

(1)

SISTEMI DI PUNTI MATERIALI

- * Come punti "liberi" (sistemi planetari)
- * Come punti "spidamente" vincolati (corpi rigidi)

Proprietà dinamiche descritte dalle leggi della dinamica per ciascun punto, ma alcune proprietà di insieme possono essere descritte da grandezze di insieme

→ Semplificazioni delle descrizioni

Definito un sistema di punti la forza agente su ciascun punto, che ne determina il moto, può essere scritta come:

$$\vec{F}_i = \vec{F}_i^{(e)} + \vec{F}_i^{(i)}$$

$\vec{F}_i^{(e)}$ = forze esterne al sistema agenti sul punto (ad esempio $\vec{P}$)

$\vec{F}_i^{(i)}$ = forze interne
(ad esempio gravitazione dovuta agli altri punti, tensioni di fili, molle, ...)

La classificazione è un po' arbitraria e dipende da cosa si vuol considerare parte del sistema

Es. - $\vec{P}$ della mela dovuta alla Terra

- Attrazione gravitazionale del sistema Terra-mela

(2)

In ogni caso, una volta definito il sistema, valgono le seguenti osservazioni:

- Per ogni coppia di punti:

$$\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji} \quad \text{Azione - Reazione}$$

- Per ogni punto:

$$\vec{F}_i^{(e)} = -\vec{F}_e^{(i)} \rightarrow \text{Reazione alle forze esterne}$$

La forza di reazione alle forze esterne agente sull'esterno del sistema: **NON È RILEVANTE PER DETERMINARE IL MOTO DEI PUNTI DEL SISTEMA**

NOTA: Stiamo considerando forze reali in un sistema inertiale, altrimenti $\vec{F}$ di reazione potrebbe non esserci.

→ La risultante delle forze interne è nulla

$$\vec{R}^{(i)} = \sum_{i \neq j} \vec{F}_{ij} = \vec{F}_{12} + \vec{F}_{13} + \dots + \vec{F}_{21} + \vec{F}_{23} + \dots + \vec{F}_{31} + \vec{F}_{32} + \dots$$

Non è nulla la risultante su ciascun punto, ~~ma~~ in generale la risultante delle $\vec{F}^{(e)}$,
 Ma $\vec{R}^{(i)} = 0 \rightarrow$ Esiste una proprietà globale

(3)

→ Il moto del sistema (di ogni punto ~~del sistema~~) può essere descritto come
 + moto di un punto materiale (detto centro di massa) ^{RISULTANTE} sotto l'azione delle forze esterne
 + moto relativo dei punti rispetto al centro di massa.

Supponiamo di descrivere il moto in un sistema inerziale. Per ciascun punto vale il II principio della dinamica:

$$\vec{F}_i^{(e)} + \vec{F}_i^{(i)} = m_i \vec{a}_i$$

Per la forza complessiva si ha:

$$\vec{R}^{(e)} + \vec{R}^{(i)} = \sum_i m_i \vec{a}_i$$

e poiché $\vec{R}^{(i)} = 0$:

$$\vec{R}^{(e)} = \sum_i m_i \vec{a}_i$$

Possiamo definire un punto ^(materiale) equivalente tramite la relazione (Punto materiale del sistema)

$$\vec{R}^{(e)} \stackrel{\text{def}}{=} M \vec{a}_{CM}$$

(4)

Cioè definire un punto (astrazione matematica non un punto materiale reale) che per il quale vale la II legge della dinamica come se tutta massa $M = \sum_i m_i$ fosse concentrata in quel punto e tutte le forze esterne $\vec{R}^{(e)} = \sum_i \vec{F}_i^{(e)}$ agissero in quel punto.

