t}$$

In base alle relazioni classica tra E_k e σ , ci si aspetta una relazione lineare tra E_k e σ^2 .



Serve un lavoro infinito per accelerare un corpo fino a velocità pari a c

La relazione classica tra E_k e σ non è valida nel regime relativistico

⊗ ⊗

Possiamo ottenere il risultato da un'altra prospettiva

$$\vec{F} = \frac{d\vec{q}}{dt} \quad e \quad \vec{q} = \frac{m_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \vec{v}$$

dicono che l'azione di una forza non determina solo un aumento di $\vec{v}$ (acceleration), ma anche un aumento della massa.

Possiamo esprimere l'aumento di massa tramite

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \approx m_0 + \frac{1}{2} m_0 \frac{v^2}{c^2} + \dots$$

L'aumento di massa è legato a $\Delta m = \frac{\Delta E_K}{c^2}$,

$$\text{ossia } \Delta E_K = (m - m_0) c^2$$

Poiché per $v=0$ $E_K=0$ e $m=m_0$, l'espressione per l'energia cinetica si può scrivere

$$(**) \quad \boxed{E_K = m_0 c^2 (\gamma - 1)} \quad \text{con } m = \gamma m_0$$

L'espressione implica che $m_0 c^2$ e $\gamma m_0 c^2$ sono grandette omogenee all'energia

En. totale, en. a riposo e massa:

L'espressione (**) può essere scritta

$$m_0 \gamma c^2 = m_0 c^2 + E_K$$

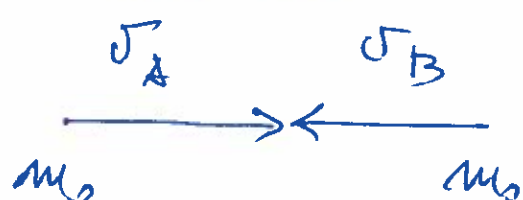
$$\boxed{mc^2 = m_0 c^2 + E_K}$$

In relatività $\boxed{E = mc^2}$ rappresenta
l'energia totale e include, l'energia (di massa)
a riposo: $\boxed{E_0 = m_0 c^2}$ e l'energia cinetica.

Le relazioni definiscono la cosiddetta "equivalenza
di massa e energia". Se si tiene conto
che l'energia cinetica si può trasformare
in altre forme di energia, risulta spontaneo
generalizzare il risultato dicendo che ad
un'energia totale E , in qualunque forma
si manifesti, corrisponde una massa
secondo $E = mc^2$. A variazioni di massa
di un sistema corrispondono variazioni di
energia $\Delta mc^2 = \Delta E$: $1g \rightarrow 9 \cdot 10^{13} \text{ joule}$

* Trasformazione di E_K in energia di massa:
il caso dell'urto completamente anelastico (MP)

→ Urto frontale Nel CM di due masse identiche :



$$\vec{v}_A = -\vec{v}_B = \vec{v}$$

$M_0 = \text{massa a riposo}$

- Urto nel limite classico : $\Delta E_K' = E_K'$
 implica $E_K'(f) = 0$ nel sistema del cm
- Dunque particelle ferme con $M = 2M_0$
 Si forma un oggetto con massa doppia

→ Urto nella dinamica relativistica avviene tra due oggetti con masse $m_v \neq m_0$

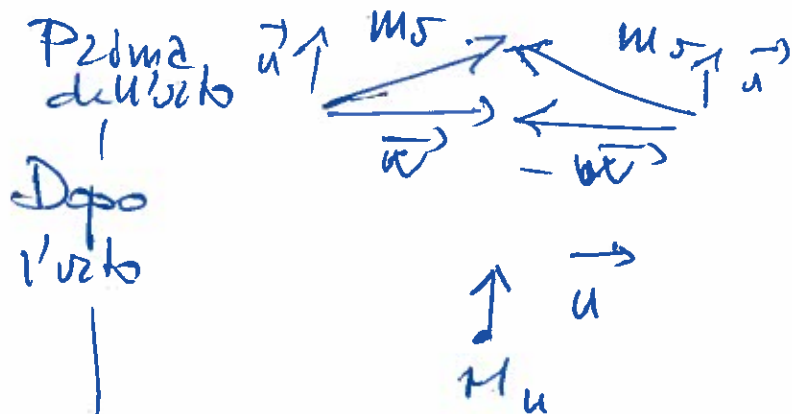
$$m_v = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} > m_0$$

→ Descriviamo l'urto in un SRT con velocità v relativa al CM nella direzione ~~verticale~~ $\perp$ a $\vec{v}$

Urto nel CdM



Urto in S'
(con velocità u rispetto
a CdM)



Il sistema visto da S' , si muove sempre
con velocità u lungo l'asse y , ha
prima e dopo l'urto -

