

DILATAZIONE DEL TEMPO

(18)

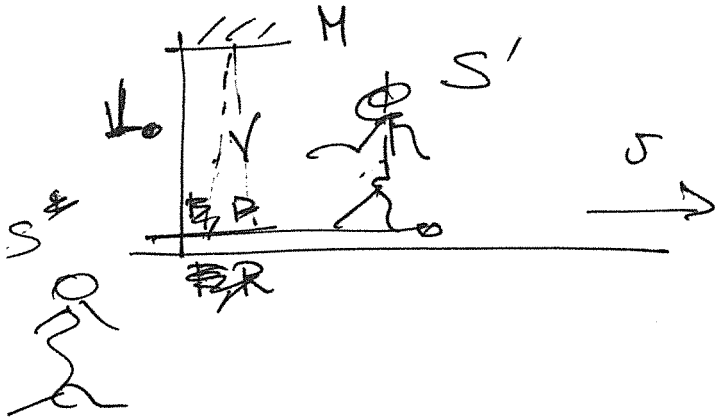
Conseguenza che può essere illustrata in modo analogo. —

Sistema con emettitore (E) specchio (M) ricevitore (R)

si muove con v

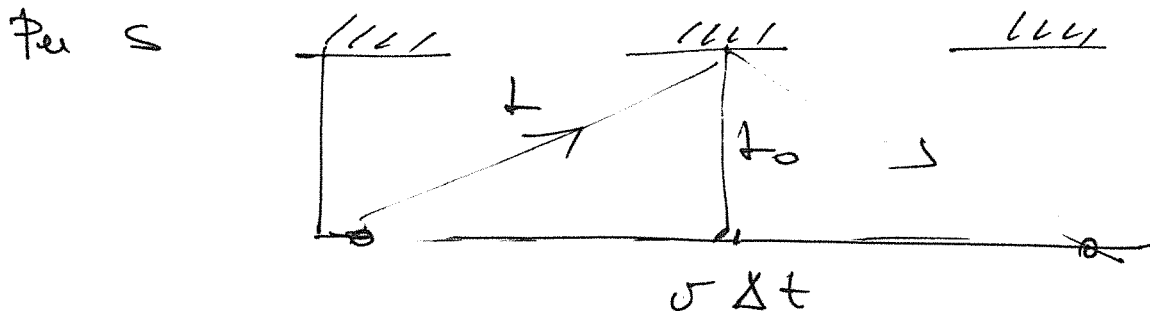
S' — sistema aereo

S — in sist. inerte



Per S' → lunghezza L_0

$$\Delta t_0 = \frac{L_0}{2c}$$



$$L^2 = L_0^2 + \left(\frac{v \Delta t}{2}\right)^2$$

ma $L = \frac{c \Delta t}{2}$

$$c^2 \Delta t^2 = 4 L_0^2 + v^2 \Delta t^2$$

$$c^2 \Delta t^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = 4 L_0^2$$

$$\Delta t = \frac{2 L_0}{c} \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

(2)

Dilatazione del tempo (ritardo del cronometro)
per l'osservatore in moto relativo

→ vede il cronometro in moto ~~con tempi~~
in "ritardo" di un fattore

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \geq 1 \quad \text{fattore di Lorentz}$$

Per $v \rightarrow 0 \quad \gamma \rightarrow 1 \quad \Delta t = \Delta t_0$ limite
"classico"

- Δt_0 = tempo proprio e' il minimo intervallo di tempo osservabile fra tutti SRI
- La direzione del moto e' irrilevante conta solo il modulo di v

In altri termini -

S' in moto  $t' = 0$

S fisso con molti orologi in phi phi  $t = 0$

⊗ OROLOGIO DI S' IN RITARDO PER S  $t > 0$

S vede l'orologio in moto S' in ritardo

x A ruoli invertiti: OROLOGIO DI S IN RITARDO PER S'

⇒ Oss. Condivisa: Per entrambi gli osservatori l'orologio in moto RITARDA rispetto al proprio orologio