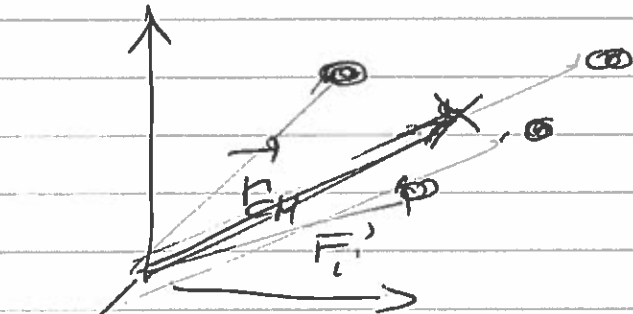
Secondo q.s. definizione ~~data~~, abbiamo identificato

$$M \vec{a}_{CM} = \sum_i m_i \vec{a}_i$$

Cioè:

$$M \frac{d^2 \vec{r}_{CM}}{dt^2} = \sum_i m_i \frac{d^2 \vec{r}_i}{dt^2}$$

Dove $\vec{r}_{CM}$ individua la posizione del punto materiale che stiamo definendo e $\vec{r}_i$ il raggio vettore che individua i punti



Perché le masse sono indep. dal tempo:

$$\frac{d^2}{dt^2} (M \vec{r}_{CM}) = \frac{d^2}{dt^2} \left(\sum_i m_i \vec{r}_i \right)$$

(5)

Dunque la condizione posta sul moto del
corpo di massa, porta alla definizione
della sua posizione tramite:

$$M \vec{r}_{CM} = \sum_i m_i \vec{r}_i$$

e cioè:

$$\vec{r}_{CM} = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{\sum_i m_i} \quad \boxed{\text{def. del centro di massa}}$$

In altri termini: Esiste un punto materiale
in un sistema di punti materiali, la cui
posizione è:

— definita dalla media delle posizioni
pesate con massa

che si muove sotto l'azione delle forze esterne
come se tutte le forze agissero in quel punto
o) tutte le masse fosse in quel punto

Questa proprietà è nota come **TEOREMA DEL CENTRO
DI MASSA** - e il punto così definito è
detto **CENTRO DI MASSA**

→ IN ALTRI TESTI

- TEOREMA DEL MOTO DEL CENTRO DI MASSA

oppure - SECONDO TEOREMA DEL CENTRO DI MASSA

(6)

Sintesi
 In ~~altre~~ ~~termini~~, il CENTRO DI MASSA è un punto materiale di un sistema (definito in termini matematici, cui non corrisponde un punto materiale fisico) t.c.

$$\vec{R}(c) = M \vec{a}_{CM}$$

→ L'accelerazione del CM è la media (pesata sulle masse) delle accelerazioni dei singoli punti -
 Il CM si muove di moto accelerato se $\vec{R}(c) \neq 0$, altrimenti il CM si muove di moto rettilineo uniforme rispetto ad un riferimento

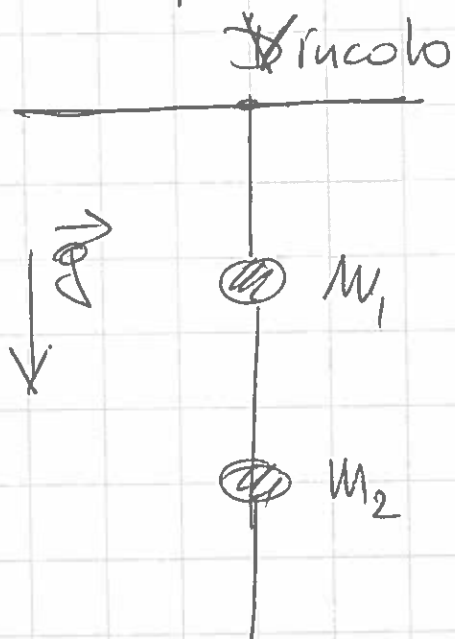
NOTA: Qs risultati giustificano a posteriori la scelta di descrivere il moto di corpi estesi (quando si trascurano i moti interni) in termini di punto materiale. Il CM corrisponde al punto materiale ideale di un corpo esteso. Abbiamo ~~fatto~~ ~~questo~~ usato questa proprietà in tutti i problemi con corpi estesi di meccanica del punto visto fino ad ora -

