

Per forze CONSERVATIVE esiste funzione SCALARE del posto detta ENERGIA POTENZIALE $E_p = E_p(\vec{r})$

• Forma esplicita di E_p dip. da $\vec{r}$ e definita tramite

$$W_{AB} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{s} = -E_p(B) + E_p(A)$$

• Definizione a meno di una costante che può essere fissata in un punto di riferimento

In modo reciproco $\vec{F}$ è univocamente determinata dalle forme di $E_p = E_p(\vec{r})$

• Caso 1D: $\vec{F} = F_x \hat{i}$ ($F_y = F_z = 0$)

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{s} = F_x dx = -dE_p$$

→ Si può scrivere:

$$F_x = - \frac{dE_p}{dx}$$

Derivata di E_p rispetto a x , ossia rapporto della variazione infinitesimale di E_p e di x

→ E_p deve essere derivabile

Abbiamo incontrato q.s. esempi :

$$E_p = m g z + \text{cost} \quad \text{forza peso}$$

$$E_p = \frac{1}{2} k x^2 + \text{cost} \quad \text{forza elastica}$$

Verifichiamo la relazione con F :

$$F_z = - \frac{dE_p}{dz} = - m g$$

$$F_x = - \frac{dE_p}{dx} = - k x$$

- Entrambe q.s. forze (monodimensionali) sono funzioni solo del posto ($\vec{F} = \vec{F}(x)$) e non dello stato di moto

- F attrito radente e viscoso invece dipendono dallo stato di moto (verso o velocità) e non sono conservative

Nota: 1) Se $\vec{F}$ dipende da stato di moto $\rightarrow$ non conservativa

2) $\vec{F}$ funzione del posto NON è condizione sufficiente affinché forza sia conservativa

Anche e gli esempi avrebbero potuto farcelo sospettare

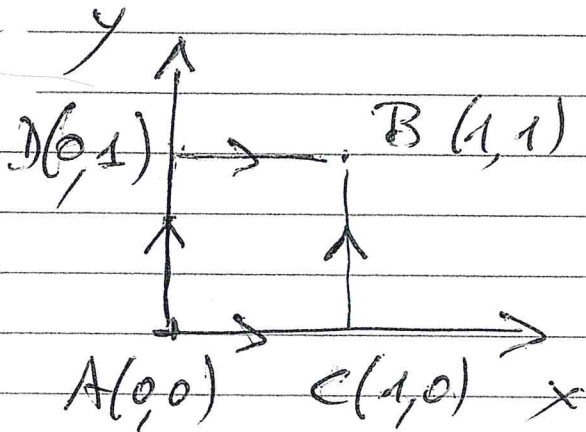
Esempio 2D : $\vec{F} = 3y\vec{i} + 2x\vec{j}$

$\vec{F} = \vec{F}(x,y)$ funzione del posto

$$F_x = 3y$$

$$F_y = 2x$$

Calcoliamo W_{AB} in figura passando da C o D [$\vec{F}$ in Newton e ds in metri]



$$1) W_{ACB} = W_{AC} + W_{CB}$$

$$2) W_{ADB} = W_{AD} + W_{DB}$$

$$1) W_{AC} = F_x dx = 3y \cdot dx = 0 \quad (y=0, dy=0)$$

$$W_{CB} = F_y dy = 2x \cdot dy = 2J \quad (dx=0)$$

$$2) W_{AD} = F_y dy = 2x \cdot dy = 0 \quad (x=0, dx=0)$$

$$W_{DB} = F_x dx = 3y \cdot dx = 3J \quad (dy=0)$$

$$\Rightarrow W_{ACB} \neq W_{ADB}$$

• LA CONDIZIONE NECESSARIA E SUFFICIENTE PER FORZA CONSERVATIVA E' W_{AB} INDIPENDENTE DAL PERCORSO

• Nel caso 1D se $F=F(x)$ e' conservativa ma non e' il caso generale, come mostrato dall'esempio

