Orbite

- Sistema di due corpi : F centrale

$$\vec{F} = -G\frac{M\mu}{r^2}\hat{u}_r$$

$$\vec{L} = \text{cost}$$

$$E_m = \text{cost}$$

$$\vec{L} = \vec{L}_1 + \vec{L}_2 \qquad e \quad E_m = \frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2 - G\frac{m_1 m_2}{r}$$

Dim. per esercizio che :

$$(*) \quad \vec{L} = \vec{r} \times \mu\vec{v} \qquad \vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 \qquad \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

$$E_m = \frac{1}{2}\mu v^2 + E_p$$

- Si ricordi che $\vec{r}_1 = \frac{m_2}{M}\vec{r}$, $\vec{r}_2 = \frac{m_1}{M}\vec{r}$

Dalla relazione (*)

$$\boxed{L = \mu r^2 \frac{d\vartheta}{dt}} \qquad \left(\vec{v} = \frac{dr}{dt}\hat{u}_r + r\frac{d\vartheta}{dt}\hat{u}_\vartheta\right)$$

$$\boxed{\frac{d\vartheta}{dt} = \frac{L}{\mu r^2}} \longleftarrow \text{evoluzione dell'angolo legata a } r = r(t)$$

Eq. del moto

$$\mu \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = F(r)\,\hat{u}_r$$

Comp. polare:

$$\mu \left[2 \frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt} + r\frac{d^2\theta}{dt^2} \right] \hat{u}_\theta = 0$$

$$\mu \frac{1}{r}\frac{d}{dt}\left[r^2 \frac{d\theta}{dt} \right] \hat{u}_\theta = 0$$

$$\frac{1}{r}\frac{dL}{dt} = 0 \qquad \Longleftarrow \qquad L = \text{cost}$$

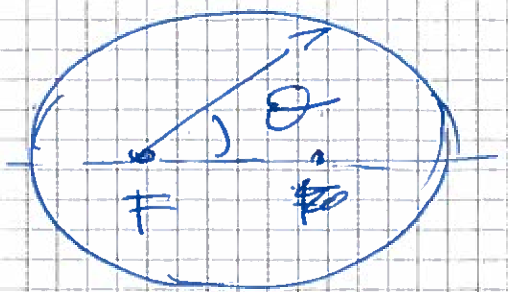
Comp. radiale

$$\mu \left[\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 \right] \hat{u}_r = F(r)\,\hat{u}_r$$

$$\mu \left[\frac{d^2r}{dt^2} - \frac{L^2}{\mu^2 r^2}\frac{1}{r} \right] = F(r) \qquad (**)$$

Posso trovare soluzione $r = r(t)$ risolvendo eq. diff. (se fossi capace) e poi esprimere in modo param. $r = r(t)$ e $\theta = \theta(t)$ da (**)

Soluzione polare $r = r(\theta)$



~~???~~ determino r al variare di θ

Devo conv. eq. polare in eq. che lega r a θ piuttosto che a t

$$r = r(\theta(t))$$

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \frac{L}{\mu r^2}\frac{dr}{d\theta}$$

$$\frac{d}{dt} \longrightarrow \frac{L}{\mu r^2}\frac{d}{d\theta}$$

Acc.

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = \frac{L}{\mu r^2}\frac{d}{d\theta}\left[\frac{L}{\mu r^2}\frac{d}{d\theta} r\right] =$$

$$= \frac{L^2}{\mu^2 r^2}\frac{d}{d\theta}\left[\frac{1}{r^2}\frac{d}{d\theta}\right] =$$

$$= -\frac{L^2}{\mu^2 r^2}\frac{d}{d\theta}\left[+\frac{d}{d\theta}\frac{1}{r}\right]$$

$$= -\frac{L^2}{\mu^2 r^2}\frac{d^2}{d\theta^2}\frac{1}{r}$$

Eq. del moto:

$$-\frac{L^2}{\mu \cancel{r^2}}\left[\frac{d^2}{d\theta^2}\frac{1}{r}+\frac{1}{r}\right] = -\frac{G\mu M}{\cancel{r^2}}$$