→ Esempio: <https://youtu.be/iVG8pB1t3c>

Possiamo scomporre la def. del CM in coordinate cartesiane:

$$x_{CM} = \frac{\sum m_i x_i}{M}, \quad y_{CM} = \dots \text{ ecc.}$$

Esempio: USO DEL Teorema del moto del CM



Sistema: m_1, m_2, m_f —
 due scimmie m_1 e m_2
 si muovono su fune
 ideale $m_f = 0$

$$\vec{F}^{(e)} = \vec{R}_y - m_1 \vec{g} - m_2 \vec{g}$$

$\vec{F}^{(I)}$ attrito scimmie/fune
 tensione fune

Hp. $\vec{a}_1 = \frac{1}{2} \vec{g}$
 $\vec{a}_2 = \text{cost}$

Scimmia uno cade lungo
 la fune con $\vec{a}_1$ cost
 Scimmia due si muove
 a $\vec{v}_2 = \text{cost}$, $\vec{a}_2 = 0$

— Trovare $\vec{R}_y$ e tensione della fune
 nel vincolo —

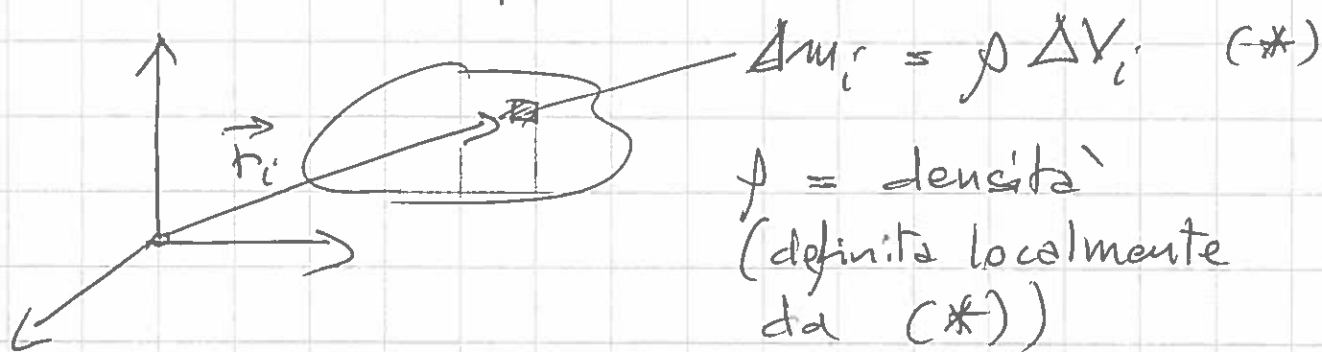
• Poiché il vincolo è fisso $\vec{R}_y = -\vec{T}$ in V
 • Inoltre: $\vec{F}^{(e)} = M \vec{a}_{CM}$ (T. del CM)

$$\vec{R}_y - m_1 \vec{g} - m_2 \vec{g} = (m_1 + m_2) \frac{\vec{a}_1 m_1 + \vec{a}_2 m_2}{m_1 + m_2}$$

$$\vec{R}_y - M \vec{g} = m_1 \vec{a}_1 \rightarrow \text{da cui } \vec{R}_y$$

CALCOLO DEL CM Per sistemi di punti continui

(8)



$$\vec{r}_{CM} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N \Delta m_i \vec{r}_i \quad \text{con} \quad \sum_{i=1}^N \Delta m_i = M$$

Al limite continuo $\Delta m_i \rightarrow 0$

$$N \rightarrow \infty$$

$$M = \lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ \Delta m_i \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^N \Delta m_i = \int_M dm$$

la massa si mantiene finita

$$\vec{r}_{CM} = \frac{1}{M} \lim_{\Delta m_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^{\infty} \Delta m_i \vec{r}_i \equiv \frac{1}{M} \int_M dm \vec{r}$$

Riconando alla definizione di densità (volumica)

$$\vec{r}_{CM} = \frac{1}{M} \int_V \rho(\vec{r}) \vec{r} dV$$

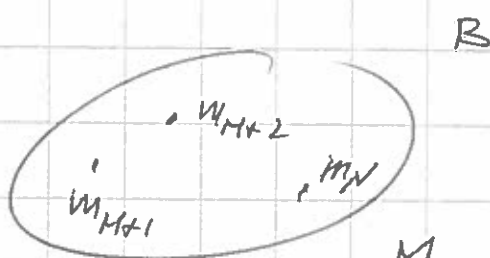
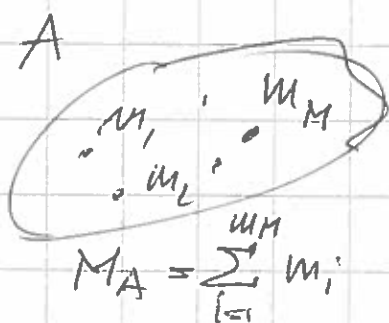
metto omogeneo