Relazioni tra $\vec{F}$ e $\Phi_p \rightarrow$ ASO GENERALE

1D: $dW = \vec{F} \cdot d\vec{s} \rightarrow F_x = -d\Phi_p/dx$

3D: $\vec{F} = \vec{F}(x, y, z)$ e $\Phi_p = \Phi_p(x, y, z)$

Relazione sempre definita da $dW = \vec{F} \cdot d\vec{s} = -d\Phi_p$

Ma come si associano le componenti di $\vec{F}$ alla variazione di Φ_p ? Bisogna mappare una funzione scalare su un vettore.
[La divisione per un vettore non è definita]

In coordinate cartesiane:

$$dW = F_x dx + F_y dy + F_z dz$$

F conservativa se dW è diff. esatto (An $\mathbb{R}$ con -

$$F_x = -\frac{\partial \Phi_p}{\partial x} ; F_y = -\frac{\partial \Phi_p}{\partial y} ; F_z = -\frac{\partial \Phi_p}{\partial z}$$

ove i simboli esprimono la DERIVATA PARZIALE di Φ_p rispetto ad una variabile

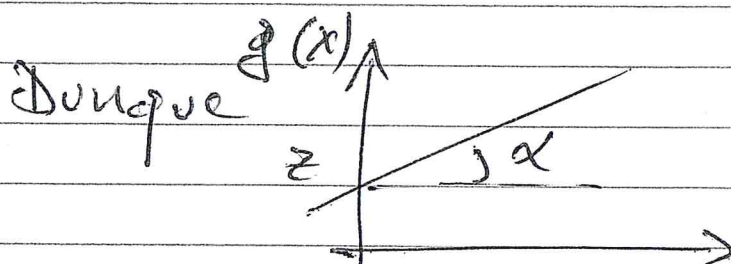
Es. variazioni di Φ_p rispetto a x , con y e z considerati fissi

(5)

Es. Sia $f(x, y, z) = xy^2 + z$

Funzioni di tre variabili, ma per ogni coppia di valori (y, z) posso pensarla come funzione che dipende solo da x

$$g_{y,z}(x) = f(x, y, z) \quad \text{con } y \text{ e } z \text{ fissi}$$



$$tg x = y^2$$

$g_{y,z}(x)$ è una retta di pendenza y^2 con intercetta z

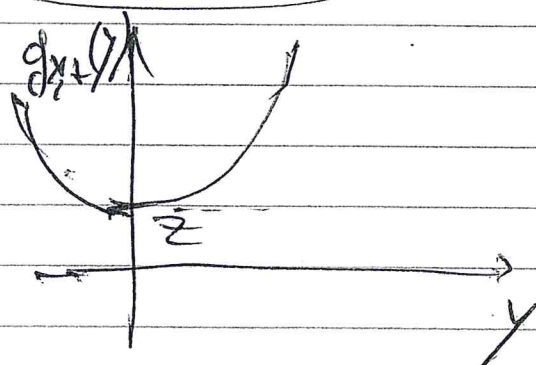
$$\frac{dg_{y,z}(x)}{dx} = y^2$$

pendenza della retta (y è variabile, la guardo a ogni y)

In modo analogo: $g_{x,z}(y) = f(x, y, z)$ con x, z fissi

$$\frac{dg_{x,z}(y)}{dy} = 2xy$$

parebbe



eccetera -

ma

La derivata parziale è indicibile, ancora una funzione delle tre coordinate

In termini generali, per ogni funzione $f(x, y, z)$ posso definire una derivata parziale rispetto ad una variabile tramite:

$$\frac{\partial f(x, y, z)}{\partial x} = \frac{d}{dx} g_{y, z}(x) \equiv h(x, y, z)$$

Dove $g_{y, z}(x) = f(x, y, z)$ con y, z fissati come fini

Perché y e z possono assumere tutti i valori $g_{y, z}(x)$ è una famiglia di funzioni

In modo analogo posso definire le derivate seconde:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial h}{\partial x} \quad \text{con } h = \frac{\partial f}{\partial x}$$

e anche le derivate miste

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial h}{\partial x} \quad \text{con } h = \frac{\partial f}{\partial y}$$

Eccetera.

