TRASFORMAZIONI DI LORENTZ

Per SRI in moto relativo lungo l'asse x e con assi y e z paralleli ed equiversi le trasformazioni generali si traducono in:

$x' = a_{11} x + a_{14} t$
$y' = y$
$z' = z$
$t' = a_{41} x + a_{44} t$

Troviamo i coefficienti residui usando:
* reciprocita` del moto
* postulato di relativita`

Per la coordinata x, osserviamo che i punti solidali con S' hanno $x' = \text{cost}$.
Detti punti si muovono rispetto a x, con la velocità di S', quindi $x - vt = \text{cost}$

Dunque $x' = a_{11} x + a_{14} t$ deve avere la forma (con $\gamma(v)$ da determinare):

$$x' = \gamma(v)(x - vt) \qquad (*)$$

Usando la reciprocità del moto, si ha:

$$x = \gamma(-v)(x' + vt') \qquad (**)$$

E, analogamente alla discussione per y' e z',

$$\gamma(v) = \gamma(-v)$$

[D'altronde per il principio di relatività e i risultati sulla contrazione delle lunghezze, non devono esserci differenze scambiando S e S' e mandando v in $-v$]

Possiamo risolvere (**) rispetto a t':

$$t' = \frac{1}{v}\left[\frac{x}{\gamma(v)} - x'\right]$$

Eliminando, per comodità di scrittura, la dip. da v in γ, e sostituendo a x' l'espressione (*), si ottiene

$$t' = \frac{1}{v}\left[\frac{x}{\gamma} - \gamma(x - vt)\right] = \frac{1}{v}\left(\frac{1}{\gamma} - \gamma\right)x + \gamma t$$

Troviamo quindi le equazioni:

$$\begin{cases} x' = \gamma\,[x - vt] \\ t' = \nu x + \gamma t \end{cases} \qquad \text{con } \nu = \frac{1}{v}\left[\frac{1}{\gamma} - \gamma\right]$$

Si noti che imponendo $t = t'$ (Hp tempo assoluto), ~~le equazioni trovate~~ si avrebbe $\nu = 0$ e $\gamma = 1$. Si otterrebbero quindi le trasformazioni di Galileo, recuperando simultaneità e spazio assoluto.

Il procedimento adottato è dunque generale, vogliamo però ora imporre la condizione di Einstein $c =$ cost in ogni SRI

Ricorriamo dal postulato di Einstein:

c = costante in tutte le direzioni per ogni osservatore inerziale

Dunque sia in S e in S' vale la condizione

$$x^2+y^2+z^2-c^2t^2=0 \qquad (\times)$$

$$x'^2+y'^2+z'^2-c^2t'^2=0 \qquad (\square)$$

che lega le coordinate (x,y,z) e (x',y',t') raggiunte da un segnale luminoso in un tempo t e t', partito dall'origine del rispettivo sist. di riferim.

Per essere contemporaneamente valide $(\times)$ e $(\square)$ devono essere uguali a mezzo delle trasf. cercate:

$$x'^2+y'^2+z'^2-c^2t'^2 =$$

$$\gamma^2(x-vt)^2+y^2+z^2-c^2(\delta x+\gamma t)^2 =$$

$$(\gamma^2-\delta^2c^2)x^2+y^2+z^2-\gamma^2(c^2-v^2)t^2-2\gamma(\gamma v+\delta c^2)xt =$$

$$x^2+y^2+z^2-c^2t^2$$

Da queste relazioni seguono:

$$\begin{cases} \gamma^2-\delta^2c^2=1 \\ \gamma^2(c^2-v^2)=c^2 \\ \gamma v+\delta c^2=0 \end{cases} \Longrightarrow \gamma=\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad \beta=\frac{v}{c}$$

Possiamo ricavare ν dalla sua definizione

[occhio: se la si ricava dalle eq. precedenti, bisogna prendere le soluzioni con segno giusto, perché sono relazioni quadratiche.
Verificare per esercizio che le 3 condizioni sono soddisfatte per la soluzione trovata]

$$\nu = \frac{1}{v}\left[\frac{1}{\gamma} - \gamma\right] =$$

$$= \frac{\gamma}{v}\left[\frac{1}{\gamma^2} - 1\right] = \frac{\gamma}{v}\left[1-\beta^2-1\right] = -\frac{\gamma\beta}{c}$$

Sostituendo nelle trasformazioni:

$$\begin{cases} x' = \gamma(x - vt) \\ t' = \gamma\left(t - \beta\frac{x}{c}\right) \end{cases}$$