→ e la densità è costante $\vec{r}_{CM}$
coincide con il centro geometrico
del sistema

$$\vec{r}_{CM} = \frac{1}{M} \rho \int_V \vec{r} dV = \frac{1}{V} \int_V \vec{r} dV \quad \leftarrow \text{dip. solo dalla geom.}$$

Vale una proprietà distributiva per il CM
utile per il calcolo del centro di massa in
situazioni complesse:

il CM di un sistema di punti coincide
con il CM ottenuto combinando i CM di
sottoinsiemi di punti



$$M_B = \sum_{i=M+1}^N m_i$$

DW per esercizio che

$$\vec{r}_{CM}^{AB} = \frac{\sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i}{M}$$

$$= \frac{M_A \vec{r}_{CM}^A + M_B \vec{r}_{CM}^B}{M_A + M_B}$$

Esempio: Calcolo del CM di sfera cava

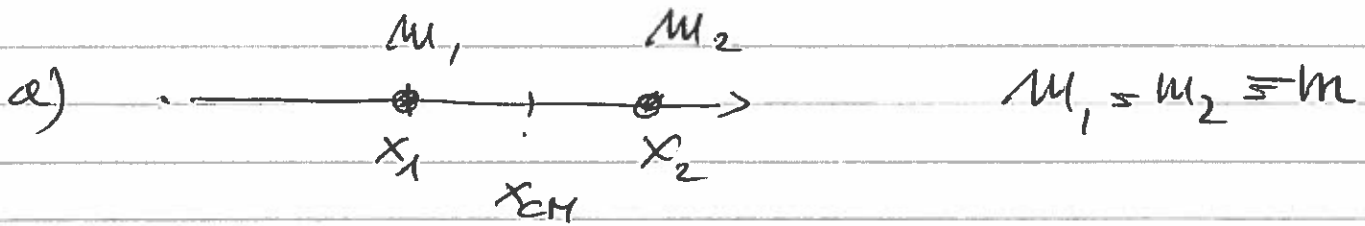


→ calcolo del CM delle sfere
piene

→ calcolo del CM del buco (come
se fosse pieno)

→ sottrazione

Esempi espliciti (monodim.) semplici

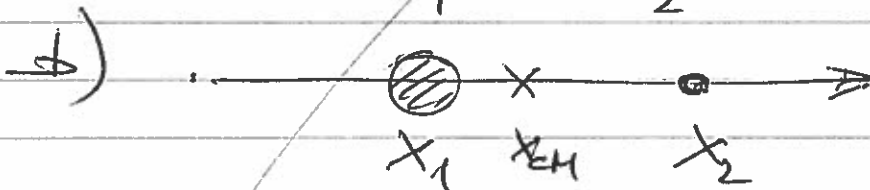


$$x_{cm} = \frac{x_1 m_1 + x_2 m_2}{m_1 + m_2} = \frac{m(x_1 + x_2)}{2m} = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

Punto medio

$$= x_1 + \frac{x_2 - x_1}{2}$$

$$m_1 = 2m_2 = m$$



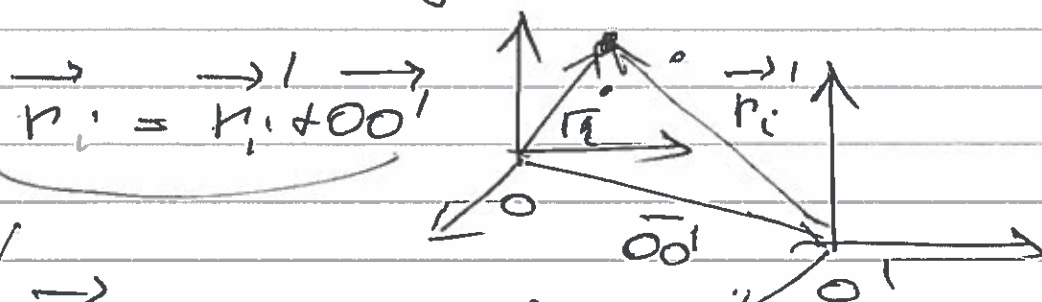
$$x_{cm} = \frac{x_1 m_1 + x_2 m_2}{m_1 + m_2} = \frac{x_1 2m + x_2 m}{3m} = \frac{2x_1 + x_2}{3}$$

