OSCILLATORE ARMONICO SEMPLICE (O.A.S.)

(Mazzoldi, Nigro, Voci 9.1 ÷ 9.3, 9.7 ÷ 9.9)

* MOTO ARMONICO SEMPLICE: moto notevole del punto materiale attorno alle posizioni di equilibrio stabile per una generica energia potenziale.

$$E_p(x) \simeq \frac{1}{2} \underbrace{\left.\frac{d^2E_p}{dx^2}\right|_{x=x_0}}_{\text{"costante elastica efficace" } k} x^2$$

Equazione del moto dell'oscillatore armonico semplice:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0 \qquad \omega_0^2 = \frac{k}{m}$$

Soluzione trovata per sostituzione

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$$

con A e φ costanti del moto definite dalle "condizioni iniziali" del moto

Fenomeni associati all'oscillatore molto più ampi – oscillazioni smorzate (es. pendolo reale)
oscillazioni forzate (es. altalena)

⟶ Mostrare esempi con pendolo

Utile affrontare la soluzione formale dell'equazione differenziale del moto per costruire degli elementi di calcolo applicabili al caso dell'oscillatore smorzato e forzato

- Soluzione dell'equazione O. A. Semplice

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0$$

E' equazione lineare (somma di termini che contengono solo derivate di ordine n delle funzioni x, non ~~derivate~~ prodotti di derivate di ordini diversi) di 2° grado (fino a ordine 2) e omogenea (termine noto è nullo)

⟶ soluzione generale: combinazione lineare (sovrapposizione effetti) di due soluzioni indipendenti con due costanti di integrazione definite dalle condizioni iniziali del moto

Mostriamo che la combinazione lineare di ~~due~~ soluzioni è una soluzione.

Siano $x_1(t)$ e $x_2(t)$ soluzioni, cioè tali che:

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} + \omega_0^2 x_1 = 0 \quad ; \quad \frac{d^2x_2}{dt^2} + \omega_0^2 x_2 = 0$$

Allora $x(t) = a_1 x_1(t) + a_2 x_2(t)$ è soluzione, per la linearità della derivata. Infatti

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = \frac{d^2}{dt^2}(a_1x_1 + a_2x_2) + \omega_0^2(a_1x_1 + a_2x_2)$$

$$= a_1\underbrace{\left[\frac{d^2x_1}{dt^2} + \omega_0^2 x_1\right]}_{=0} + a_2\underbrace{\left[\frac{d^2x_2}{dt^2} + \omega_0 x_2\right]}_{=0} = 0$$

Dunque $x(t)$ può essere costruita come ~~somma~~ combinazione lineare di tutte le soluzioni indip.

Un'equazione di secondo grado ha due soluzioni indipendenti (da trovare). Le costanti a_1 e a_2 della combinazione sono determinate dalle condizioni iniziali del moto

*) METODO GENERALE PER LA SOLUZIONE DI EQ. DIFFERENZIALI LINEARI OMOGENEE:

- Poiché la derivata della funzione esponenziale è ancora una funzione esponenziale, si cercano soluzioni del tipo $x(t) = e^{\alpha t}$

- L'equazione differenziale si riduce ad una equazione algebrica di grado n per α

$$x(t) = e^{\alpha t} \quad ; \quad \frac{dx}{dt} = \alpha e^{\alpha t} \quad ; \quad \frac{d^2x}{dt^2} = \alpha^2 e^{\alpha t}$$

- Per l'O.A.S. si ottiene

$$\alpha^2 e^{\alpha t} + \omega_0 e^{\alpha t} = 0$$

che è soddisfatta per ogni tempo t se α soddisfa l'equazione algebrica

$$\alpha^2 + \omega_0^2 = 0$$

Qs. equazione ha soluzioni complesse $\alpha_{1,2} = \pm i\omega_0$ e si hanno le due soluzioni indipendenti

$$x_+(t) = e^{+i\omega_0 t}$$
$$x_-(t) = e^{-i\omega_0 t}$$

La soluzione generale è dunque

$$x(t) = A_+ e^{+i\omega_0 t} + A_- e^{-i\omega_0 t} \qquad (**)$$

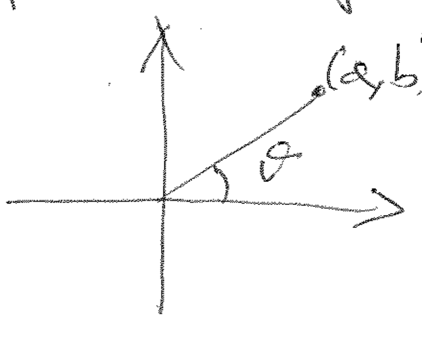
con la condizione che $x(t)$ <u>sia reale</u> a tutti i tempi t, poiché <u>rappresenta un'osservabile fisica</u>: la posizione del punto materiale

<u>Nota</u>: È un procedimento comune nell'analisi di fenomeni fisici risolvere il problema nel dominio complesso e imporre la condizione che la soluzione sia reale.