TRASF. DI LORENTZ

E per le reciproche:

$$\begin{cases} x = \gamma(x' + vt') \\ t = \gamma\left(t' + \frac{\beta x'}{c}\right) \end{cases}$$

× Trovate da Lorentz in modo empirico come trasformazioni che rendono invarianti le eq. di Maxwell dell'elettromagnetismo

× Derivate da Einstein a partire dai postulati di relatività speciale

Le trasformazioni di Lorentz si possono scrivere in una forma facile da ricordare:

$$\begin{cases} x' = \gamma(x - vt) \\ t' = \gamma t - \frac{\gamma\beta}{c} x \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x' = \gamma x - \gamma\beta\, ct \\ ct' = \gamma ct - \gamma\beta\, x \end{cases}$$

In forma matriciale:

$$\begin{pmatrix} x' \\ ct' \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma & -\gamma\beta \\ -\gamma\beta & \gamma \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ ct \end{pmatrix}$$ da O a O'

$$\begin{pmatrix} x \\ ct \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma & \gamma\beta \\ \gamma\beta & \gamma \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ ct' \end{pmatrix}$$ da O' a O

In forma estesa alle 4 coordinate:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ ct' \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\gamma\beta \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\gamma\beta & 0 & 0 & \gamma \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ ct \end{pmatrix}$$

Nota: per $v \ll c$ $\gamma = 1$ e ~~quindi~~ le trasformazioni di Lorentz si riducono alle trasf. di Galileo

gamma mengammabeta mengammabeta gamma

Es. Lunghezza di un regolo dalle trasf. di Lorentz.

x_A ——— x_B

$L_o = x_B - x_A$ nel rif. solidale con il regolo

S' in moto relativo con velocità v rispetto ad S solidale con il regolo. Passo accanto al regolo e ~~ad~~ un tempo t' misura le coordinate degli estremi del regolo

x_A' e x_B'

Le coordinate in S e S' sono legate dalle relazioni:

$$\begin{cases} x_A = \gamma x_A' + \gamma v t' \\ x_B = \gamma x_B' + \gamma v t' \end{cases}$$

S è in moto rispetto a S' con vel. $-v$

$$L_o = x_B - x_A = \gamma (x_B' - x_A') = \gamma L$$

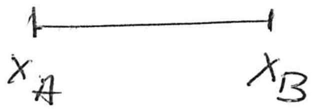
$L = \dfrac{L_o}{\gamma}$ contrazione della ~~distanza~~ lunghezza del regolo di S (L_o) misurato da S'.

I risultati sulla dilatazione del tempo e la contrazione degli intervalli sono deducibili dalle trasf. di Lorentz

Es. <u>Lunghezza di un regolo</u>

Con trasformazione di Lorentz

Un osservatore solidale con un regolo misura una lunghezza $l_{AB} = x_B - x_A$



Un osservatore in moto con velocità v passa davanti al regolo e al tempo t', segna le posizioni degli estremi su un proprio regolo ottenendo:

$$x_B = \gamma x_B' + \gamma \beta c\, t'$$
$$x_A = \gamma x_A' + \gamma \beta c\, t'$$

si noti che S è in moto relativo a S' con velocità $-v$ da cui le trasf. indicate

La lunghezza del regolo in S' è

$$l' = x_B' - x_A' = \frac{x_B - x_A}{\gamma} = l/\gamma = l\sqrt{1-\beta^2}$$

Il sistema S' vede il regolo di S, contratto rispetto a come lo vede l'osservatore ~~solid~~ S solidale con il regolo stesso

Secondo l’interpretazione basata sulla meccanica classica il percorso o

Revisione dei risultati dell’esperimento di Michelson e Morley:

Secondo l’analisi classica, il tempo di percorrenza del braccio longitudinale e di quello trasversale rispetto alla direzione del moto relativo sono legati alla lunghezza da un fattore dipendente dal moto relativo in modo diverso nei due bracci:
Ortogonale   t1 = (2 L1 / c) * gamma
Longitudinale   t2 = (2 L2 / c) * gamma^2

Questa differenza determinerebbe uno sfasamento diverso (e dunque un passaggio di frange) a seconda di come sia orientato l’interferometro.

Secondo le trasformazioni di Lorentz, la lunghezza longitudinale risulta contratta di un fattore L2/gamma che si elide con un fattore gamma nel risultato. Ne consegue che lo sfasamento può essere scritto come:

Delta(t) = t2-t1 = 2 Delta(L) /c * gamma

Cioe` la differenza di tempi dipende solo dalla differenza di lunghezza dei bracci e non dal moto relativo dei bracci rispetto a c.
I bracci sono equivalenti e ruotando l’apparato (cioe` scambiando L1 con L2 e t1 con t2) non cambia il risultato.

