

Relazione leggi della dinamica

(1)

$$1) \vec{F} = \gamma m_0 \vec{v}$$

Relativistici

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

$$2) E_k = m_0 c^2 (\gamma - 1)$$

Abbiamo visto che è possibile interp. il risultato in termini $\vec{F}$ — non di $\vec{a}$, ma aumentata massa — $m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$

$$m \approx m_0 + \frac{1}{2} m_0 \frac{v^2}{c^2} + \dots$$

$$\text{con } \Delta m c^2 = \frac{1}{2} m v^2 + \dots$$

—————
Energia cinetica
aumento della massa $\times c^2$
→ grandezza omogenea
all'energia

In questi termini, questa equiv. en. e^a possiamo scrivere 2) come

$$\gamma m_0 c^2 = m_0 c^2 + E_k$$

$\underbrace{\gamma m_0 c^2}_{E_{\text{totale}}}$

$\underbrace{m_0 c^2}_{E_{\text{in. di}}}$

$\underbrace{E_k}_{E_{\text{cinetica}}}$

Perché se $v=0$, $\gamma=1$

$$E_0 = m_0 c^2 \quad E_K = 0$$

- L'energia di un corpo non è nulla per $v=0$,
ma esiste un'energia di massa

- Nota: ~~se~~ E, p dip. dall'osservatore

Nel riferimento solidale con la particella o
corpo (sist. ref. COMOVENTE) $v=0$

$$\left. \begin{array}{l} E = m_0 c^2 \\ \vec{p} = 0 \end{array} \right\} S$$

Se un osservatore si muove con vel v
risp. a part., allora v ($-\vec{v}$) è la velocità
della part. nel sist S' tang. di Lorentz

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad \leadsto \text{stesso } \gamma \text{ di } E, p$$

$$E = \gamma m_0 c^2$$

$$\vec{p} = \gamma m_0 \vec{v}$$

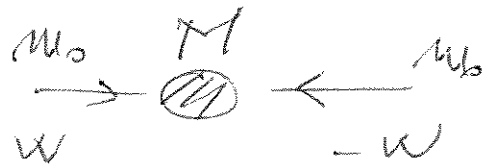
$$\gamma = \frac{E}{m_0 c^2}$$

$$\beta = \frac{pc}{E}$$

Termini della trasform. di Lorentz

(3)

Lezione prec.: Urto anelastico $\rightarrow$ conversione
di energia in massa:



Si è dimostrato che $M = 2m_w = 2m_0 / \sqrt{1 - w^2/c^2}$
o in altri termini $Mc^2 = 2m_0c^2 + E_k(1) + E_k(2)$

Si hanno anche processi (spontanei) con conversione
di massa in energia

Esempio: Decadimento α

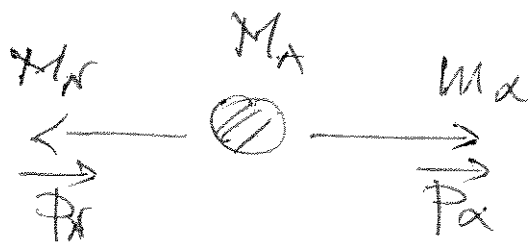
Conversione di un nucleo (A, Z) di massa M_A
in un nucleo $(A-4, Z-2)$ di massa M_N e
una particella α (nucleo di ${}^4_2\text{He}$).

Calcoliamo le relazioni tra energie, massa e q.tà di
moto scegliendo SRI in cui M_A è fermo
[Tutti SRI sono equivalenti, scegliamo ps.

perché rende il processo semplice da analizzare]

Perché M_A è fermo $\vec{P}_A = 0$. Per
conservazione della q.tà di moto $\vec{P}_{\text{tot}}$ nello
stato finale è nullo

$\rightarrow$



(4)

$$\vec{P}_N + \vec{P}_\alpha = 0$$

$$P_N = -P_\alpha$$

Conservazione dell'energia:

$$M_A c^2 = E_N + E_\alpha \quad (*)$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\text{energie totali}}$

ev. di massa
poiché E_K solo nel
riferimento in cui A è fermo

$$E_N = m_N c^2 + E_K(N)$$

$$E_\alpha = m_\alpha c^2 + E_\alpha(N)$$

Sostituendo in (*)

$$E_K(N) + E_K(\alpha) = \underbrace{(M_A - m_N - m_\alpha) c^2}_{\text{Eccesso di massa} = \Delta M c^2}$$