Es. Volo Roma - S. Francisco

$$v = 1000 \text{ km/h}$$

$$T_0 = 10 \text{ h} \quad \leftarrow \text{tempo proprio}$$

Tempo per osservatore a terra ?
(confrontabile ritorno, trascurando effetti non inerziali)

$$T = \gamma T_0 = \frac{T_0}{\sqrt{1-\beta^2}} \approx T_0 \left(1 + \frac{1}{2}\beta^2\right)$$

$$(T - T_0) = \frac{1}{2}\beta^2 T_0$$

$$\Delta T = \frac{1}{2}\beta^2 T_0 \quad \text{ritardo dell'orologio del passeggero}$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{10^6 \text{ m} / 3.6 \times 10^3 \text{ s}}{3 \cdot 10^8 \text{ m/s}} \right)^2 \cdot 3.6 \times 10^3 \cdot 10 \text{ s}$$

$$= \frac{1}{2} \frac{10^7}{10^8} \text{ s} = \frac{1}{2} \cdot 10^{-1} \text{ s} \approx 15 \text{ ns} !$$

Effetto misurabile con
orologi di precisione

$\sim 10^{-7} \text{ s}$

Verifica sperimentale della dilatazione dei tempi ③

x Dilatazione dei tempi significativa per velocità
significative - $\beta = 0.99$, $\gamma = 10$

x Vita media dei μ cosmici

$$N(t) = N_0 e^{-t/\tau} \quad \text{legge del dec. radioattivo}$$

$$\tau_\mu = 2.2 \times 10^{-6} \text{ s} \quad (\text{tempo proprio})$$

distanza ~~media~~ di volo (senza dilatazione dei tempi) sarebbe $L_\mu = c\tau_\mu \approx 660 \text{ m}$

x Raggi cosmici prodotti in atmosfera a $\langle L \rangle \approx 10 \text{ km}$
di quota $\rightarrow$ dovrebbero decadere tutti prima
di arrivare al suolo (Volo ≈ 10 vite medie)

x Dilatazione del tempo per $\gamma = 10$

$$\tau'_\mu = \gamma \tau_\mu \approx 22 \mu\text{s}$$

$$L'_\mu = c\gamma \tau_\mu \approx 6.6 \text{ km}$$

$\rightarrow$ circa $\frac{1}{3}$ dei μ arriva al suolo prima
di decadere

$\rightarrow$ il flusso di muoni cresce con la
quota

Paradosso dei gemelli

(21)

x Gemello A sulla terra

x Gemello B sull'astronave a $v = c/2$

→ tornerà indietro

~~All'istante~~ A vede B in moto $\tau_B \rightarrow \gamma \tau_B$
e il tempo di B rallenta: B rimane giovane

B vede A in moto $\tau_A \rightarrow \gamma \tau_A$
il tempo di A rallenta: A rimane giovane

Quando si incontrano chi è più giovane?

x Soluzione B per andare e tornare deve cambiare direzione, non è inerziale nel corso del suo viaggio ~~long~~

Quindi l'analisi sopra non può essere applicata nei termini in cui è presentata

x L'evidenza sperimentale è che ~~il tempo si dilata~~!
Tempi si dilatano per sistemi come B

Spazio assoluto?

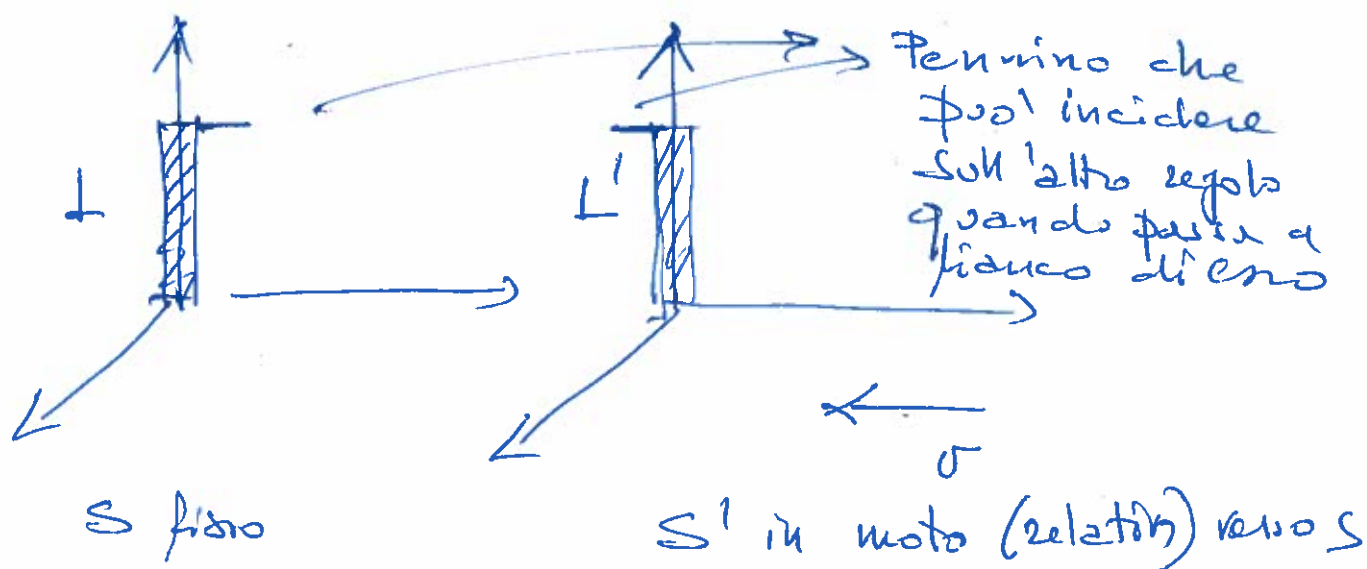
- L'analisi delle relazioni tra intervalli di tempo stabilisce che il tempo non è invariante relativistico.
- In modo ~~analogo~~ generale, per analogia, si può sospettare che le lunghezze dipendano dall'osservatore e che si debba rinunciare allo spazio assoluto.