Simultaneità

* Eventi simultanei in S non sono simultanei in S' e viceversa -

Siano eventi (x_1, t^*) e (x_2, t^*) simultanei in S —

Intervallo di tempo in S':

$$t_1' = \gamma t_1 - \frac{\gamma\beta}{c} x_1$$

$$t_2' = \gamma t_2 - \frac{\gamma\beta}{c} x_2$$

$$t_1 = t_2 = t^*$$

$$\Delta t' = t_2' - t_1' = -\frac{\gamma\beta}{c}(x_2 - x_1)$$

Se le coordinate coincidono gli eventi sono simultanei - Se eventi avvengono in posizioni diff. $\Delta t' \neq 0$

Notare che $\Delta t' \gtrless 0$ a seconda di $\Delta x \lessgtr 0$

- Posso avere eventi che per un osservatore sono uno nel passato dell'altro e viceversa
  $\rightarrow$ caos

- Non dovremo avere relazioni causali in qs. caso tra eventi di qs. tipo.

Es. simultaneità

A $\quad (x_A, t_A) = (1000\ \text{m},\ 2.0\times10^{-6}\ \text{s})$

B $\quad (x_B, t_B) = (3000\ \text{m},\ 4.0\times10^{-6}\ \text{s})$

C $\quad (x_C, t_C) = (500\ \text{m},\ 0{,}50\times10^{-4}\ \text{s})$

D $\quad (x_D, t_D) = (3500\ \text{m},\ 2{,}500\times10^{-4}\ \text{s})$

Trovare β che rende simultanei gli eventi in S' (se esiste) —

$$t'_A = t'_B \qquad \text{condizione di sim.}$$

$$-\cancel{\gamma}\frac{\beta}{c}x_A + \cancel{\gamma}t_A = -\cancel{\gamma}\frac{\beta}{c}x_B + \cancel{\gamma}t_B$$

$$\beta(x_B - x_A) = c(t_B - t_A)$$

$$\beta = \frac{\Delta t}{\Delta x}c \quad < 1$$

$$\beta_{AB} = \frac{2\times10^{-6}\ \text{s}}{2\times10^{3}\ \text{m}}\cdot 3\times10^{8}\ \text{m/s} = 0{,}3 < 1 \quad \text{ok}$$

$$\beta_{CD} = \frac{2\cdot10^{-4}\ \text{s}}{3\cdot10^{3}\ \text{m}}\cdot 3\times10^{8}\ \text{m/s} = 20 > 1$$

eventi C e D non sono simultanei in nessun SRI

Es. Difesa ~~galileiana~~ relativistica — Paradosso del granaio

Per S solidale con Gate stellare .

$L_0 = 90$ m $\longrightarrow$ $L = 60$ m se β:

$D_0 = 60$ m

$$\sqrt{1-\beta^2} = \frac{D_0}{L_0}$$

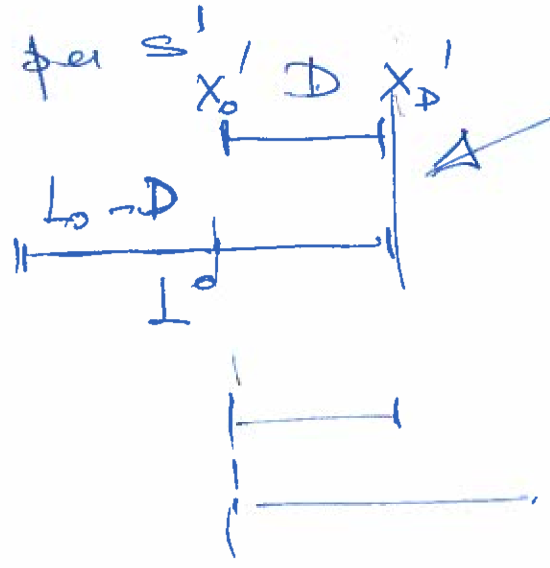
$$\beta^2 = 1 - \left(\frac{D_0}{L_0}\right)^2$$

Per S' solidale con astronave

$$D = D_0\sqrt{1-\beta^2} = \frac{D_0^2}{L_0}$$ contratto -

— per S Apertura / chiusura cancello simultanee in (D_0, t^*) in $(0, t^*)$ quanto prua/poppa astronave coincidono con la posizione dei cancelli

— per S'



evento in (X_D', t_D') Apertura cancello

quando la punta arriva in X_D'

evento in (X_0', t_0') chiusura cancello

$\Longrightarrow$ verifichiamo che qs evento coincide con il passaggio della ~~astronave~~ poppa dell'astronave da X_0' ciò che rende le descrizioni di S' e S equivalenti!