Ogni derivata parziale di una funzione da ancora una funzione di tre variabili

Ad Analisi II si dimostrerà che la condizione necessaria e sufficiente (N&S) affinché la forza sia conservativa (ovvero W_{AB} sia indipendente dalla traiettoria) è

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x} ; \frac{\partial F_y}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial y} ; \frac{\partial F_z}{\partial x} = \frac{\partial F_x}{\partial z}$$

Se $\vec{F}$ soddisfa q.s. proprietà allora $\exists$ una funzione scalare $F_p = F_p(x, y, z)$ t.c.

$$F_x = -\frac{\partial F_p}{\partial x} ; F_y = -\frac{\partial F_p}{\partial y} ; F_z = -\frac{\partial F_p}{\partial z}$$

La condizione (N&S) si traduce nelle relazioni per F_p :

$$(**) \frac{\partial^2 F_p}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 F_p}{\partial y \partial x} ; \frac{\partial^2 F_p}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 F_p}{\partial z \partial y} ; \frac{\partial^2 F_p}{\partial z \partial x} = \frac{\partial^2 F_p}{\partial x \partial z}$$

→ cioè l'ordine di derivazione per F_p è inalterante:

In modo ~~reciproco~~ ^{reciproco}, se $\exists F_p = F_p(x, y, z)$ funzione scalare che gode della proprietà (**)

→ esiste una forza conservativa $\vec{F}$

con componenti $F_x = -\frac{\partial F_p}{\partial x}$

In termini vettoriali:

$$\vec{F} = - \left(\frac{\partial E_p}{\partial x} \hat{u}_x + \frac{\partial E_p}{\partial y} \hat{u}_y + \frac{\partial E_p}{\partial z} \hat{u}_z \right)$$

Qd. relazione traduce l'informazione SCALARE contenuta in E_p nell'informazione VETTORIALE contenuta in $\vec{F}$.

$\Rightarrow$ LA DIREZIONE E IL VERSO DI $\vec{F}$ SONO ASSOCIATI ALLA DIREZIONE LUNGO CUI VARIA E_p -

Ad esempio se $E_p = E_p(x)$ - 1D
 E_p non varia (è costante) in y e z
e $\vec{F} = F_x \hat{u}_x$

In modo esplicito

$$F_y = -\frac{\partial E_p}{\partial y} = 0 ; \quad F_z = -\frac{\partial E_p}{\partial z} = 0$$

(poiché E_p non è funzione di y e z)

$$F_x = -\frac{\partial E_p}{\partial x} = -\frac{dE_p}{dx}$$

ove si può usare il simbolo di derivata al posto di quello di derivata parziale perché E_p è funzione solo di x

(8)

Qs. relation si può scrivere in forma compatta tramite l'operatore vettoriale gradiente

$$\vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{k}$$

Dunque se $\vec{F}$ conservativa con $E_p = E_p(x, y, z)$

$$\vec{F} = -\vec{\nabla} E_p \quad (***)$$

Viceversa se $\vec{F}$ può essere scritta nella forma ~~$\vec{F}$~~ $(***)$, allora è conservativa e il lavoro è

$$W_{AB} = \int_A^B \vec{F}_x dx + \vec{F}_y dy + \vec{F}_z dz =$$

$$= \int_A^B \left(\frac{\partial E_p}{\partial x} dx + \frac{\partial E_p}{\partial y} dy + \frac{\partial E_p}{\partial z} dz \right) =$$

$$= - \int_A^B dE_p = E_p(A) - E_p(B)$$

(9)

Relazione geometrica tra $\vec{F}$ e $\mathbb{E}_p$

$\mathbb{E}_p(x, y, z) = \text{cost}$ — superfici equipotenziali

Lavoro lungo una superficie equipotenziale

$$W_{AB} = \int_A^B (\vec{F} \cdot d\vec{s})_{\mathbb{E}_p = \text{cost}} = -\Delta \mathbb{E}_p = 0$$

Anche in termini infinitesimi:

$$\vec{F} \cdot d\vec{s} = -d\mathbb{E}_p = 0 \quad \text{se } \mathbb{E}_p = \text{cost}$$

Dunque $\vec{F} \perp d\vec{s}$ e lo spostamento avviene lungo una superf. equipotenziale