Nell'analisi dell'orologio di Einstein abbiamo assunto che L_0 (lunghezza dell'orologio) invariante

→ Dimostriamo che le lunghezze trasversali al moto sono invarianti

ESPERIMENTO IDEALE (GEDANKEN) -

- Due sistemi in moto relativo con velocità v e con regoli di lunghezza $\perp$ identica (calibrati da fermo) disposti ortogonalmente alla direzione del moto.



x Immaginiamo (per ipotesi) che il sistema
fisso veda la lunghezza trasversa,
~~contatta nel sistema~~ di un oggetto in
moto relativo, contatta rispetto ad un
oggetto solidale con il sistema -

Descrizione di S

* $L' < L$ (L' è in moto rispetto
ad S ed è contatta
per ipotesi)

$\Rightarrow L'$ incide con il perimetro su L

Descrizione di S'

* Per reciprocità del moto S' vede L
in moto rispetto al proprio riferimento
solidale con $L' \Rightarrow L$ contatta

$$L < L'$$

$\Rightarrow L$ incide con il perimetro su L'

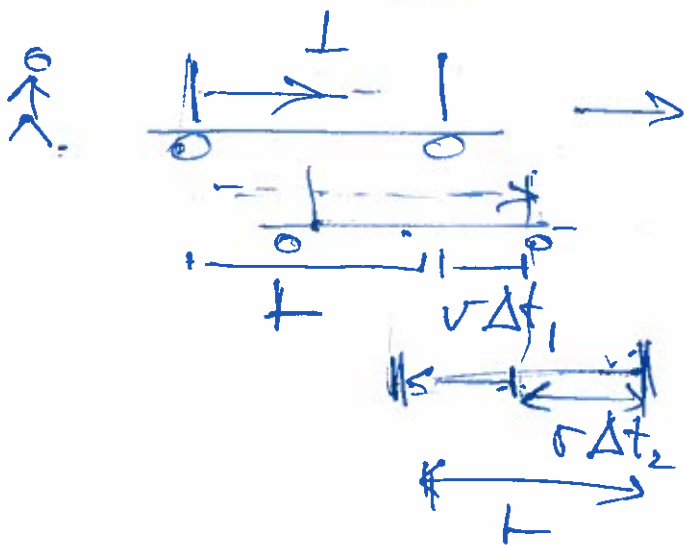
Confrontando i repli dopo essersi separati
i due osservatori avrebbero osservazioni riconciliabili
 $\rightarrow$ incompatibili con il principio di relatività
 $\Rightarrow$ LE LUNGHEZZE TRASVERSE ~~NON POSSONO~~ SONO INVARIANTI

CONTRAZIONE DELLE LUNGHEZZE (LONGITUDINALI)

x Stesso apparato usato per l'analisi degli intervalli di tempo, ma ~~osservato~~ parallelamente alla direzione del moto



$$\Delta t_0 = \frac{2L_0}{c} \quad \text{Rif. Solidale}$$



Distanza percorsa fino al 2° passaggio
 $c \Delta t_1 = L + v \Delta t_1$

Distanza percorsa per tornare al 2° scerito
 $c \Delta t_2 = L - v \Delta t_2$

$$\Rightarrow \left. \begin{aligned} \Delta t_1 &= \frac{L}{c-v} \\ \Delta t_2 &= \frac{L}{c+v} \end{aligned} \right\}$$

$$\Delta t = \Delta t_1 + \Delta t_2 = \frac{2L}{c} \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