Se $\Delta M c^2$ (detto Q-valore della transizione) e'
 $\Delta M c^2 > 0 \rightarrow$ decadimento spontaneo con
 conversione di massa in energia cinetica

Per i decadimenti α :

$$Q \approx 10 \text{ MeV}/c^2$$

$$m_\alpha \approx 4 \text{ GeV}/c^2 \Rightarrow \gamma = \frac{m c^2 + E_K}{m c^2} \approx 1$$

$$m_N \approx 100-200 \text{ GeV}/c^2$$

(5)

Dunque i prodotti di decadimento hanno
 $v \ll c$ ($\beta \ll 1$) e possono essere
 trattati (in p.s. caso) nel limite non
 relativistico:

$$E_K = \frac{1}{2} m_0 v^2 = \frac{1}{2} \frac{p^2}{m_0}$$

D'altronde $p_N = -p_\alpha$, e quindi

$$E_K(N) + E_K(\alpha) = \Delta M c^2$$

$$\frac{1}{2} \frac{p_N^2}{m_N} + \frac{1}{2} \frac{p_\alpha^2}{m_\alpha} = \Delta M c^2$$

Da cui si ricava p_α -

Si può anche notare che poiché $m_N \gg m_\alpha$

$E_K(\alpha) \gg E_K(N)$ e cioè, in p.s. esempio,

$$E_K(\alpha) \simeq \Delta M c^2 \quad \text{e} \quad E_K(N) \simeq 0$$

* Nel caso generale non si può ricorrere al limite non relativistico per i prodotti di una collisione o di un decadimento. Occorre stabilire una relazione generale (relativistica)

tra E , p e m_0 -

→ RELAZIONE DI DISPERSIONE:

Manifolizmo $\vec{p} = \gamma m_0 \vec{v}$

$$p^2 = \gamma^2 m_0^2 v^2$$

$$p^2 - \gamma^2 m_0^2 c^2 = \gamma^2 m_0^2 v^2 - \gamma^2 m_0^2 c^2$$

$$p^2 - \gamma^2 m_0^2 c^2 = -\cancel{\gamma^2 m_0^2 c^2} \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)$$

$$p^2 + m_0^2 c^2 = \gamma^2 m_0^2 c^2$$

Moltiplicando tutti i termini per c^2 :

$$(pc)^2 + (m_0 c^2)^2 = (\gamma m_0 c^2)^2$$

È cioè:

$$\boxed{E^2 = (pc)^2 + (m_0 c^2)^2} \quad (**)$$

(7)

Posiamo scrivere per l'energia totale

$$E = \sqrt{(pc)^2 + (m_0 c^2)^2}$$

oltre alla relazione già trovata

$$E = m_0 c^2 + E_K \quad (E_K \text{ e' funzione di } p)$$

Dalla relazione trovata, ~~è~~ valida in qualunque SRI, possiamo anche derivare:

$$(m_0 c^2)^2 = E^2 - (pc)^2$$

Poiché m_0 è una ~~gr~~ proprietà intrinseca di un corpo (la sua massa a riposo), m_0 non cambia al cambiare del sistema di riferimento: cioè è un invariante di Lorentz.

Ne consegue che la differentia $E^2 - (pc)^2$ è un invariante di Lorentz.

Cioè E e p singolarmente dipendono dal SRI, ma la loro diff. al quadrato è invariante

Dimostriamo nelle prossime lezioni (P)
 in modo formale da p.s. risultato è
 vero non solo per un oggetto fisico di
 massa m_0 definita, ma in generale
per qualsiasi sistema con energia totale E
 e quantità di moto totale $\vec{p}$. Si può
 scrivere cioè:

$$m^* c^2 = \sqrt{E_{\text{tot}}^2 - (\vec{p} c)^2} \quad (**)$$

m^* è detta massa invariante del sistema
 e può corrispondere o meno ~~ad un~~ ~~meno~~
~~meno~~ di un oggetto fisico.