Cioè $\vec{\nabla} \mathbb{E}_p = -\vec{F}$ è ortogonale alle superfici equipotenziali

$\vec{\nabla} \mathbb{E}_p$ indica la direzione lungo cui il potenziale varia —

Es. se $\frac{\partial \mathbb{E}_p}{\partial x} \neq 0$ $\frac{\partial \mathbb{E}_p}{\partial y} = 0$ e $\frac{\partial \mathbb{E}_p}{\partial z} = 0$

$\vec{F}$ è diretta lungo x e $\mathbb{E}_p$ varia solo lungo x

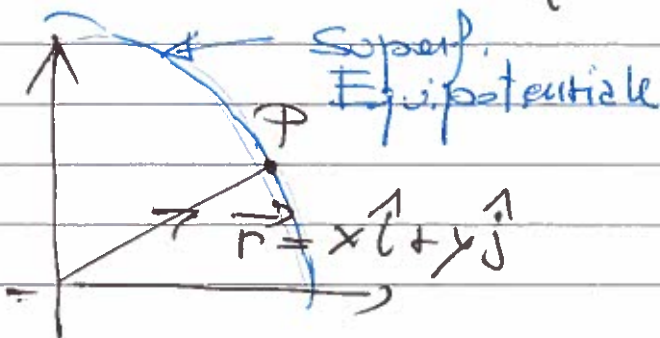
se $\frac{d\mathbb{E}_p}{dx} \neq 0$ e $\frac{\partial \mathbb{E}_p}{\partial y} \neq 0$ e $\frac{\partial \mathbb{E}_p}{\partial z} = 0$
 $\vec{F}$ è lungo x e y

Es. Potenziale elastico in 2D

$$\Phi_p = \frac{1}{2} k (x^2 + y^2) \quad \text{stere } k$$

$$\vec{F} = -\nabla \Phi_p = -\left(\frac{\partial \Phi_p}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial \Phi_p}{\partial y} \hat{j} \right) \quad \frac{\partial \Phi_p}{\partial t} = 0$$

$$= -k(x\hat{i} + y\hat{j}) = -k\vec{r}$$



In ogni pto del piano
forza $\vec{F} = \vec{F}(\vec{r})$ - RADIALE

- direzione sempre per un punto fisso (CENTRO DELLA FORZA)
- verso discorde da $\vec{r}$: Livello verso il centro delle forze
- Intensità $F = k\sqrt{x^2 + y^2} = kR$
→ f. elastica bidimensionale

È forza centrale: Forte che in una regione di spazio, direzione sempre rivolta verso un pto fisso (CENTRO DELLA FORZA) e con modulo funzione solo della distanza(r) dal punto fisso -



Proprietà notevole: LE FORZE CENTRALI
SONO CONSERVATIVE:

Dim. $\vec{F} = F(r) \vec{u}_r$

Intensità è funzione di r direzione radiale

$$W_{AB} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_A^B F(r) \vec{u}_r \cdot d\vec{s}$$

Proiezione di $d\vec{s}$ lungo $\vec{u}_r$ = spostamento radiale dr

$$= \int_A^B F(r) dr$$

Integrale di una funzione solo di r e funzione solo di r

$$= f(r_B) - f(r_A)$$

ove f è la primitiva di F ($\frac{df}{dr} = F(r)$)