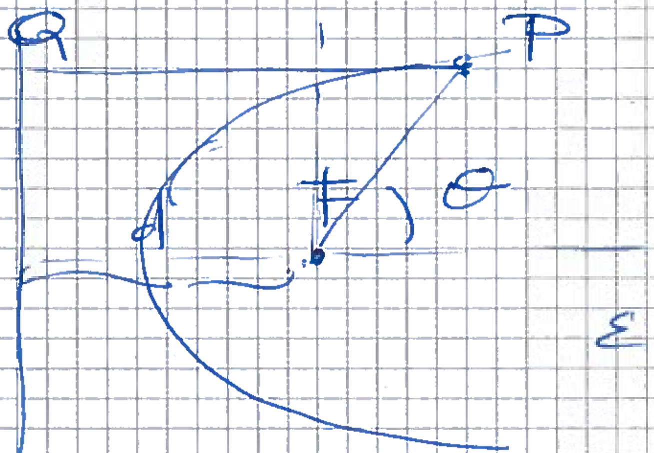
$$\frac{d^2}{d\theta^2}\left(\frac{1}{r}\right)+\left(\frac{1}{r}\right)=\frac{G\mu^2 M}{L^2}$$

our

Eq. os. arm $X(\theta) = \underline{\underline{A}}\cos\theta + \text{cost}$

$$\boxed{\frac{1}{r} = A\cos\theta + \frac{G\mu^2 M}{L^2}}$$

Eq. conica



$$\varepsilon = \frac{PF}{PQ} =$$

$$\varepsilon = \frac{r}{d + r\cos\theta}$$

$$\cancel{\varepsilon d}\ \ \varepsilon d = r(1-\varepsilon\cos\theta)$$

$$\boxed{\frac{1}{r} = \frac{1}{\varepsilon d} - \frac{\cos\theta}{d}}$$

~~Corretta~~ (Eq. orbita)

cost del moto

$\varepsilon d = a(1-\varepsilon^2)$

$\varepsilon a = OF$

$\frac{b}{a} = \sqrt{1-a^2}$

$\varepsilon \lessgtr 1$

$\varepsilon = 0$ cerchio

Proprietà notevoli (Ellisse - orbite ad...)

1) $\varepsilon d = a(1-\varepsilon^2)$

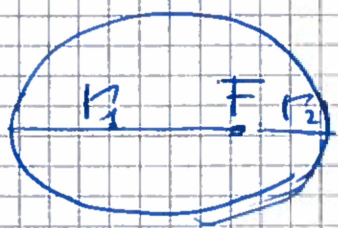
2) $OF = \varepsilon a$ $\qquad \varepsilon = 0$ cerchio

3) $\frac{b}{a} = \sqrt{1-\varepsilon^2}$

— Dimostrazioni

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{\varepsilon d} - \frac{\cos\vartheta}{d} \Longrightarrow r = \frac{\varepsilon d}{1-\varepsilon\cos\vartheta}$$

1) Relazioni distanza tra i vertici



$r_1 = r(\vartheta = 0)$

$r_2 = r(\vartheta = \pi)$

$$2a = r_1 + r_2 = \frac{\varepsilon d}{1-\varepsilon} + \frac{\varepsilon d}{1+\varepsilon}$$

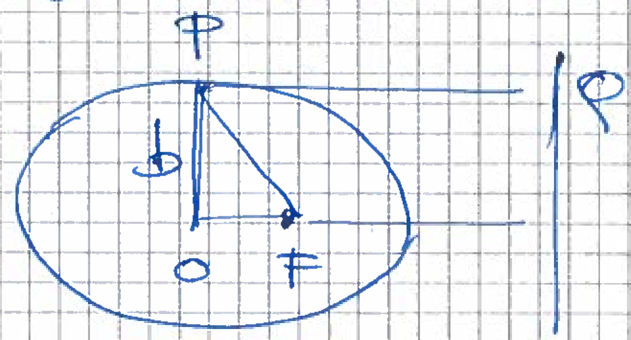
$$\Longrightarrow \varepsilon d = a(1-\varepsilon^2)$$

2) $OF = a - r_2 = a - \dfrac{\varepsilon d}{1+\varepsilon} =$

$$= a - \frac{a(1-\varepsilon^2)}{1+\varepsilon} = a - a(1-\varepsilon) = \varepsilon a$$

L'eccentricità misura la dist. del fuoco dal centro (in unità di a)

3) Semiasse minore



Per definizione di conica

$$\varepsilon = \frac{\overline{PF}}{\overline{P\rho}} = \frac{\overline{PF}}{\overline{OF} + d} = \frac{\overline{PF}}{\varepsilon a + d}$$

Dunque $\overline{PF} = \varepsilon^2 a + \varepsilon d$

$$= \varepsilon^2 a + a(1-\varepsilon^2) = a$$

$r = a$ per il punto dell'orbita ~~orto~~ la cui ortogonale sul semiasse maggiore passa per il centro dell'ellisse