$$t'_D = \gamma t^* - \frac{\gamma\beta}{c}(D_0 + x_0)$$

t^* – simultaneo per S

$$t'_0 = \gamma t^* - \frac{\gamma\beta}{c} x_0$$

$$t'_0 - t'_D = \frac{\gamma\beta}{c} D_0 > 0$$

$$t'_0 = t'_D + \frac{\gamma\beta}{c} D_0 \qquad t'_0 > t'_D$$

Il cancello in 0 si chiude dopo l'apertura del cancello in D_0 ←

Verifichiamo lo spazio percorso dall'astronave nel tempo $\Delta t' = t'_0 - t'_D$

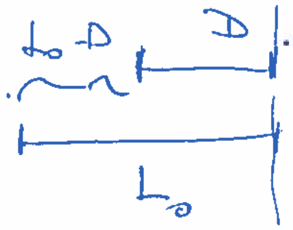
$$\Delta s = v\,\Delta t' = \beta c\,\Delta t'$$

$$= \gamma\beta^2 D_0$$

D'altronde $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{L_0}{D_0}$

$$\beta^2 = 1 - \left(\frac{D_0}{L_0}\right)^2$$

$$\Delta s = \frac{L_0}{\cancel{D_0}}\left(1 - \left(\frac{D_0}{L_0}\right)^2\right)\cancel{D_0} = L_0 - \frac{D_0^2}{L_0} = \underline{L_0 - D}$$



Visto dal S' → cvd!

COMPOSIZIONE DELLE VELOCITÀ

× Qual è la velocità di un oggetto in S' – moto relativo u rispetto a S

$$\begin{cases} x' = \gamma x - \gamma u t \\ t' = \gamma t - \frac{\gamma \beta}{c} t \end{cases}$$

$\beta = \frac{u}{c}$

u vel. relativa di S e S'

Velocità in S $\vec{v} = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right)$

$\vec{v}' = \left(\frac{dx'}{dt'}, \frac{dy'}{dt'}, \frac{dz'}{dt'}\right)$

Attenzione $dt' \neq dt$ nella relatività ristretta

Comp x :

$$\begin{cases} dx' = \gamma dx - \gamma u \, dt = \gamma dt\left(\frac{dx}{dt} - u\right) \\ dt' = \gamma dt - \frac{\gamma \beta}{c} dx = \gamma dt\left(1 - \frac{\beta}{c}\frac{dx}{dt}\right) \end{cases}$$

$$v_x' = \frac{dx'}{dt'} = \frac{v_x - u}{1 - \beta \frac{v_x}{c}} = \frac{v_x - u}{1 - \frac{v_x u}{c^2}}$$

se $\beta \to 0$ ⇝ composizione di Galileo

$$v_x' = v_x - u$$

$$v_x = v_x' + u \quad \text{reciprocità}$$

Comp. per y e z -

$$\begin{cases} dy' = dy \\ dt' = \gamma dt - \gamma \frac{\beta}{c} dx = \gamma dt\left(1 - \frac{\beta}{c}\frac{dx}{dt}\right) \end{cases}$$

$$v_y' = v_y \frac{1}{\gamma\left(1 - \frac{\beta v_x}{c}\right)}$$

$$v_z' = v_z \frac{1}{\gamma\left(1 - \frac{\beta v_x}{c}\right)}$$

$\beta \to 0$ $\quad v_y' = v_y$, $\; v_z' = v_z$

→ Legge di composizione articolata
se v_y e $v_z \neq 0$ non sono comp. invarianti
anche se ortogonali alla direzione di moto relativo dei due osservatori

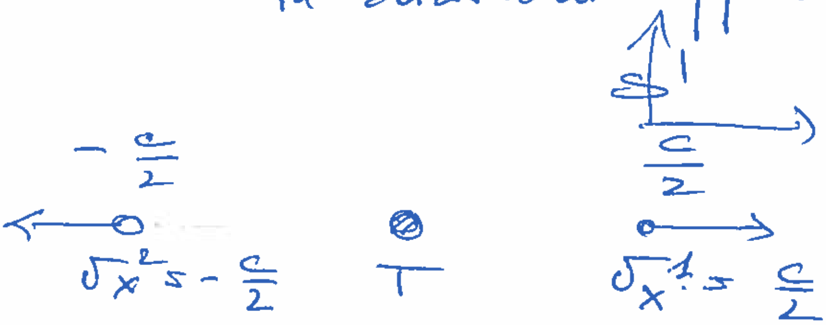
Attenzione qs legge si riferisce alla trasf. della velocità di un corpo con vel. $\vec{v}$ in S alla velocità rilevata in S'