L'espressione $e^{\pm i\omega_0 t}$ può essere posta nella forma (formula di Eulero – richiede lo sviluppo di Taylor di funzioni di variabile complessa)

$$e^{\pm i\omega_0 t} = \cos(\omega_0 t) \pm i \sin \omega_0 t$$

Rappresentazione dei numeri complessi nel piano di Argand (richiamo)



$$a + ib = R(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)$$

$$\begin{cases} a = R\cos\vartheta \\ b = R\sin\vartheta \end{cases} \qquad R^2 = a^2 + b^2$$

Dunque la soluzione (**) può essere posta nella forma

$$x(t) = (A_+ + A_-)\cos\omega_0 t + i(A_+ - A_-)\sin\omega_0 t \quad (XX)$$

da cui seguono le condizioni per $x(t)$ reale:

$$\begin{cases} \mathrm{Im}(A_+ + A_-) = 0 \\ \mathrm{Re}(A_+ - A_-) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_+ = a + ib \\ A_- = a - ib \end{cases}$$

Sostituendo in (XX) si ha:

$$x(t) = 2a\cos\omega_0 t - 2b\sin\omega_0 t$$

Questa soluzione è equivalente a $x(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$ infatti, usando le proprietà delle funzioni trigonometriche

$$A\cos(\omega_0 t + \varphi) = A\cos\varphi\cos\omega_0 t - A\sin\varphi\sin\omega_0 t$$

Dunque le soluzioni coincidono per

$$\begin{cases} 2a = A\cos\varphi \\ 2b = A\sin\varphi \end{cases}$$

In conclusione $X(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$ è l'espressione più generale per la soluzione dell O.A.S. - La soluzione può anche essere posta nella forma
$x(t) = a'\cos\omega_0 t + b'\sin\omega_0 t$

Energia dell'oscillatore

Abbiamo già visto che per la forza elastica

$$E_M = E_k + E_p =$$

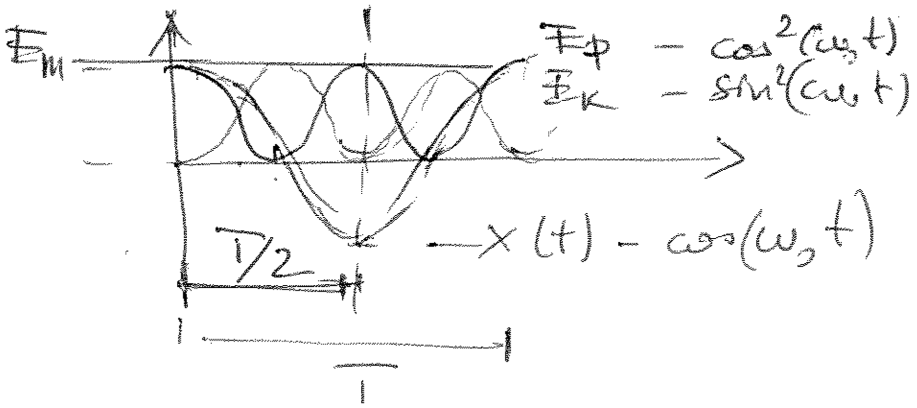
$$= \frac{1}{2} m \omega_0^2 A^2 \sin^2 \omega_0 t + \frac{1}{2} k A^2 \cos^2 \omega_0 t$$

$$= \frac{1}{2} k A^2 \left[\sin^2 \omega_0 t + \cos^2 \omega_0 t \right] =$$

$$= \frac{1}{2} k A^2$$

— costante
— dipende da A^2

E_k e E_p oscillano con frequenza doppia (periodo metà) di $x(t)$



E' utile, per analizzare poi l'oscillatore smorzato e forzato, valutare il valore medio di E_k e E_p su un periodo.

E' ragionevole attendersi che $\langle E_k \rangle = \langle E_p \rangle = \frac{E_M}{2}$, poiché E_k e E_p si alternano e la loro somma dà sempre E_M.