Rimanendo la dimostrazione di p.s. risultato
 vediamo alcune conseguenze importanti delle
 relazioni (***) in alcuni esempi

Pensiamo a un processo in cui (9)
 una particella si disintegra in n
 particelle:

STATO INIZIALE:

Qualunque SRI

$$(1) \quad M_0 c^2 = \sqrt{E^2 - (\vec{p}c)^2}$$

STATO FINALE:

Cons. Energia:

$$E = \sum_{f=1}^n E_f$$

Cons. Momento

$$\vec{p} = \sum_{f=1}^n \vec{p}_f$$

Dunque:

$$M_0 c^2 = \sqrt{\left(\sum_i E_i\right)^2 - \left(\sum_i \vec{p}_i\right)^2 c^2}$$

$\sum_i \vec{p}_i^2$ Relazione
 vettoriale con $\vec{p}$
 e' ok -

Nota che la relazione e' valida in qualunque
 SRI:

$$\left(\sum_i E_i\right)^2 - \left(\sum_i \vec{p}_i\right)^2 c^2 = \underbrace{M^* c^2}_{\text{invariante}}$$

GRANDEZZA INVARIANTE

), momento invariante
 per ogni sistema
 chiuso

Alternativamente, in un urto

(70)



massa (invariante) dell'oggetto prodotto nell'urto:

$$m^* c^2 = \sqrt{\left(\sum_i E_i\right)^2 - \left(\sum_i \vec{p}_i\right)^2 c^2}$$

$\underbrace{\sum_i E_i}_{\text{Somma delle energie delle particelle}}$
 $\underbrace{\sum_i \vec{p}_i}_{\text{Somma (vett.) delle qte' di moto nello stato iniziale}}$

Lo "stato" (oggetto reale di massa $m_0 \neq m^*$ oppure sistemi di massa m^*) può poi disintegrarsi in n -particelle secondo

$$m^* c^2 = \sqrt{\left(\sum_f E_f\right)^2 - \left(\sum_f \vec{p}_f\right)^2 c^2}$$

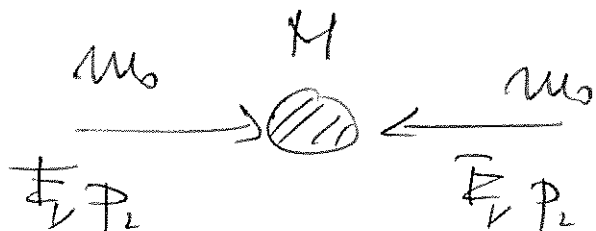
In ultima analisi $\sum_i E_i = \sum_f E_f$
 $\sum_i \vec{p}_i = \sum_f \vec{p}_f$

Poichè m^* è un invariante relativistico, possiamo scegliere a piacimento il SRI in cui calcoleremo E_i e $\vec{p}_i$, e E_f e $\vec{p}_f$.

Esempio

(11)

1) Collisione nel centro di massa di due oggetti di massa identica m_0 (con il formalismo appena introdotto)



$$\vec{p}_1 = -\vec{p}_2$$

nel CM

e dunque $E_1 = E_2$
poiché m_0 è la stessa

$$M_0^2 = \sqrt{(\vec{E}_1 + \vec{E}_2)^2 - (\underbrace{(\vec{p}_1 + \vec{p}_2)}_{=0 \text{ nel CM}})^2 c^2}$$

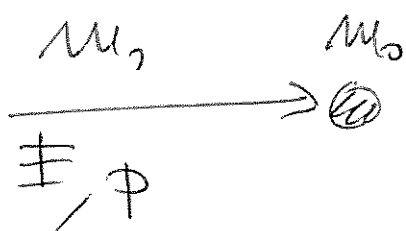
$$= \sqrt{(2E)^2}$$

$$(E \equiv E_1 = E_2)$$

$$= 2E = 2m_0 + E_{K1} + E_{K2}$$

coerente con il risultato
già trovato (Laz. precedente)

Esempio 2: Collisione su bersaglio fisso (nel lab)



→ Qual è la massa dell'oggetto
che si può formare?