Se ho due oggetti con vel. ~~relativa~~ v_1 e v_2 misurate nello stesso sist. di riferimento
La loro velocità relativa in quel sistema di riferimento è $d\vec{v} = \vec{v}_1 - \vec{v}_2$ (comp. classica)

→ qs non coincide con la velocità ~~di 1~~ rilevata nel sist. comovente con (1) o con (2) per nessuno degli effetti (A DIFF. DEL CASO CLASSICO)

Esempi

In S Astronave si allontanano dalla Terra con velocità $\frac{c}{2}$ e $-\frac{c}{2}$ in direzioni opposte –



* Velocità relativa delle astronavi ~~rispetto alla terra~~ per l'osservatore terrestre

$$\Delta v = \frac{c}{2} - \left(-\frac{c}{2}\right) = c$$

* Sia S' solidale con una delle due astronavi – $u = \frac{c}{2}$

Velocità rispetto ad S':

$$v_x'(1) = \frac{v_x(1) - u}{1 - \frac{v_x u}{c^2}} = \frac{\frac{c}{2} - \frac{c}{2}}{1 - \frac{c}{2}\frac{c}{2}\frac{1}{c^2}} = 0$$

$$v_x'(2) = \frac{v_x(2) - u}{1 + \frac{v_x u}{c^2}} = \frac{-\frac{c}{2} - \frac{c}{2}}{1 + \frac{c}{2}\frac{c}{2}\frac{1}{c^2}} =$$

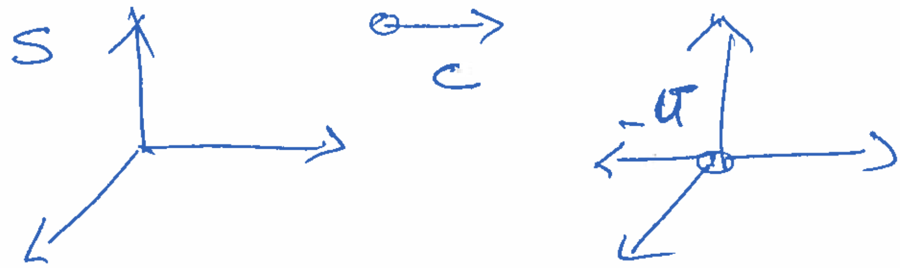
$$= -\frac{c}{1 + \frac{1}{4}} = -\frac{4}{5}c < c$$

[Nota: $v_x(2) = -\frac{c}{2}$, $u = \frac{c}{2}$ $\Rightarrow$ segno +]

Esempio 2

Sia $v_x = c$ in un riferimento S

e sia $-u$ la velocità relativa di S'



Secondo Galileo-NR: $v_x' = c + u > c$

Secondo relatività ristretta:

$$v_x' = \frac{v_x - u}{1 - \frac{u v_x}{c^2}} = \frac{c + v}{1 + \frac{cv}{c^2}} = \frac{c+v}{\frac{c+v}{c}}$$

$$= c\left(\frac{c+v}{c+v}\right) = c$$

Il corpo si muove con velocità c in tutti i SRI indip. dallo stato di moto (relativo) di S' —

Abbiamo semplicemente trovato che la legge di composizione di velocità è consistente con l'ip che c ~~cost~~ è invariante

(Come deve essere, visto che abbiamo ricavato le relazioni a partire da tali ipotesi)

Accelerazione

$$a_x = \frac{dv_x}{dt}$$

$$a_x' = \frac{dv_x'}{dt'}$$

$$v_x' = \frac{v_x - u}{1 - \frac{v_x u}{c^2}}$$

$$\frac{dv_x'}{dt'} = \frac{\dfrac{dv_x\left(1-\frac{uv_x}{c^2}\right) + (v_x - u)\frac{u\,dv_x}{c^2}}{\left(1-\frac{uv_x}{c^2}\right)^2}}{\cancel{\gamma}\,dt\left(1 - \frac{uv_x}{c^2}\right)} =$$

$$dv_x - \cancel{\frac{uv_x}{c}dv_x} + \cancel{\frac{uv_x dv_x}{c^2}} - \frac{u^2 dv_x}{c^2}$$

$$dv_x(1-\beta^2)$$

$$= \frac{dv_x}{dt}\,\frac{1}{\gamma^3}\,\frac{1}{\left(1-\frac{uv_x}{c^2}\right)^3}$$

$a_x' \neq a_x$ non è invariante relativistico

$\vec{F} = m\vec{a}$ non è invariante relativistico

→ bel problema nella Revisione delle leggi della dinamica