Calcolo della media in modo analitico

- Divido il periodo $T/2$ in N intervalli identici Δt t.c. $N \Delta t = T/2$

$$\langle E_p \rangle = \sum_{i=1}^{N} \frac{E_p(t_i)}{N} =$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \frac{E_p(t_i)\,\Delta t}{T/2}$$

Nel limite continuo $N \to \infty$, $\Delta t \to 0$ e $T/2 = N\,dt$, la somma diventa un integrale

$$\langle E_p \rangle = \frac{1}{T/2} \int_0^{T/2} E_p(t)\,dt$$

$\Rightarrow$ PROPRIETÀ GENERALE: La media di una funzione su un intervallo è l'integrale della funzione diviso per l'~~inter~~ ampiezza dell'intervallo

Calcolo esplicito per E_p:

$$\langle E_p \rangle = \frac{1}{T/2}\int_0^{T/2} \frac{1}{2}kA^2\cos(\omega_0 t)\, dt$$

$$= \frac{\omega_0}{\pi}\int_0^{\pi/\omega_0} \frac{1}{2}kA^2\cos(\omega_0 t)\, dt$$

$$= \frac{1}{2}kA^2 \left\{ \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi/\omega_0} \cos^2(\omega_0 t)\, \omega_0 dt \right\}$$

Poniamo $\omega_0 t = \alpha \implies \omega_0 dt = d\alpha$

$t = \pi/\omega_0 \longrightarrow \alpha = \pi$

$$\langle E_p \rangle = \frac{1}{2}kA^2 \left\{ \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos^2\alpha\, d\alpha \right\}$$

$$= E_m \left\{ \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos^2\alpha\, d\alpha \right\}$$

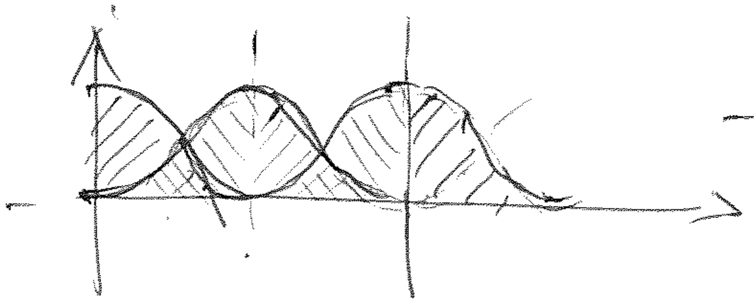
In modo analogo si trova

$$\langle E_k \rangle = E_m \left\{ \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin^2\alpha\, d\alpha \right\}$$

Su un periodo è

$$\int_0^{\pi} \cos^2\alpha \, d\alpha = \int_0^{\pi} \sin^2\alpha \, d\alpha$$

come evidente dalla figura



→ D'altronde $\sin^2\alpha$ e $\cos^2\alpha$ sono la stessa funzione sfasata di un semiperiodo

Dunque:

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos^2\alpha \, d\alpha = \frac{1}{2\pi}\left\{\int_0^{\pi}\cos^2\alpha \, d\alpha + \int_0^{\pi}\sin^2\alpha \, d\alpha\right\} =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha)\, d\alpha$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} d\alpha = \frac{1}{2\pi}\cdot\pi = \frac{1}{2}$$

In conclusione $\langle E_k \rangle = \dfrac{E_m}{2}$

$$\langle E_p \rangle = \frac{E_m}{2}$$

OSCILLATORE ARMONICO SMORZATO

Descrive la situazione del moto dell'oscillatore in presenza di attriti → energia meccanica non è costante, ma è dissipata dal lavoro delle forze di attrito

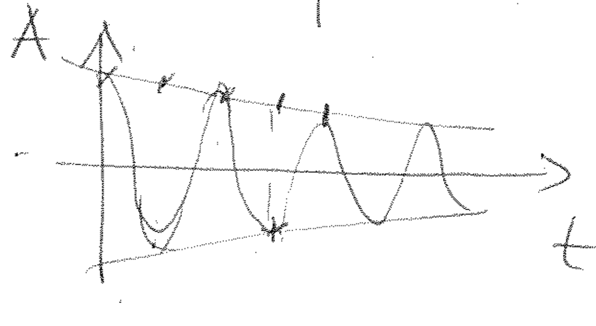
$$W_{n.c.} = \Delta E_m$$

Le forze agenti su oscillatori armonici "reali" sono ben rappresentate, nella maggior parte dei casi, da forze di natura viscosa

$$\vec{F}_A = -\eta \vec{v}$$

* Mazzoldi risolve il caso di forza di attrito radente - Non è istruttivo e non è un caso frequente - NON LO FACCIO