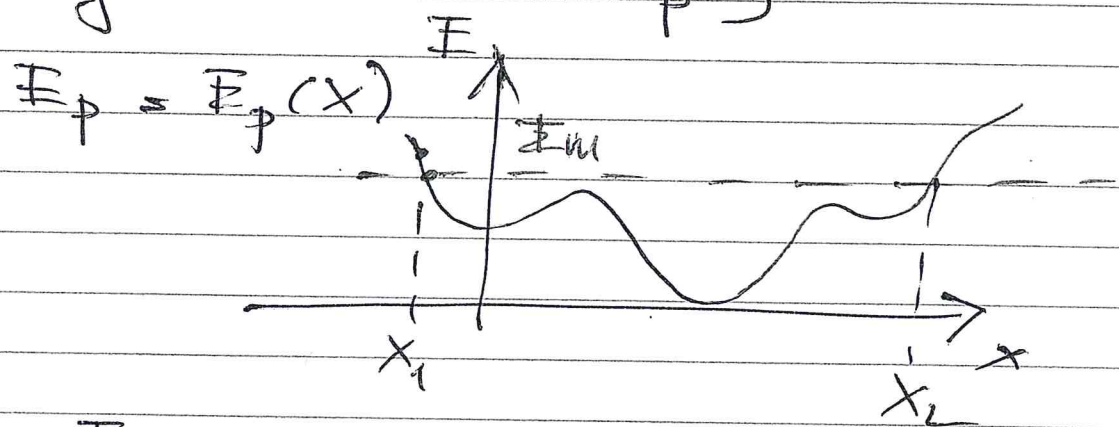
Dunque $\vec{F}$ ammette potenziale

$$\Delta E_p = f(r_A) - f(r_B)$$

$$E_p(r) = -f(r) + \text{cost}$$

Equilibrio del pto con forze conservative (e moto attorno al pto di equilibrio)

- F conservative $\iff E_p$
- Per semplicità, caso 1D:
(possiamo ricondurre al caso 1D localmente selezionando la direzione del gradiente di E_p)



$$E_m = E_p + E_k$$

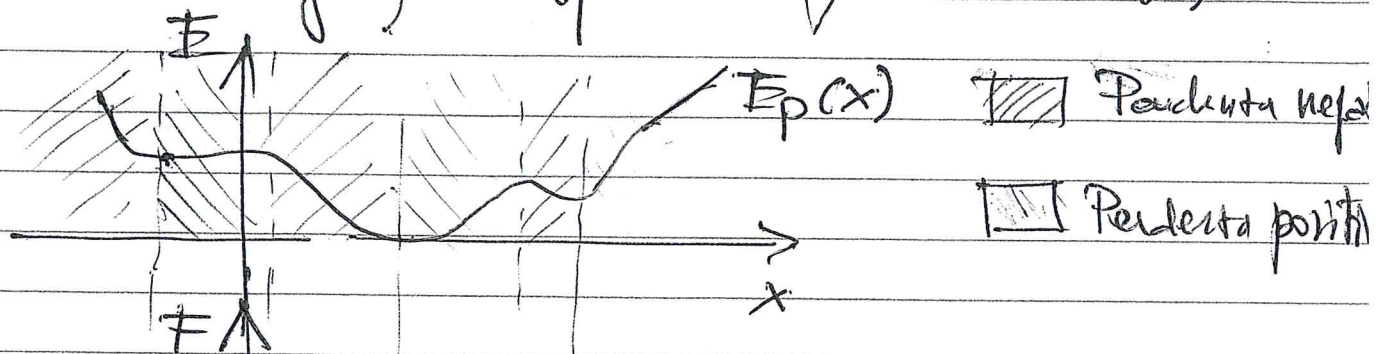
Poiché $E_k \geq 0$ il moto è confinato alla regione con $E_p(x) \leq E_m$ compresa tra x_1 e x_2

In qst. regione, condizioni di equilibrio

$$F = 0 \iff -\frac{\partial E_p}{\partial x} = 0$$

Punti in cui E_p ha pendenza nulla (max/min)

Costazioni grafica (qualitative) di $F = F(x)$



$F = 0$ nei minimi e nei max di E_p :
equilibrio

Minimi:

$$\begin{aligned} F(x_m - \Delta x) &> 0 \\ F(x_m + \Delta x) &< 0 \end{aligned}$$

Massimi:

$$\begin{aligned} F(x_m - \Delta x) &< 0 \\ F(x_m + \Delta x) &> 0 \end{aligned}$$