Per il teorema di pitagora:

$$b^2 = \overline{PF}^2 - \overline{OF}^2 =$$

$$= a^2 - \varepsilon^2 a^2 = a^2(1-\varepsilon^2)$$

$$\frac{b}{a} = \sqrt{1-\varepsilon^2}$$

cvd

Altrimenti:

$\varepsilon > 1$	iperboli	aperte
$\varepsilon = 1$	parabola	"
$\varepsilon < 1$	ellissi	chiuse

Per ellissi

$$\varepsilon d = \frac{L^2}{G\mu^2 M} \implies L^2 = G\mu^2 M a(1-\varepsilon^2)$$

il momento angolare dip. dall'eccentricità dell'orbita.
Ad a fisso, ho L diverso

Esempio:

Fuoco si sposta verso il vertice

$\underline{\underline{OF = \varepsilon a}}$

$L = \text{cost.}\ \forall$ orbita (anche aperte)

$$L^2 = G\mu^2 M \varepsilon d$$

(non c'è a per orbite aperte)

3ª Legge di Keplero - verifica

$$\frac{L}{2\mu} = \frac{dA}{dt} = \frac{\pi a b}{T}$$

(poiché cost. è uguale anche a A/T)

$$\frac{G\mu^2 M a(1-\varepsilon^2)}{4\mu^2} = \frac{\pi^2 a^2 b^2}{T^2}$$

$$\Longrightarrow T^2 = \frac{4\pi^2}{GM}\,\frac{a^4(1-\varepsilon^2)}{a(1-\varepsilon^2)}$$

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{GM}\,a^3 \qquad \text{cvd.}$$

D'altronde la struttura della forza è stata ricavata da qs. legge - sarebbe stato sorprendente se non l'avessimo trovata valida

Energia meccanica

$E_m(r) = \text{cost}$ — verifichiamo per orbite ellittiche l'espressione di E_m

$$E_m = \frac{1}{2}\mu \vec{v}\cdot\vec{v} - \frac{G\,mM}{r} =$$

$$= \frac{1}{2}\mu\left[\frac{dr}{dt}\hat{u}_r + r\frac{d\vartheta}{dt}\hat{u}_\vartheta\right]\cdot\left[\quad '' \quad\right] - \frac{G\,mM}{r}$$

$$= \frac{1}{2}\mu\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2}\mu\left(r\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 - \frac{G\,mM}{r}$$

Scrivo i termini in funzione di $1/r$ per usare (eq. dell'orbita)

1) $\frac{\mu}{2}\left(r\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 = \frac{1}{2}\frac{L^2}{\mu}\frac{1}{r^2}$

2) $\frac{1}{2}\mu\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = \frac{1}{2}\mu\left(\frac{L}{\mu r^2}\frac{dr}{d\vartheta}\right)^2 = \frac{1}{2}\frac{L^2}{\mu}\left(\frac{d}{d\vartheta}\frac{1}{r}\right)^2$

3) $-\frac{G\,mM}{r} = -\frac{1}{2}\frac{L^2}{\mu}\frac{2}{\varepsilon d}\frac{1}{r}$

$$E_m = \frac{1}{2}\frac{L^2}{\mu}\left[\frac{1}{r^2} + \left(\frac{d}{d\vartheta}\frac{1}{r}\right)^2 - \frac{2}{\varepsilon d}\frac{1}{r}\right]$$

→ sostituiamo la soluzione per l'eq. del moto:

$$E_m = \frac{1}{2}\frac{L^2}{\mu}\left[\left(\frac{1}{\varepsilon d} - \frac{\cos\vartheta}{d}\right)^2 + \frac{\sin^2}{d^2} - \frac{2}{\varepsilon d}\left(\frac{1}{\varepsilon d} - \frac{\cos\vartheta}{d}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\frac{L^2}{\mu}\left[\frac{1}{d^2} - \frac{1}{(\varepsilon d)^2}\right] = \frac{1}{2}\frac{L^2}{\mu}\left[\frac{\varepsilon^2 - 1}{\varepsilon d}\right]$$

se $\varepsilon \geq 1$ $E_m \geq 0$ orbite aperte

$$E_m = \frac{1}{2} G \mu M \left[\frac{\varepsilon^2 - 1}{\varepsilon d} \right]$$