L'osservazione empirica (che potete fare con un pendolo, una molla ecc. → FATELO) mostra che l'ampiezza decresce ad ogni periodo come



$$\boxed{\frac{\Delta A}{A} = -\gamma \Delta t}$$

PER OSCILLATORE "POCO SMORZATO"

$$\frac{\Delta A}{A} = -\gamma \Delta t$$ — $\Delta t = T$ o $T/2$ ad esempio sono punti facili da misurare

Variazione relativa dell'ampiezza $\left(\frac{\Delta A}{A}\right)$ proporzionale all'intervallo di tempo

Poiché $E_m = \frac{1}{2} k A^2$, si ha che

$$\frac{\Delta E_m}{E_m} = -2\gamma \Delta t$$

Nel limite continuo

$$\frac{dE_m}{E_m} = -2\gamma dt$$

Ossia:

$$\frac{dE_m}{dt} = -2\gamma E_m$$

Potenza dissipata dall'oscillatore

$$= -4\gamma \langle E_K \rangle \quad = -2m\gamma \langle v^2 \rangle$$

Nota

La media su un periodo ha senso solo per oscillat[ori] poco smorzati. Altrimen[ti] non si individua un period[o]

Sappiamo che $E_K = \frac{1}{2} m v^2$
e che la potenza di una forza è $\vec{F} \cdot \vec{v}$ —
Poiché F è collineare a v (il problema è monodimensionale), la forza è proporzionale a v $\quad F = -2m\gamma v \quad \leftarrow$ VISCOSA

Il caso analizzato in modo empirico rappresenta solo una manifestazione del moto dell'oscillatore in presenza di forza viscosa. La fenomenologia è più ricca e dipende dall'intensità relativa di $F_{el.}$ e $F_{viscosa}$ - Analizziamo l'equazione del moto nel caso generale -

II legge Newton : $ma = -kx - \eta v$

Eq. diff. per il moto dell'O.A. Smorzato

$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0}$$

Avendo posto

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m}$$

$$\eta = 2m\gamma$$

(ci aspettiamo che γ rappresenti l'attenuazione dell'ampiezza, dunque)

Soluzione generale della forma $x(t) = e^{\alpha t}$

(è ancora un'equazione diff. lineare omogenea)

$$\alpha^2 e^{\alpha t} + 2\gamma\alpha e^{\alpha t} + \omega_0^2 e^{\alpha t} = 0$$

Ha soluzione per ogni tempo t, $\Rightarrow$

$$\alpha^2 + 2\gamma\alpha + \omega_0^2 = 0$$

Da cui

$$\alpha_{1,2} = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$$

Si distinguono tre casi corrispondenti situazioni differenti

1. $\gamma^2 - \omega_0^2 > 0$ Due soluzioni reali
   $\rightarrow$ O.A. SOVRASMORZATO

2. $\gamma^2 - \omega_0^2 = 0$ Due soluzioni reali degeneri
   $\rightarrow$ O.A. CRITICAMENTE SMORZATO

3. $\gamma^2 - \omega_0^2 < 0$ Due soluzioni complesse coniugate
   $\rightarrow$ O.A. SOTTOSMORZATO

3. OSCILLATORE SOTTOSMORZATO

$$\gamma^2 - \omega_0^2 < 0$$

Poniamo $\omega^2 = \omega_0^2 - \gamma^2 > 0$ e troviamo le due soluzioni coniugate complesse:

$$\alpha_{1,2} = -\gamma \pm i\omega \qquad (\omega < \omega_0)$$

Nel limite $\gamma \to 0$ (oscillatore libero), si trova $\omega = \omega_0$ e le medesime soluzioni trovate per O.A.S.

Nel caso generale, due soluzioni indip.