F discorde di Δx

F concorde con Δx

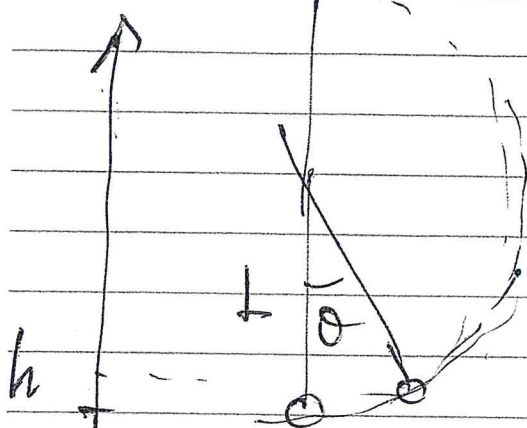
Spostamento da equilibrio
determina forza di
richiamo diretta verso x_m

Spostamento da equilibrio
determina forza che
allontana ulteriormente
dal punto x_m

Equilibrio stabile

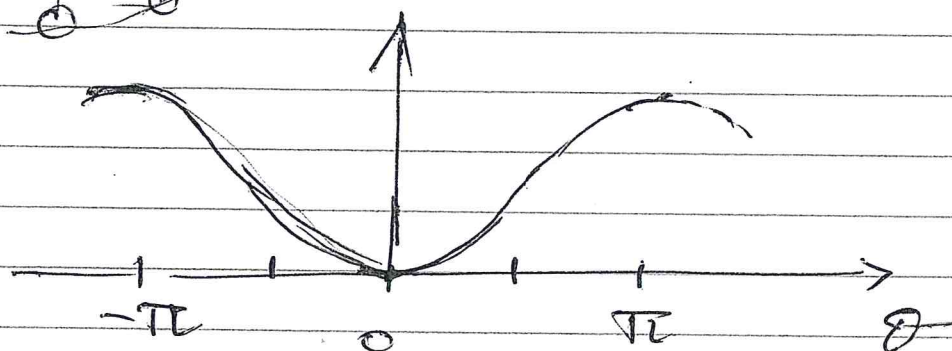
Equilibrio instabile

Example: Pendolo (con asta rigida di massa trascurabile):



$$E_p = mgh$$

$$= mgl(1 - \cos\theta)$$



$\theta = \pm\pi$ (e periodici) - equilibrio instabile

$\theta = 0 \pm 2k\pi$ - equilibrio stabile

(4)

Analisi dinamica del moto del pto materiale nell'intorno dei punti di equilibrio stabile:

- Sfruttiamo una proprietà delle funzioni continue e derivabili a tutti gli ordini

- cioè $\frac{d^n f}{dx^n} = \frac{d}{dx} \left(\frac{d^{n-1} f}{dx^{n-1}} \right)$ è definita per ogni valore di n

→ È possibile scrivere $f(x)$ nell'intorno di un punto x_0 tramite una sommatoria di funzioni (sviluppo in serie di Taylor):

$$f(x) = f(x_0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-x_0)^n}{n!} \frac{d^n f}{dx^n}(x_0)$$

$$= f(x_0) + (x-x_0) \frac{df}{dx}(x_0) + \frac{1}{2} (x-x_0)^2 \frac{d^2 f}{dx^2}(x_0) + \dots$$

ordini superiori

(*) Dimostrazione ad Analisi I verso fine semestre

(5)

~~Perché lo sviluppo è nell'in~~

Sia x_0 un punto di equilibrio (minimo locale di E_p) - Per piccoli spostamenti da x_0 :

$$|x - x_0| \ll 1$$

Quindi $\forall n \quad |x - x_0|^{n+1} \ll |x - x_0|^n$, cioè

ogni termine della serie è infinitesimo rispetto al precedente (infinitesimo di ordine superiore)

Si può approssimare $f(x)$ in modo conveniente troncando la serie al primo termine non nullo

Esempi:

$$\sin(\theta) = \sin(0) + \cos(0)\theta + \dots$$

$$\approx \theta$$

$$\cos(\theta) = \cos(0) - \sin(0)\theta - \frac{1}{2}\cos(0)\theta^2 + \dots$$

$$\approx 1 - \theta^2/2$$

Nel caso di E_p nell'intorno di un minimo:

$$F(x_0) = -\frac{dE_p}{dx}(x_0) = 0 \quad \text{Equilibrio}$$

Possiamo scrivere $E_p(x)$ come

$$E_p = E_p(x_0) + \frac{1}{2} \frac{d^2 E_p}{dx^2} (x - x_0)^2 + \dots$$

costante i termini non fanno parte della serie

Ridefiniamo $E_p(x) = \frac{1}{2} \frac{d^2 E_p}{dx^2} (x - x_0)^2$

→ Nell'intorno di un punto di equilibrio l'energia potenziale è quadratica nello spostamento dal punto di equilibrio