se $\varepsilon < 1$ orbite chiuse $E_m < 0$

Inoltre per orbite chiuse

$$\varepsilon d = a(1 - \varepsilon^2)$$

$$\Longrightarrow E_m = \frac{1}{2} \frac{G \mu E}{a}$$

Em. meccanica indip. dall'eccentricità

eccentricità controllata da L

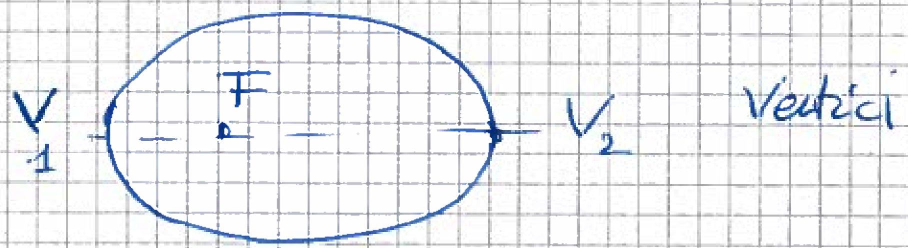
Trovata soluzione generale - però in molti casi è sufficiente ricorrere alle costanti del moto -

$$L = cost$$
$$E_M = cost$$

Consentono di definire relazioni tra velocità e distanza dal Fuoco nei vari punti dell'orbita -

$$E_M = \frac{1}{2} m v^2 - \frac{GMm}{r}$$ vera sempre

L assume espressione semplice e notevole nei vertici dell'orbita



in V_1 e V_2 $\vec{F} \perp \vec{v}$

$\Rightarrow L = m r v$ $(\sin\theta = 1)$

→ relazione tra velocità nei due vertici

$$m r_1 v_1 = m r_2 v_2$$

$$r_1 = a(1-\varepsilon)$$
$$r_2 = a(1+\varepsilon)$$

→ rapporto di velocità dipende solo dall'eccentricità

$$\boxed{v_2 = v_1 \frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}}$$

Combinando con l'espressione di E_m e L nei vertici si può calcolare E_m e L in modo indip. da v_1 ma in funzione solo dei param. dell'orbita

* Eguagliando di E_m in V_1 e V_2:

$$v_1^2 - v_2^2 = 2\frac{GM}{a}\left[\frac{1}{1-\varepsilon} - \frac{1}{1+\varepsilon}\right]$$

$$\Longrightarrow v_1^2 = \frac{GM}{a}\frac{(1+\varepsilon)^2}{1-\varepsilon^2} > 0 \quad \varepsilon < 1$$

* $$L^2 = m^2 v_1^2 a^2 (1-\varepsilon)^2$$

$$= GMm^2 a \frac{(1-\varepsilon)^{\cancel{2}}(1+\varepsilon)^2}{(1-\varepsilon)(1+\varepsilon)}$$

$$= GMm^2 a (1-\varepsilon^2) \Longleftarrow$$

Identica alla soluzione trovata nella soluzione generale

* $$E_m = \frac{1}{2}mv_1^2 - \frac{GmM}{a(1-\varepsilon)} =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{GMm}{a}\left[\frac{(1+\varepsilon)^2}{(1-\varepsilon)^2} - \frac{2}{1-\varepsilon}\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{GMm}{a}\left[\frac{\varepsilon^2-1}{1-\varepsilon^2}\right] = -\frac{1}{2}\frac{GMm}{a}$$

Commento (e via alla soluzioni di problemi)

- La relazione tra v e r si trova in modo immediato per orbita circolare ($r = \text{cost}$)

$$a_c = \omega^2 r = \frac{v^2}{r} \quad (\square)$$

$$m\frac{v^2}{r} = \frac{GmM}{r^2} \Longrightarrow v = \left[\frac{GM}{r}\right]^{1/2}$$

- In generale però

$$a_c = \frac{d^2 r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2$$

che coincide con $(\square)$ solo per $\frac{d^2 r}{dt^2} = 0$

- Per orbite ellittiche non si può sfruttare $(\square)$ ma le relazioni notevoli nei vertici:

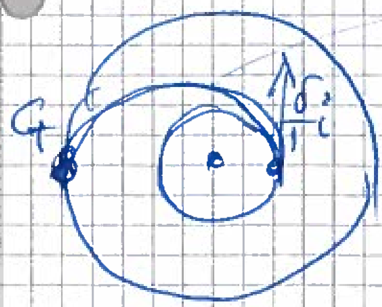
$$\begin{matrix} L = \text{cost} \\ E_m = \text{cost} \end{matrix} \quad \begin{cases} r_1 v_1 = r_2 v_2 \\ \frac{1}{2} m v_1^2 - G\frac{mM}{r_1} = \frac{1}{2} m v_2^2 - G\frac{mM}{r_2} \end{cases}$$