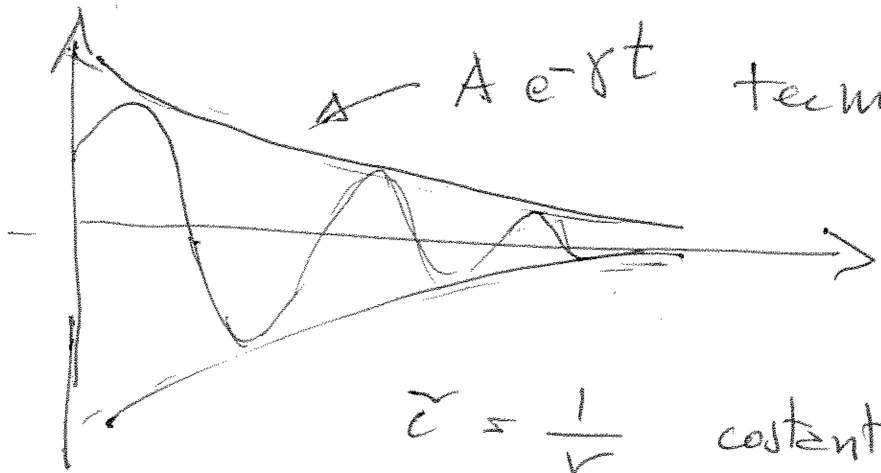
$$x_+(t) = e^{-\gamma t} e^{i\omega t}$$
$$x_-(t) = e^{-\gamma t} e^{-i\omega t}$$

Soluzione generale:

$$X(t) = e^{-\gamma t}\left[A_+ e^{i\omega t} + A_- e^{-i\omega t}\right]$$

solo soluzioni reali; ecc.

$$= A e^{-\gamma t} \cos(\omega_0 t + \varphi)$$



$A e^{-\gamma t}$ termine di smorzamento

$\tau = \dfrac{1}{\gamma}$ costante di tempo di smorzamento

Energia dell'oscillatore smorzato

Discusso in aula in modo molto sommario.

Abbiamo visto che $\Delta E_m = W_{nc}$ dissipata dall'attrito viscoso

$$E_m = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}mv^2$$

$$\frac{dE_m}{dt} = kx\frac{dx}{dt} + mv\frac{dv}{dt} = v(ma+kx) = \underbrace{(-\eta v)\, v}_{F_A v}$$

Espressioni $E_m = E_k + E_p$, devo calcolare x e v:

$$x = Ae^{-\gamma t}\cos(\omega t + \varphi)$$

$$v = -Ae^{-\gamma t}\left[\underbrace{\omega \sin(\omega t + \varphi) + \gamma \cos(\omega t + \varphi)}\right]$$

Può essere posto nella forma

$$B \sin(\omega t + \varphi + \Delta\varphi) \qquad \Delta\varphi = \text{sfasamento}$$

con
$$B\cos\Delta\varphi = \omega$$
$$B\sin\Delta\varphi = \gamma$$

La velocità è sfasata rispetto al caso dell O.A.S. di un termine $\Delta\varphi$ con $\mathrm{tg}\,\Delta\varphi = \gamma/\omega$

Cioè $x(t)$ e $v(t)$ non sono sfasate di $\pi/2$, ma un po' di più.

Nel limite $\gamma \to 0$ (O.A.S.) $\mathrm{tg}\,\Delta\varphi \to 0$

$$\Delta\varphi = 0$$

Espressioni per E_k, E_p e E_m:

$$E_p = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2 e^{-2\gamma t}\cos^2(\omega t+\varphi)$$

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mA^2 e^{-2\gamma t} B^2 \sin^2(\omega t+\varphi+\Delta\varphi)$$

$$B^2 = B^2(\cos^2\Delta\varphi + \sin^2\Delta\varphi) =$$
$$= \omega^2+\gamma^2 = \omega_0^2$$

$$E_k = \frac{1}{2}m\omega_0^2 A^2 e^{-2\gamma t}\sin^2(\omega t+\varphi+\Delta\varphi)$$
$$= \frac{1}{2}kA^2 e^{-2\gamma t}\sin^2(\omega t+\varphi+\Delta\varphi)$$

$\Longrightarrow$ SE LO SMORZAMENTO È PICCOLO $e^{\gamma t} \simeq cost$ SU UN PERIODO E HA SENSO CALCOLARE E_p e E_k medie sul PERIODO

$\langle E_p\rangle = \frac{1}{2}$ e $\langle E_k\rangle$ diminuiscono con $e^{-2\gamma t}$

$$\langle E_m\rangle \simeq \langle E_m(0)\rangle e^{-2\gamma t}$$

= Il numero di oscillazioni che si realizzano dipende dalla relazione tra τ e T

$$\tau = \frac{1}{\gamma} \quad e \quad T = \frac{2\pi}{\omega_0} \quad \left(o\ T_{eff} = \frac{2\pi}{\omega}\right)$$