- metodo complicato : - trovo il cdm (12)
 - ricavo E', p' nel cdm
 - per i due oggetti
- Applico il risultato di 1)

- metodo semplice : sfrutto l'invariante di m^*

$$m^* c^2 = \sqrt{(E_1 + E_2)^2 - (\vec{p}_1 + \vec{p}_2)^2 c^2}$$

In p.s. caso, nel rif. del Lab. in cui un oggetto è fermo :

$$E_1 = E \qquad E^2 = p^2 + (m_0 c^2)^2$$

$$E_2 = m_0 c^2$$

$$p_1 = p$$

$$p_2 = 0$$

$$m^* c^2 = \sqrt{E^2 + 2m_0^2 E + (m_0 c^2)^2 - p^2 c^2} \rightarrow (m_0 c^2)^2$$

$$= \sqrt{2m_0 c^2 E + 2(m_0 c^2)^2}$$

La massa delle particelle che si può produrre nell'urto cresce con $\sqrt{E}$, mentre nell'urto frontale tra due particelle cresce con E -
 È il motivo per cui si realizzano collider con fasci collidenti.

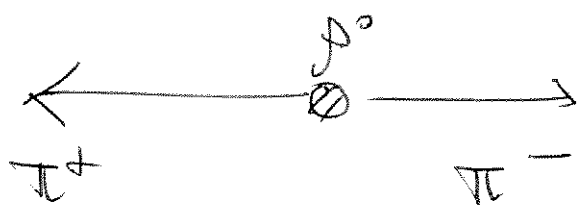
Es. 3

(13)

Disintegrazione della particella ρ^0 in due
mesoni $\pi^\pm$: $\rho^0 \rightarrow \pi^+ \pi^-$

Nel sistema di riposo della ρ^0 , i due pioni
hanno $\beta = 0.932$ - Trovare m_ρ , conoscendo
 m_π -

Soluzione: Come per il dec. α , ma si
userà la relazione relativistica
tra E , p e m



$$\vec{p}_{\pi^+} = -\vec{p}_{\pi^-}$$

$\sum \vec{p} = 0$ Nel CM
(ipotesi del ρ^0)

$$m_\rho c^2 = \sqrt{\underbrace{(E_+ + E_-)^2}_{\text{En. totale}} - \underbrace{(\vec{p}_{\pi^+} + \vec{p}_{\pi^-})^2}_{=0}} = \sqrt{(2E_\pi)^2}$$

$$= 2E_\pi = 2\gamma m_\pi c^2 = \frac{2m_\pi}{\sqrt{1-\beta^2}} c^2$$

fine

Particelle di massa nulla :

(14)

$$\text{Per } m_0 = 0 : E^2 = (pc)^2 + \cancel{(m_0 c^2)^2}$$

$$\Rightarrow E = pc$$

$$\text{Ne consegue: } \beta = \frac{pc}{E} = 1$$

$$\gamma = \frac{E}{m_0 c^2} = \infty$$

- Le particelle di massa nulla hanno sempre velocità pari alla velocità della luce ($\beta = 1$).
- Non si può realizzare una transf. di Lorentz che porti in un int. SRT in cui la particella è a riposo (richiederebbe $\gamma = \infty$)

Si noti che $E = m_0 c^2 \gamma$ rimane finito poiché $\gamma = \infty$, ma $m_0 = 0$ e analogamente $\vec{p} = m_0 \gamma \vec{v}$ (con $\vec{v} = \vec{c}$) -

I fotoni (quanti della radiazione elettromagnetica) sono particelle di massa nulla -

Processi che coinvolgono corpi di massa nulla (non) richiedono un formalismo differente da quello già introdotto. Si deve solo ricordare che per questi corpi $E = pc$ (hanno solo en. cinetica e non en. di massa)

Es. Decadimento dello π^0 in due fotoni



Poiché $m_\gamma = 0$ $E_\gamma = p_\gamma c$

molte nel riferimento in cui π^0 è a riposo,

$$\vec{p}_\gamma(1) = -\vec{p}_\gamma(2), \text{ ossia } \sum \vec{p}_\gamma = 0$$