Attorno a un minimo

$$\frac{d^2 E_p}{dx^2} > 0$$

$$\frac{d^2 E_p}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{dE_p}{dx} \right)$$

pendenza di $\frac{dE_p}{dx}$ positiva

(F ha pendenza negativa nel minimo: è discorde da Δx)

(7)

Possiamo porre $\frac{d^2 E_p}{dx^2} = k > 0$

L'energia potenziale nell'intorno di un punto di equilibrio stabile ha la forma generale

$$E_p(x) = \frac{1}{2} k x^2 \quad \text{for. elastico!}$$

$$F(x) = -kx \quad \text{forza elastica}$$

Il moto del punto materiale nell'intorno dei punti di equilibrio stabile e' sempre un moto armonico semplice

→ Importanza del moto armonico semplice

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{k}{m} x^2 = 0$$

Solution $x(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi) \quad \omega_0^2 = k/m$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega_0^2 x^2 = 0$$

Il coeff. di x^2 e' la frequenza angolare di oscillazione

(8)

• Possiamo anche ricavare in modo del tutto generale l'eq. del moto attorno all'equilibrio partendo dalla proprietà notevole di F conservativa

$$F_m = \text{cost} \quad \Rightarrow \quad \frac{dE_m}{dt} = 0$$

Nell'intorno di un minimo

$$E_p = \frac{1}{2} k x^2 \quad \text{con } k \equiv - \left. \frac{d^2 E_p}{dx^2} \right|_{x=x_0}$$

$$E_k = \frac{1}{2} m v^2 \quad \text{valida sempre}$$

Quindi:

$$\frac{d}{dt} (E_k + E_p) = 0$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} k x^2 + \frac{1}{2} m v^2 \right) = 0$$

$$k x \frac{dx}{dt} + m v \frac{dv}{dt} = 0$$

$$v = \frac{dx}{dt}, \quad \frac{dv}{dt} = \frac{dx}{dt} \frac{dv}{dx}$$

$$m v \left(\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{k}{m} x \right) = 0$$

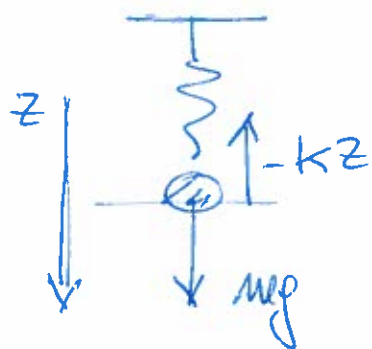
Due soluzioni:

1) $v = 0 \rightarrow$ banale: punto fisso in x_0

2) $\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{k}{m} x = 0 \rightarrow$ Eq. C.A.S.

moti di piccole oscill.
attorno al pto di Equil.

Esempio ; Massa soggetta a forza elastica
e forza peso -



Sceglia asse z verticale verso il
basso [Attenzione ai segni
dell'energia potenziale di F_{el} e F_p]

$$E_p(z) = \frac{1}{2} k z^2 - m g z$$

Punto di equilibrio : $\frac{dE_p}{dz} = 0$ condizione per il
minimo

$$z_0 = \frac{m g}{k} \quad [\text{vertice della parabola}]$$

Sviluppo E_p attorno al minimo :

$$\begin{aligned} E_p(z) &= E_p(z_0) + \frac{1}{2} \frac{d^2 E_p}{dz^2} \bigg|_{z=z_0} (z - z_0)^2 \\ &= \text{cost} + \frac{1}{2} k (z - z_0)^2 \end{aligned}$$