Quando $\tau < T$, non c'è spazio perché si sviluppi un'oscillazione. Per $\gamma = \omega_0$ le soluzioni cambiano

2. OSCILLATORE CRITICAMENTE SMORZATO

$\gamma = \omega_0 \longrightarrow$ due soluzioni reali degeneri

$\alpha_{1,2} = -\gamma \qquad \left[\tau = \frac{1}{\omega_0} = \frac{T}{2\pi} \right]$

Le due soluzioni indipendenti sono

$$x_1(t) = e^{-\gamma t}$$
$$x_2(t) = t e^{-\gamma t}$$

[si verifica per sostituzione]

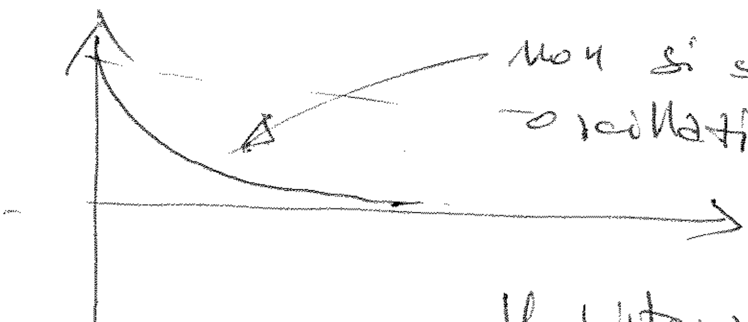
Soluzioni generale:

$$x(t) = (A + Bt) e^{-\gamma t}$$

A e B sono definiti dalle condizioni iniziali. Se, ad esempio, $x(0) = x_0$ e $v(0) = 0$

$A = x_0 \qquad B = 0$

$$x(t) = A e^{-\gamma t}$$



non si sviluppa nessuna oscillazione -

Il sistema si smorza con

$$\tau = \frac{1}{\omega_0}$$

E' la condizione di smorzamento più rapido (vedi seguito)

1. OSCILLATORE SOVRASMORZATO

$$\gamma^2 - \omega_0^2 > 0$$

Due soluzioni reali indipendenti

$$\alpha_{1,2} = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$$

$$= -\gamma\left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{\omega_0^2}{\gamma^2}}\right) \begin{cases} -\gamma_2 \\ -\gamma_1 \end{cases}$$

* Per γ_1 e γ_2 valgono le seguenti relazioni:

$$\gamma_1 = \gamma\left(1 - \sqrt{1 - \frac{\omega_0^2}{\gamma^2}}\right) < \gamma\left(1 + \sqrt{1 - \frac{\omega_0^2}{\gamma^2}}\right) = \gamma_2$$

4) ~~Per~~

* ~~Due~~ Soluzione generale:

$$\boxed{\begin{aligned} x(t) &= Ae^{-\gamma_1 t} + Be^{-\gamma_2 t} \\ &= Ae^{-t/\tau_1} + Be^{-t/\tau_2} \end{aligned}} \qquad \tau_i = \frac{1}{\gamma_i}$$

* Non ci sono termini oscillanti
* Poiché $\gamma_1 < \gamma_2$, per tempi lunghi il secondo termine svanisce più rapidamente del primo. Dunque $\tau_1 = \frac{1}{\gamma_1}$ è la costante di tempo che controlla lo smorzamento

1) $\gamma \gg \omega_0$

$$\gamma_1 = \gamma\left(1 - \sqrt{1 - \frac{\omega_0^2}{\gamma^2}}\right) \simeq 0$$

$$\gamma_2 = \gamma\left(1 + \sqrt{1 - \frac{\omega_0^2}{\gamma^2}}\right) \simeq 2\gamma$$

- Lo smorzamento è molto lento:

$\tau_1 = \frac{1}{\gamma_1} \longrightarrow \infty$ in questo limite

2) $\gamma \gtrsim \omega_0$

$$\gamma_2 \gtrsim \gamma_1 \gtrsim \gamma$$

Lo smorzamento tende allo smorzamento critico per $\gamma \to \omega_0$

Lo smorzamento critico è il più rapido smorzamento possibile - ~~Il~~ il più rapido recupero della condizione di equilibrio

$\longrightarrow$ Ammortizzatori di auto (o sistemi simili) sono tipicamente dimensionati per essere vicini allo smorzamento critico (evitare oscillazioni, tornare nel modo più rapido alla condizione di equilibrio)