D'altronde per la dilatazione dei tempi

$$\left. \begin{aligned} \Delta t &= \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{2L_0}{c} \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ \Delta t &= \frac{2L}{c} \frac{1}{1-\beta^2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow L = L_0 \sqrt{1-\beta^2}$$

x Il risultato $L = L_0 \sqrt{1 - \beta^2}$ coincide con la contrazione ipotizzata da Lorentz per giustificare l'ento dell'esperimento di Michelson e Morley

x Dunque l'ipotesi di relatività di Einstein ($c = \text{cost}$ e SRI) dà pienamente conto dell'esp. di Michelson-Morley

~~Il risultato~~ La contrazione delle distanze dà luogo a situazioni apparentemente paradossali con cui si dovrà fare l'abitudine nell'analisi di problemi relativistici -

Es. Astronave e tunnel (nascondiglio)

* Astronave di lunghezza propria $L_0 = 90 \text{ m}$ riceve l'ordine di passare ad alta velocità in un tunnel di lunghezza propria $d_0 = 60 \text{ m}$ per rendersi in visibile (per un istante) al fuoco nemico - il pilota c'è pieno



- 1) Quale $v < c$ minima viene comunicata dalla base (fing ~~il~~ e blicale con il tunnel) affinché l'astronave sia interamente contenuta nel tunnel?
- 2) A quella v , qual è la lunghezza del tunnel per l'osservatore sull'astronave?
- 3) Le osservazioni sono compatibili? (Nota: devono esserlo per il principio di relatività)

= Soluzione:

- 1) L'astronave è interamente contenuta per un istante, se in quell'istante ~~è~~ ~~stesso tempo per~~ la punta e la coda dell'astronave coincidono con l'inizio e la fine del tunnel (o ~~stanno all'istante~~)

L'evento è in A e in B sono simultanei per l'osservatore fino (controlla se l'astronave è contenuta in un determinato istante)



→ contrazione della lunghezza dell'astronave per osservatore fino

$$L = L_0 \sqrt{1 - \beta^2} \leq d_0$$

$$\sqrt{1 - \beta^2} \leq \frac{d_0}{L_0} \quad (**)$$

$$-\beta^2 \leq \left(\frac{d_0}{L_0}\right)^2 - 1$$

$$\beta \geq \left[1 - \left(\frac{d_0}{L_0}\right)^2\right]^{1/2} = \sqrt{1 - \left(\frac{60}{90}\right)^2} \approx 0.7$$

- 2) Per il pilota, il tunnel è in moto relativo rispetto all'astronave con velocità $v = \beta c$ (reciproca del moto). Dunque:

$$d = d_0 \sqrt{1 - \beta^2} = \frac{d_0^2}{L_0} = 40 \text{ m} \quad (\text{per } (**))$$

$d < d_0$ e' contratto

Per il pilota semberebbe che l'astronave non possa mai essere contenuta nel tunnel

- 3) Attenzione: per i due osservatori sono diverse sia le distanze, sia gli intervalli di tempo
- Per l'osservatore fermo gli eventi A e B (parto dell'astronave alla fine del tunnel e ~~arrivo~~ coda all'inizio) sono simultanei
 - Gli eventi non sono simultanei per il pilota

~~quando~~

Per riconciliare le descrizioni si deve tener conto degli intervalli di tempo

- questo richiede di stabilire, contemporaneamente, come si trasformano t e $\vec{r}^2$ per essere compatibili con il principio di relatività di Einstein

- Vogliamo cioè trovare la legge di trasformazione delle coordinate spatio-temporali (cartesiane) che devono sostituire le trasf. di Galileo

DERIVAZIONE DELLE TRASF. DI LORENTZ

A

• Trasf. delle coordinate spatio-tempo pu osservatori in SRI, compatibili con il principio di relatività e le Hp di Einstein:

- 1) Reciprocità del moto
- 2) costante di c in tutti i SRI

[2) sostituire ipotesi di tempo assoluto, 1) è come nella meccanica classica]