Per la conservazione della qta' di moto
lungo l'asse y in S' :

$$2 m_0 u = M_u u$$

$$\frac{M_0}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} = \frac{2 m_0}{\sqrt{1 - w^2/c^2}}$$

Nel riferimento del CdM $u = 0$
 $w \neq 0$

$$\rightarrow M_0 = \frac{2 m_0}{\sqrt{1 - w^2/c^2}} = 2 m_w > 2 m_0$$

Si forma un oggetto di massa maggiore della somma delle masse a riposo - ~~velocità~~
 Possiamo calcolare la differenza di massa:

$$M_0 = \frac{2m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \approx 2m_0 \left(1 + \frac{1}{2} \beta^2 + \dots \right) \quad (*)$$

$$= 2m_0 + \underbrace{\left(\frac{1}{2} m_0 v^2 + \frac{1}{2} m_0 v^2 \right)}_{E'_K} \frac{1}{c^2} + \dots$$

E'_K prima dell'urto

Dunque nell'urto $\Delta E'_K = E'_K$ (dopo l'urto il sistema è fermo come nel caso classico), ma l'energia cinetica non viene dissipata, ma si traduce in massa: $\Delta M = \Delta E'_K / c^2$

→ possibilità di produrre nuove particelle (massive) nella collisione di particelle leggere.

(*) In modo relativistico senza sviluppo:

$$M_0 = 2m_{\gamma} = 2m_0 \gamma = 2m_0 + 2(m_0 \gamma - m_0) =$$

$$= 2m_0 + \frac{2m_0 c^2 (\gamma - 1)}{c^2} = 2m_0 + \frac{\Delta E_K}{c^2}$$

Qs. l'impulso è peculiare della cinematica relativistica. In un urto anelastico classico;
 $M_0 = 2m_0$ ~~resta~~ e sarebbe $2m_0$ indep.
 dall'energia cinetica delle particelle entranti

- In relatività $M = 2m_{rel}$:

la massa dell'oggetto che si forma dipende
 dall'energia della collisione

→ se si fanno urtare due protoni
 a fermi $M = 2m_p$

→ se si fanno urtare due protoni
 con $2m_{rel} = M_H \rightarrow$ si può
 produrre il bosone di Higgs

Poiché E_k può trasformarsi in altre forme di energia, e' naturale
~~generalizzare al caso in cui~~
~~l'energia cinetica~~ anche se l'energia immessa non è cinetica,

ma potenziale o di altra forma - il ~~caso con~~
 cui si immette l'energia immessa si traduce in
 massa : $\Delta E = \Delta m c^2$

- Al contrario se un oggetto di massa M si
 disintegra in oggetti di massa m_0 (a riposo)
 l'energia liberata è $Q = (M - 2m_0)c^2$
- Si può misurare (calorimetro) E s. DEAD, ALFA

Generalizzazioni della II Legge della dinamica

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

1) Per $\vec{F} = 0$ $\vec{p} = \text{cost}$

in un SRI $\vec{p} = \text{cost}$ per $\vec{F}$ nulla
(non semplicemente $\vec{v} = \text{cost}$ come
nel caso classico)

2) $\vec{F} \neq 0$ $\Delta\vec{p} = \int \vec{F} dt$ teorema dell'impulso

Le variazioni di $\vec{p}$ rivelano la forza.
La legge di forza va ricostruita dall'analisi
delle variazioni di $\vec{p}$ e non
semplicemente dall'accelerazione.
Nel limite $v \ll c$, la relazione
coincide con $F = m\vec{a} = m \frac{d\vec{v}}{dt}$ - la
generale la relazione tra $\vec{F}$ e $\vec{a}$ è
più complicata.

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{dm}{dt} \vec{v} + m \frac{d\vec{v}}{dt}$$

comp. $\parallel \vec{v}$

comp. $\parallel \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$

Perché $E_K = m_0 c^2 (\gamma - 1) = mc^2 - m_0 c^2$

$$\frac{dE_K}{dt} = c^2 \frac{dm}{dt}$$

Quindi:

$$\vec{F} = \frac{dm}{dt} \vec{v} + m \frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$\vec{F} = \frac{1}{c^2} \frac{dE_K}{dt} \vec{v} + m \frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$\vec{F} = \frac{1}{c^2} \left(\frac{dE_K}{dt} \right) \vec{v} + m \frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$\vec{F} = \frac{1}{c^2} (\vec{F} \cdot \vec{v}) \vec{v} + m \vec{a}$$

$\vec{F} \parallel \vec{a}$ se 1) $\vec{v} \parallel \vec{a} \Rightarrow$ moto rettilineo

2) $\vec{F} \perp \vec{v}$ (es. forza di Lorentz)