$$= x_1 + \frac{1}{3}(x_2 - x_1)$$

NOTA: La posizione assoluta del CM dip. dal sistema di riferimento

La posizione relativa del CM rispetto ai punti (o la posizione dei punti rispetto al CM) non dip. dal sistema di rif - ma dalla dist. relativa tra i punti

In termini generali:



$$\vec{r}_i = \vec{r}_i' + \vec{OO}'$$

$$\vec{r}_{CM} = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{M}$$

$$= \frac{\sum_i m_i (\vec{r}_i' + \vec{OO}')}{M} = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i'}{M} + \vec{OO}'$$

$$\vec{r}_{CM} = \vec{r}_{CM}' + \vec{OO}'$$

Stessa relazione tra $\vec{r}_{CM}$ e $\vec{r}_{CM}'$ e i singoli punti

Cioè ~~che~~ la posizione del CM relativa ai punti non dipende dal sist. inerziale

Calcoliamo le velocità del CM:

$$\vec{v}_{CM} = \frac{d\vec{r}_{CM}}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{M} \right) =$$

$$= \frac{\sum_i m_i \vec{v}_i}{M}$$

$\Rightarrow$ velocità media pesata delle masse

$$\Rightarrow \boxed{M \vec{v}_{CM} = \sum_i m_i \vec{v}_i}$$

"primo teorema del CM"

(12)

Si può definire P.T.A. di moto totale:

$$\vec{P} = \sum m_i \vec{v}_i = M \vec{v}_{CM}$$

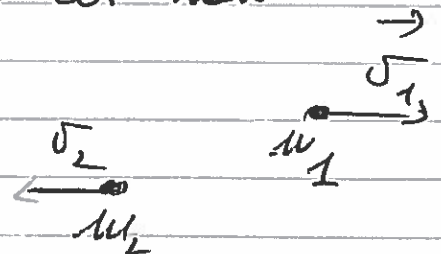
(Vettore)
La somma della qta' di moto dei singoli punti è pari alla mome totale per la velocità del CM — prop. notevole del CM
(DETA ANCHE: PRIMO TEOREMA DEL CENTRO DI MASSA)

Se $\vec{F}(e) = 0 \Rightarrow \vec{v}_{CM} = \text{cost}$ e la qta' di moto totale è costante $\rightarrow$ conservata

$$\vec{P} = \sum \vec{p}_i = \text{costante}$$

Consideriamo per semplicità il caso di un sistema di due punti su cui non agiscono $\vec{F}(e)$, allora:

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \frac{d(\vec{p}_1 + \vec{p}_2)}{dt} = 0$$



Ne consegue $\frac{d\vec{p}_1}{dt} = -\frac{d\vec{p}_2}{dt}$ e per la II legge delle dinamiche $\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$

Perché abbiamo supposto che le forze esterne sono nulle, la relazione trovata significa che le forze agenti tra il punto 1 e 2 sono mutualmente associate

In altri termini, h'è iterato il principio di azione e reazione (in forma debole)

Cioè: l'assunzione che le $F^{(e)}$ hanno mutuamente uguali e opposte
 $\Rightarrow$ Teorema del CM

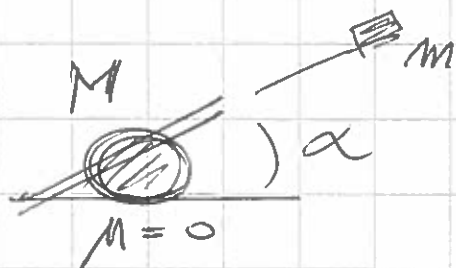
L'ob. che $\vec{P} = \text{cost}$ se $F^{(e)} = 0$
(che è anche evidenza speriment.)
implica l'esistenza di forze interne mutuamente uguali e contrarie

Questa relazione $\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$ è più debole del principio di azione e reazione, poiché stabilisce una relazione vettoriale tra $\vec{F}_1$ e $\vec{F}_2$ ma non richiede che le due forze giacciono sulla stessa retta (come stabilito dal principio di azione-reazione).