Per moto relativo rettilineo uniforme, la trasf. più generale ha la forma:

$$\begin{cases} x' = a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_{14}t \\ y' = a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + a_{24}t \\ z' = a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + a_{34}t \\ t' = a_{41}x + a_{42}y + a_{43}z + a_{44}t \end{cases}$$

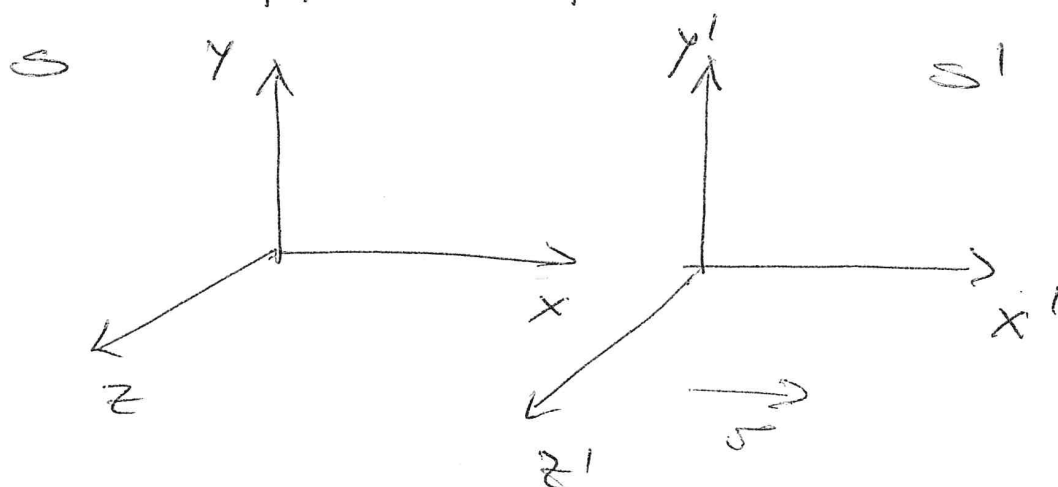
* Rappresenta rotazione degli assi; a_{ij} = coseni direttori (rotazione lorentz invariato Hr^2)

* Rappresenta traslazione dip. del tempo (γ cost)

* Generalizza la trasf. di Galileo ($a_{44} = 1$ e $a_{4i} = 0$) ad una ~~trasf.~~ rotazione 4D nello spatio-tempo (se vogliamo figurarcela in termini geometrici)

(2)

Per semplificare il problema assumiamo:



1) ~~Assi~~ Assi orientati con $x \parallel x'$ e allineati alla direzione del moto relativo che avviene con velocità v

2) $y' \parallel y$ e $z' \parallel z$ ed equivalenti

Poiché i due riferimenti non sono rotati e la direzione di moto è lungo x :

$$a_{12} = a_{21} = 0$$

$$a_{13} = a_{31} = 0$$

$$a_{24} = a_{34} = 0$$

~~y, z'~~ non dip da x e z, y
(non c'è rotazione)

y, z' non dipendono da t

Si ha per y' e z' :

$$y' = a_{22} y$$

$$z' = a_{33} z$$

(3)

Abbiamo osservato, nella lezione precedente, che le lunghezze nelle direzioni ortogonali al moto rimangono invariate $\Rightarrow d_{22} = d_{33} = 1$

In modo più formale, assumiamo che i coefficienti possano dipendere da v

$$d_{22} = d_{33} = \lambda(v)$$

Sono uguali tra di loro poiché y' e z' ($e y$ e z) possono ~~essere~~ essere scelti in modo completamente arbitrario nel piano ortogonale a x/x' .

Si ha; per la reciprocità del moto:

$$y' = \lambda(v)y \quad \text{e} \quad y = \lambda(-v)y'$$

$$y' = \lambda(v)\lambda(-v)y'$$

Scambiando il verso di x (la scelta del verso è arbitraria) otteniamo relazioni identiche ma con v al posto di $-v$ (cambiando ^{verso} x , cambia il verso di v):

$$y' = \lambda(-v)\lambda(v)y'$$

$$\text{Da cui } \lambda(-v) = \lambda(v) \quad \text{e} \quad \lambda^2 = 1 \Rightarrow \lambda = \pm 1$$

Avendo assunto y' e y equivalenti e $\lambda = 1$

$\Rightarrow$ Le coordinate trasversali sono invarianti!