Sistema con 2 eq. e 2 incognite $\Longrightarrow v_1$ e v_2 sono completamente determinate dai param. dell'orbita e cost L e E_m. Trovata E_m

$$E_m = \frac{1}{2} m v^2 - \frac{GmM}{r}$$ può essere usata

per trovare v in funzione di r –

Problema - Sonda TERRA Giove



orbita ellittica tangente a T e G

| trovare $v_{lancio} = v_\ell$ |

$R_{TS} = 1.5 \times 10^8$ Km

$R_{GS} = 7.8 \times 10^8$ Km $v_T = 30$ Km/s

$$\longrightarrow \quad v_\ell^i = v_\ell + v_T$$

orbite ellittiche: $E_M = \text{cost}$

$L = \text{cost}$

$$-\frac{G m M_s}{R_{TS}} + \frac{1}{2} m v_i^2 = -\frac{G m M_s}{R_{GS}} + \frac{1}{2} m v_f^2$$

$$v_i^2 - v_f^2 = 2 M_s G \left(\frac{1}{R_{TS}} - \frac{1}{R_{GS}} \right)$$

$$L_i = L_f \Rightarrow m v_i R_{TS} = m v_f R_{GS}$$

$$\Rightarrow v_f = \frac{R_{TS}}{R_{GS}} v_i$$

$$v_i^2 \left(1 - \frac{R_{TS}^2}{R_{GS}^2} \right) = 2 M_s G \left(\frac{1}{R_{TS}} - \frac{1}{R_{GS}} \right)$$

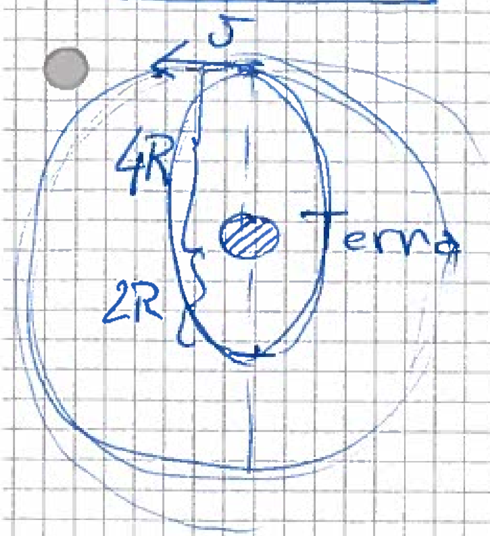
$\longrightarrow v_i = 37.6$ Km/s con i dati

$v_\ell = (37.6 - 30)$ Km/s $= 7.6$ Km/s

Nota! $v_{FUGA} = 11$ Km/s

$\rightsquigarrow$ questa traiettoria non è possibile $\rightsquigarrow$ si usano orbite intermedie

PROBLEMA (Esercizio per casa)



Satellite con $\vec{v} \perp \vec{r}$ (vertice) a distanza $4R$ dalla Terra con R = raggio terra

Trovare:

1) v_0 e E_m per orbita circ.

2) v_1 e E_m per orbita per $2R$ dalla parte opposta (vedi figura)

3) se $v_i = 2v_1$ orbita aperta o chiusa?

1) $$m\frac{v_0^2}{4R} = \frac{GMm}{(4R)^2} \Rightarrow v_0 = \left[\frac{GM}{4R}\right]^{1/2}$$

$$E_m = \frac{1}{2}E_p = -\frac{GMm}{4R}$$

$\Rightarrow$ Ridimostrare in modo esplicito da E_K e E_p, per allenamento

2) Sfrutto proprietà dei vertici dell'orbita e L = cost, E_m = cost:

$$4Rv_1 = 2Rv_2 \Rightarrow v_2 = 2v_1$$

$$\frac{1}{2}mv_1^2 - \frac{GmM}{4R} = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{GmM}{2R}$$

$\longrightarrow$

$$v_1^2 - v_2^2 = \frac{GM}{2R} - \frac{GM}{R} < 0$$

d'altronde $v_2 > v_1$ poiché è più vicino alla terra.

$$v_2^2 - v_1^2 = \frac{GM}{2R}$$

$$4v_1^2 - v_1^2 = \frac{GM}{2R} \Longrightarrow v_1 = \left[\frac{GM}{6R}\right]^{1/2}$$

$E_m = E_k + E_p$ per sostituzione

oppure:

$$E_m = -\frac{GmM}{2a} \qquad a = 3R$$

$$= -\frac{GmM}{6R}$$ è minore del caso prec. (orbita più piccola)

3) per $v_1' = 2v_1 = 2\left[\frac{GM}{6R}\right]^{1/2}$

$$E_m = \frac{1}{2}m\,\frac{4GM}{6R} - \frac{GmM}{4R} =$$

$$= \frac{GMm}{R}\left[\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right] > 0$$ orbita aperta