NOTA: Mazzoldi usa $\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = 0$ come condizione per dare una definizione dinamica delle masse:
 $m_1 = m_2 \cdot a_2 / a_1$

Ma è una porcheria - La definizione dinamica di massa è tramite il rapporto di accelerazioni, sotto l'azione di una medesima forza

Esempio Proietto sparato dal cannone



- caratteristiche del moto del cannone ?
- moto del CM ?

① Il sistema non è isolato $R^{(e)} \neq 0$

- Forza peso su M e m
- Forza normale su M

→ Cannone vincolato a muoversi lungo il piano - Componente delle forze ~~lungo~~ esterne lungo il piano è nulla $R_x^{(e)} = 0$

→ conservazione di $\vec{P}_x$

Dopo il colpo il proietto si muove con v_{0x} costante

Prima del colpo $\vec{P}_x = 0$. Dunque dopo il colpo $Mv_x + mv_{0x} = 0$

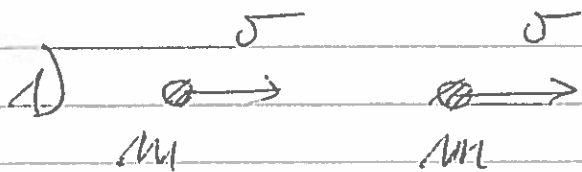
Il cannone rincula con moto rettilineo uniforme lungo x $v_x = -m/M v_{0x}$

Lungo l'asse verticale

$$M \ddot{a}_{CM,z} = R_z^{(e)}$$

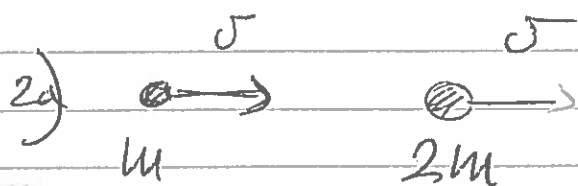
- R_z è una forza impulsiva al momento dello sparo + Ne Pero

Esempi

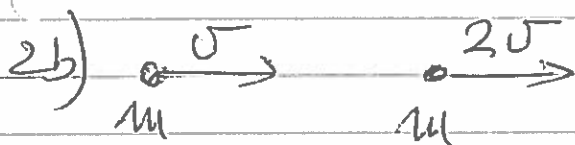


$$\vec{v}_{CM} = \frac{m\vec{v} + m\vec{v}}{2m} = \vec{v}$$

velocità comune dei
punti



$$\vec{v}_{CM} = \frac{m\vec{v} + 2m\vec{v}}{3m} = \vec{v}$$



$$\vec{v}_{CM} = \frac{m\vec{v} + m2\vec{v}}{2m} = \frac{3}{2}\vec{v}$$

In q.s. esempi $\vec{v}_{CM} = \text{cost} \Rightarrow R^{(e)} = 0$, quindi
CM è un sistema inerziale

Scegliendo $\vec{v}_{CM}$ come origine del sistema
di riferimento, nei casi 1) e 2a) i
punti hanno lo stesso rispetto al CM.
(Nel caso 2b) composizione di Galileo)