Cons. di enegh e mom. (invariante)

$$m_{\pi^0}^2 c^2 = \sqrt{(E_\gamma(1) + E_\gamma(2))^2 - (\underbrace{\vec{p}_\gamma(1) + \vec{p}_\gamma(2)}_{=0})^2 c^2}$$

$$= \sqrt{(2E_\gamma)^2}$$

$$E_\gamma = \frac{m_{\pi^0} c^2}{2}$$

(i due fotoni hanno la stessa en. poiché hanno la stessa p di moto)

Es. Annichilazione del positronio

Positronio è un "atomo" simile all'idrogeno, formato da un elettrone e un antielettrone (particella di antimateria con carica opposta all'elettrone, e medesima massa). Materia e antimateria si annichiliscono, emettendo radiazione elettromagnetica - Nel sistema in cui il positronio è a riposo:



Conservazione della qta' di moto richiede che l'annichilazione emetta almeno due fotoni con

$$\vec{p}_\gamma(1) + \vec{p}_\gamma(2) = 0 \quad p_\gamma(1) = p_\gamma(2)$$

Inoltre $E_\gamma = p_\gamma c$ -

Analogamente al caso della ϕ :

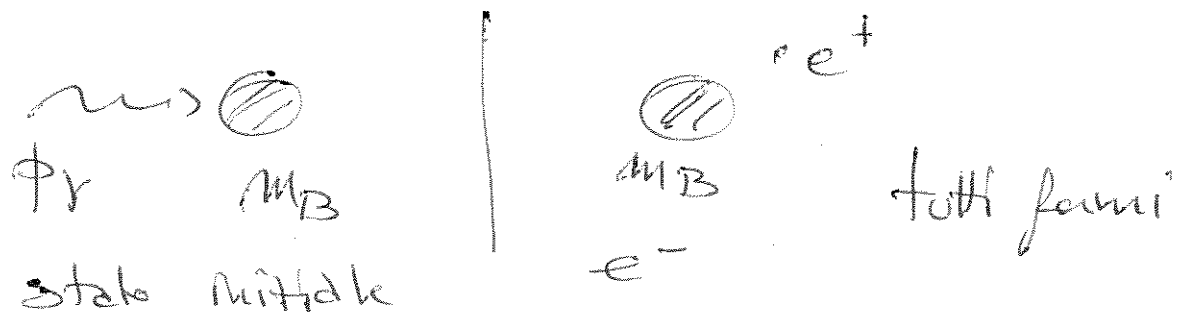
$$M_i^* c^2 = \sqrt{(E_{\gamma(1)} + E_{\gamma(2)})^2 - (\vec{p}_{\gamma(1)} + \vec{p}_{\gamma(2)})^2} = 2 E_\gamma$$

La massa invariante dello stato iniziale M_i^* è

$$M_i^* = 2 m_e, \text{ poich\'e } E_e = m_e c^2 \text{ (sono fermi)} \\ p_e = 0$$

→ ciascun fotone ha $E_\gamma = m_e c^2$

materializzazione del fotone (Attenzione 15
no meno $c=1$)



Troviamo l'energia E_γ minima affinché avvenga la materializzazione del fotone

— Cons. di energia e momento
e us di invarianti relativistici
massa inv. (Nel SIST del LAB)

$$m^*_{iniz} = m^*_f$$

$$\sqrt{(\sum \vec{E}_i)^2 - (\sum \vec{p}_i)^2} = \sqrt{(\sum \vec{E}_f)^2 - (\sum \vec{p}_f)^2}$$

$$(E_\gamma + m_B)^2 - p_\gamma^2 = (m_B + m_e + m_e)^2$$

$$2E_\gamma m_B + \cancel{m_B^2} = \cancel{m_B^2} + 4m_e^2 + 4m_e m_B$$

$$E_\gamma = 2m_e \left(1 + \frac{m_e}{m_B} \right) \approx 2m_e \quad (m_B \gg m_e)$$

Per $m_B = 0$ $E_\gamma = \infty$ non c'è materializzazione
 $m_B = m_e$ $E_\gamma = 4m_e$ nel vuoto