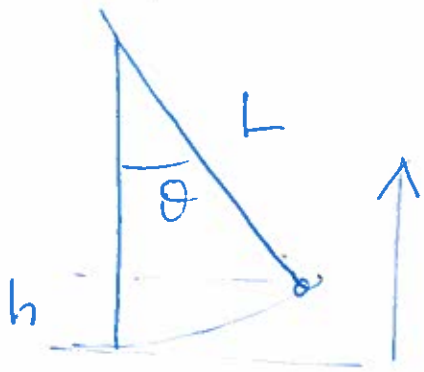
[In questo caso $\frac{d^2 E_p}{dz^2} \bigg|_{z=z_0} = k$ ~~costante~~ costante elastica della molla]

Ridefinisco $E_p = E_p(x)$ con $x = z - z_0$
scostament. dall'equilibrio

e pongo $E_p(z_0) = 0$ [calcolo E_p riferito al minimo]

$$E_p(x) = \frac{1}{2} k x^2 \quad \leftarrow \text{OAS attorno a } z_0$$

Esempio 2 : Pendolo Semplice



$$E_p = mgh = mgL(1 - \cos\theta)$$

$E_p(\theta)$ ha il minimo in $\theta = 0$

$$\text{Scelgo } E_p(0) = 0$$

Sviluppo attorno a $\theta = 0$:

$$\bullet \quad E_p(\theta) \approx \frac{1}{2} \frac{d^2 E_p}{d\theta^2} \bigg|_{\theta=0} \theta^2$$

$$= \frac{1}{2} mgh \frac{d^2 \cos\theta}{d\theta^2} \bigg|_{\theta=0} \theta^2 = \frac{1}{2} mgL \theta^2$$

$$\bullet \quad E_k = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m \left(L \frac{d\theta}{dt} \right)^2$$

$$\frac{dE_m}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} mgL \theta^2 + \frac{1}{2} m L^2 \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right] = 0$$

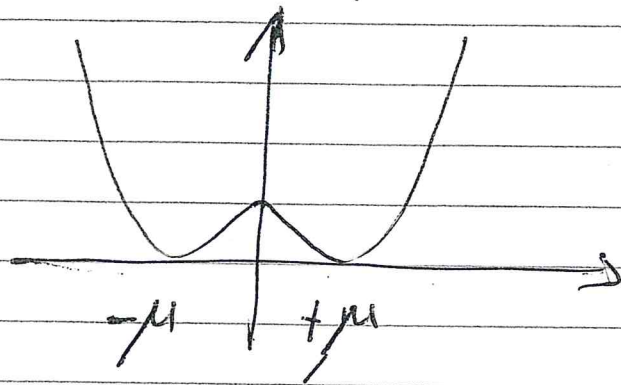
Solution non banale:

$$mgL\theta + mL^2 \frac{d^2\theta}{dt^2} = 0$$

$$\text{Eq. O.A.S.} \quad \left[\frac{d^2\theta}{dt^2} + \left(\frac{g}{L} \right) \theta = 0 \right]$$

piccole oscillazioni attorno a $\theta = 0$ con $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{L}}$

Esempio: $\mathbb{F}_p(x) = (x^2 - \mu^2)^2$



$$x_{\min} = \pm \mu$$

$$x_{\max} = 0$$

Moto attorno a μ :

$$\mathbb{F}_p(x) = \frac{1}{2} \frac{d^2 \mathbb{F}_p}{dx^2} (x - \mu)^2 \quad (H)$$

$\Delta x =$ spostamenti dall'equilibrio

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \mathbb{F}_p}{dx^2}(\mu) &= \frac{d}{dx} \left(2(x^2 - \mu^2)x \right) \Big|_{x=\mu} \\ &= 4(x^2 - \mu^2) + 8x^2 \Big|_{x=\mu} = 8\mu^2 \equiv k \end{aligned}$$

In modo diretto:

$$\begin{aligned} (x^2 - \mu^2)^2 &= \left[(x - \mu)(x + \mu) \right]^2 \Big|_{x \approx \mu} \approx 4\mu^2 (x - \mu)^2 = \frac{1}{2} 8\mu^2 (x - \mu)^2 \\ &= \frac{1}{2} 8\mu^2 (x - \mu)^2 \quad \text{che coincide con (H)} \end{aligned}$$

Questo è il famoso potenziale di Higgs