$$\vec{v}_1' = \vec{v} - \frac{3}{2}\vec{v} = -\frac{1}{2}\vec{v}$$

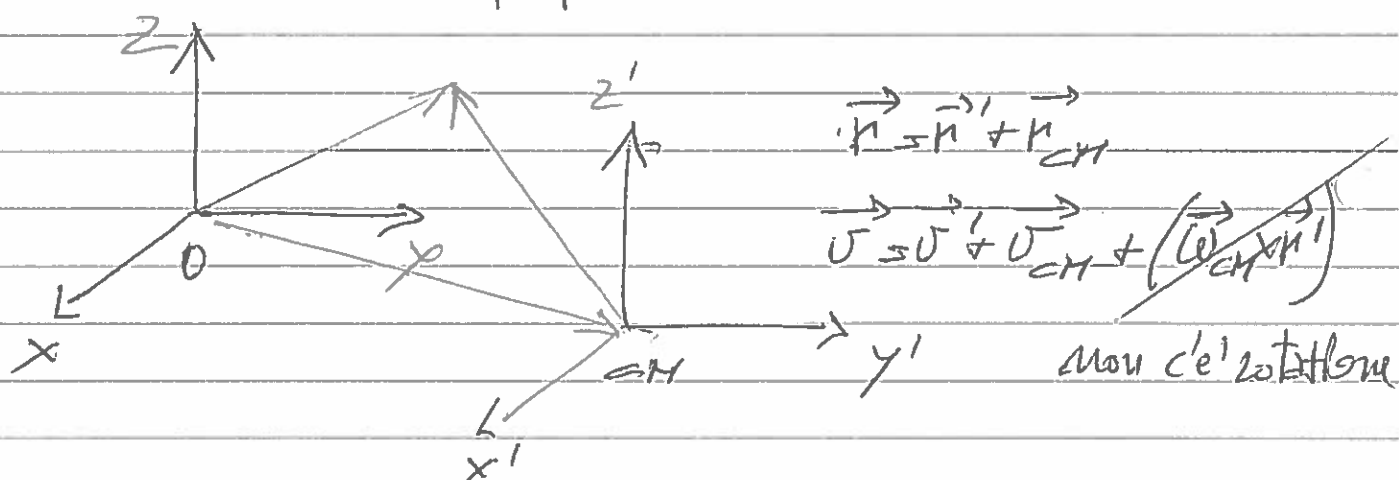
$$\vec{v}_2' = 2\vec{v} - \frac{3}{2}\vec{v} = \frac{1}{2}\vec{v}$$

I due punti si allontanano con la stessa
velocità (o q.tà di moto nel caso generico
con $m_1 \neq m_2$) scegliendo $\vec{v}_{CM}$

→ Se sono in moto relativo con $\vec{v}$ non cost
allora $F^{(i)} \neq 0$ ma i punti si allontanano o
avvicinano al CM, che resta fisso. Se $\vec{v}$ è
cost con $\vec{a} \neq 0$

SISTEMA DI RIFERIMENTO DEL CENTRO DI MASSA

- a) Origine nel CM
- b) Assi fissi (non rotano rispetto a S.I.)
- c) Non e' in generale un sistema inerziale poiche' $F(e)$ puo' essere diverso da zero, ma ha proprieta' notevoli



Proprieta' 1) $\vec{P}_{CM} = 0$ quantita' di moto totale nel CM e' nulla

In fatti $\vec{P}_{CM} = M \vec{v}_{CM}$ ma $\vec{v}_{CM} = 0$ rispetto a se

2) E_K nel sist. del CM:

$$E_K = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \sum_i \frac{1}{2} m_i (\vec{v}_i' + \vec{v}_{CM})^2$$

$$= \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i'^2 + \frac{1}{2} (\sum_i m_i) v_{CM}^2 + (\sum_i m_i \vec{v}_i') \cdot \vec{v}_{CM}$$

$$\boxed{E_K = E_K' + \frac{1}{2} M v_{CM}^2}$$

En. cinetica nel sist. CM = En. cinetica relativa al CM + en. cinetica del CM

$\vec{P}_{CM} = 0$

Lavoro e teorema dell'energia cinetica

Per ogni punto i :

$$dW_i = \vec{F}_i \cdot d\vec{r}_i = \left(\vec{F}_i^{(e)} + \vec{F}_i^{(i)} \right) \cdot d\vec{r}_i = dW_i^{(e)} + dW_i^{(i)}$$

Sommando su tutti i punti:

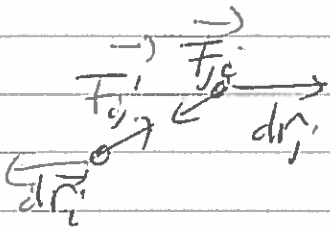
$$dW = \sum_i dW_i^{(e)} + \sum_i dW_i^{(i)}$$

Focalizziamo l'attenzione sul lavoro delle forze interne

$$dW^{(i)} = \sum_i dW_i^{(i)} = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N (j \neq i) \vec{F}_{ij} \cdot d\vec{r}_i$$

Riscriviamo la somma in modo da rendere espliciti i termini con mutua interazione

$$dW^{(i)} = \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} \left(\vec{F}_{ij} \cdot d\vec{r}_i + \vec{F}_{ji} \cdot d\vec{r}_j \right)$$



$$\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji}$$

$d\vec{r}_i \neq d\vec{r}_j$ in generale

$$dW^{(i)} = \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} \vec{F}_{ij} \cdot (d\vec{r}_i - d\vec{r}_j)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} \vec{F}_{ij} \cdot d(\vec{r}_i - \vec{r}_j)$$



- * Lavoro delle forze interne è indipendente $\neq 0$
- * Dipende ~~solo~~ dalla variazione di posizione relativa tra i punti $d(\vec{r}_i - \vec{r}_j)$

→ invariante per cambio di sistema di rif. (trasf. di Galileo)

$$\begin{aligned}\vec{r}_i &= \vec{r}_i' + \vec{OO}' \\ \vec{r}_j &= \vec{r}_j' + \vec{OO}'\end{aligned} \Rightarrow d(\vec{r}_i - \vec{r}_j) = d(\vec{r}_i' - \vec{r}_j')$$

→ $dW^{(i)}$ è uguale in tutti i sistemi di riferimento inerziali

- * Se i punti hanno posizioni relative fisse (corpo rigido) $d(\vec{r}_i - \vec{r}_j) = 0 \forall i, j$ e il lavoro delle forze interne è nullo

→ TEOR. DELL'EN. CINETICA

Per ogni singola particella:

$$W_{i, AB} = \frac{1}{2} m_i v_{i, B}^2 - \frac{1}{2} m_i v_{i, A}^2 \quad \text{Forma integrale}$$

Sommando su tutte le particelle

$$\begin{aligned}W_{AB} &= \sum_i W_{i, BA} = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_{i, B}^2 - \sum_i \frac{1}{2} m_i v_{i, A}^2 \\ &= E_K(B) - E_K(A)\end{aligned}$$

Il lavoro $W_{AB} = W_{AB}^{(e)} + W_{AB}^{(i)}$;

$$W_{AB}^{(e)} + W_{AB}^{(i)} = \Delta E_k \leftarrow \text{teorema dell'eu. cinetica}$$

* L'energia cinetica, e la sua variazione, in genere dipendono dall'osservatore (v_i^2 dipendono dall'osservatore), ma il teorema è valido indipendentemente dall'osservatore — e consegue dalla validità dell'eu. cinetica per le singole particelle

* Se $W^{(e)} = 0$ [sistema isolato]

$$\Delta E_k = W^{(i)} \leftarrow \text{indipendente dall'osservatore inerte poiché } W^{(i)} \text{ è invariante di Galileo}$$

— 0

Nota: se $R^{(e)} = 0$ $v_{CM} = \text{cost}$

$$\Delta E_k = \Delta E_k' \quad (\text{dal T. di König})$$

Il lavoro interno non cambia il moto del CM ma può cambiare l'energia cinetica totale (il termine relativo al CM)

Esempio: $\underbrace{\text{---} \mu \text{---} \text{---}}_{\mu=0}$ Oscillazioni con CM fisso

Se tutte le forze sono conservative

$$W^{(e)} = -\Delta E_p^{(e)}$$

$$W^{(i)} = -\Delta E_p^{(i)}$$

Teor. dell'energia cinetica: $\Delta E_k = -\Delta E_p^{(e)} - \Delta E_p^{(i)}$

$$\Rightarrow \Delta(E_k + E_p) = 0$$

$$\Delta E_m = 0$$

$E_k + E_p = \text{costante}$ cons. dell'energia meccanica

In presenza di forze non conservative, di generalità il risultato per il pto materiale

$$W_{n.c.} = \Delta E_m$$

ottenuta dalla somma dei singoli pti materiali

$$W_{n.c.} = \Delta E_k + \Delta E_p$$

Note:

- ① Le relazioni di lavoro e en. cin. e pot dipendono dalle proprietà per i singoli punti
- ② Le forze esterne e interne hanno ruoli differenti — Il lavoro delle forze interne non può determinare uno spostamento del CM.