Ricorda la riduzione a forza centrale

$F(r)$ con $\begin{cases} \vec{R} = \dfrac{m_1 \vec{r_1} + m_2 \vec{r_2}}{m_1 + m_2} \\ \vec{r} = \vec{r_1} - \vec{r_2} \end{cases}$

$$\begin{cases} \vec{r_1} = \dfrac{m_2}{M} \vec{r} \\ \vec{r_2} = -\dfrac{m_1}{M} \vec{r} \end{cases}$$

dim $\vec{L}_{TOT} = \vec{L_1} + \vec{L_2} = \mu r^2 \dfrac{d\theta}{dt} \hat{u}_z$

dim $E_K = \frac{1}{2} m_1 \vec{v_1}^2 + \frac{1}{2} m_2 \vec{v_2}^2$

$= \frac{1}{2} \mu (\vec{v} \cdot \vec{v})$

Dimostrazioni lasciate come esercizio

→ Cerco soluzione all'equazione del moto per una forza centrale

a) sol. generale

b) orbite nel caso di $F(r) \div \frac{1}{r^2}$ (orbite chiuse)

Nota: Eq del moto è eq. diff. di 2° grado → due ~~costanti del moto~~ condizioni iniziali $=$ $\boxed{\text{Posso usare costanti del moto} \rightarrow \text{definiscono in modo}}$

## Eq. DEL MOTO ;

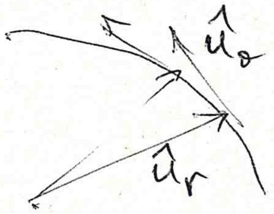
$$\mu \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = F(r)\,\hat{u}_r$$

- $\mu$ = massa (ridotta)
- $F(r)$ forza centrale (equivalente)

× Per f. centrale $L$ e $E_m$ costanti del moto, possiamo sfruttare qs. proprietà per risolvere il problema: $L$ e $E_m$ def. completamente la forma dell'orbita (Eq del moto 2° ord)

× In particolare $L = \mu r^2 \frac{d\theta}{dt} = cost$

Calcoliamo l'acc. nelle comp. radiale e tangenziale




ricordando che $d\hat{u}_r = d\theta\,\hat{u}_\theta$

$d\hat{u}_\theta = -d\theta\,\hat{u}_r$

$$\text{Acc.}\quad \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dr}{dt}\hat{u}_r + r\frac{d\theta}{dt}\hat{u}_\theta\right)$$

$$* a_r\hat{u}_r = \left[\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right]\hat{u}_r = \left[\frac{d^2r}{dt^2} - \frac{L^2}{\mu^3 r^2}\frac{1}{r}\right]\hat{u}_r \quad (*)$$

$$* a_\theta\hat{u}_\theta = \left[2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt} + r\frac{d^2\theta}{dt^2}\right]\hat{u}_\theta =$$

$$= \frac{1}{r}\frac{d}{dt}\left[r^2\frac{d\theta}{dt}\right]\hat{u}_\theta = \frac{1}{r}\frac{d}{dt}\left[\frac{L}{\mu}\right]\hat{u}_\theta = 0 \quad (**)$$

L'acc. tangenziale è nulla, poiché $L = \text{cost}$

quindi $\frac{dL}{dt} = 0$ in (**)

L'acc. radiale (*) contiene solo termini radiali, non contiene esplicitamente $\vartheta$ — L'eq. del moto diventa:

$$\mu \frac{d^2 r}{dt^2} - \frac{L^2}{\mu r^2}\frac{1}{r} = F(r) \qquad (\circledast)$$

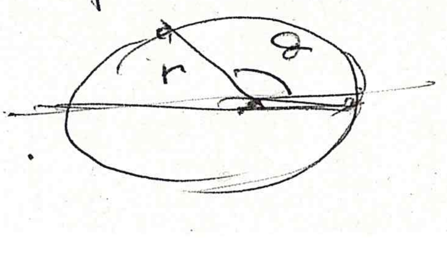
La cui soluzione è esprimibile in termini di $r = r(t)$. Il moto è però completam. definito se si ha anche $\vartheta = \vartheta(t)$, che può essere trovato dalla relazione:

$$\frac{d\vartheta}{dt} = \frac{L}{\mu r^2} \qquad (\circledast\circledast)$$

Risolvendo $(\circledast)$ e $(\circledast\circledast)$ si ha la soluzione completa, in forma parametrica

$$\begin{cases} r = r(t) \\ \vartheta = \vartheta(t) \end{cases}$$

La soluzione è più semplice, cercando $r = r(\vartheta)$ cioè la posizione radiale in funzione dell'angolo polare



Possiamo riformulare l'eq. del moto radiale pensando r come funzione di $\theta$ e sfruttando (***) -
Per $r = r(\theta(t))$, la derivata di funzione composta è:

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \frac{L}{\mu r^2}\frac{d}{d\theta}(r)$$

Derivata seconda:

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{dr}{dt}\right] = \frac{L}{\mu r^2}\frac{d}{d\theta}\left[\frac{L}{\mu r^2}\frac{dr}{d\theta}\right]$$

$$= \frac{L^2}{\mu^2 r^2}\frac{d}{d\theta}\left[\frac{1}{r^2}\frac{dr}{d\theta}\right] =$$

$$= -\frac{L^2}{\mu^2 r^2}\frac{d}{d\theta}\left[\frac{d}{d\theta}\frac{1}{r}\right]$$

$$= -\frac{L^2}{\mu^2 r^2}\frac{d^2}{d\theta^2}\left(\frac{1}{r}\right)$$

Sostituendo nell'equazione del moto radiale per la forza gravitazionale:

$$-\frac{L^2}{\mu \cancel{r^2}}\left[\frac{d^2}{d\theta^2}\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{1}{r}\right] = -G\frac{m_1 m_2}{\cancel{r^2}}$$

Nota: Il procedimento vale per qualsiasi forza centrale, ma la soluzione esplicita di orbite chiuse solo per

Per la gravità $r^2$ si semplifica eq.

$$\frac{d^2}{d\theta^2}\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{1}{r} = \underbrace{\frac{G\mu^2 M}{L^2}}_{\text{costante per il moto}}$$

costante per il moto
intensità della forza e
momento angolare

Sostituiamo $\cancel{x} = \frac{1}{r}$ :

$$\frac{d^2x}{d\theta^2} + x = \frac{G\mu^2 M}{L^2} \qquad (+)$$

→ Eq. di un oscillatore armonico forzato
con frequenza propria unitaria $\omega_0^2 = 1$
e con Forzante costante $F_0 = F_0 \cos(\omega\theta)$ con $\omega =$

→ Soluzione : int. generale per l'omogenea associata

$$\frac{d^2x}{d\theta^2} + x = 0 \longrightarrow x = A\cos\theta$$

→ Soluzione particolare di (+) Si verifica per sostituzione in (+)

$$x = \frac{G\mu^2 M}{L^2} \qquad \frac{d^2x}{d\theta^2} = 0$$

Soluzione:

$$x(\theta) = A\cos\theta + \frac{G\mu^2 M}{L^2}$$

Ossia:

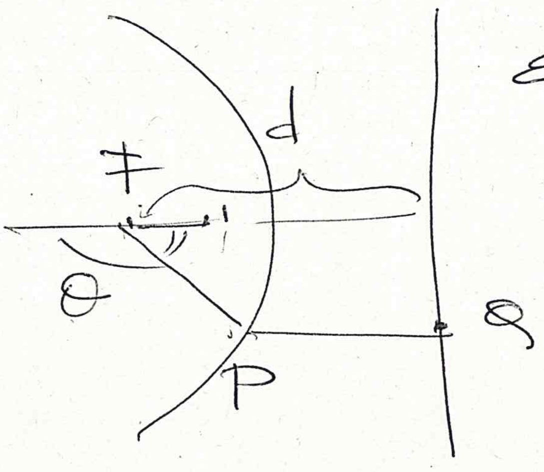
$$\frac{1}{r} = A\cos\theta + \frac{G\mu^2 M}{L^2}$$

Eq. di una conica in coordinate polari

Interpretazione geometrica: CONICHE

~~Caso~~

Luogo dei punti con rapporto delle distanze da un punto fisso F (fuoco) e una retta (generatrice) costante




$$\varepsilon = \frac{PF}{PQ} = \text{eccentricità} = \text{cost}$$

$$\varepsilon = \frac{r}{d + r\cos\theta} \qquad (1)$$

$d$ e $\varepsilon$, parametri geometrici della curva

Da (1) $\varepsilon d + \varepsilon r\cos\theta = r$

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{\varepsilon d} - \frac{\cos\theta}{d} \quad \leftarrow \text{conica}$$

Coniche:

$\varepsilon < 1$ ellisse (*) orbite chiuse (di Keplero)
$\varepsilon = 1$ parabola
$\varepsilon > 1$ iperbole } orbite aperte

Per $\varepsilon < 1$: $\varepsilon d = a\,[1-\varepsilon^2]$

$a$ = semiasse maggiore

$$\frac{b}{a} = \sqrt{1-\varepsilon^2} = \begin{cases} 0.999 & \text{Ter} \\ 0.96 & \text{Plut} \end{cases}$$

Confrontando con ~~l'eq. del moto~~ le soluzioni dell'equazione del moto:

$$\varepsilon d = \frac{L^2}{G\mu^2 M}$$

* $L^2 = G\mu^2 M\,\varepsilon d$ ← costante del moto

* Nel caso di orbita ellittica:

$$L^2 = G\mu^2 M a(1-\varepsilon^2)$$

(*) Eccentricità nulla per il cerchio (b/a=1)

# Traiettorie e Leggi di Keplero

1ª legge : $\longrightarrow$ orbite ellittiche

2ª legge : $\longrightarrow$ $L = cost \Rightarrow \frac{dA}{dt} = cost$

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\theta}{dt} = \frac{L}{2\mu} \qquad (3)$$

3ª legge : $\longrightarrow$ Valutiamone la validità nel caso generale di orbita ellittica.

$$\frac{dA}{dt} = \frac{A}{T} = \frac{\pi a b}{T} = \frac{\pi a^2 (1-\varepsilon^2)^{1/2}}{T}$$

Combinando con (3):

$$\frac{L^2}{4\mu^2} = \frac{\pi^2 a^4 (1-\varepsilon^2)}{T^2}$$

Sostituendo il risultato per L dell'orbita

$$\frac{G\mu^2 M a (1-\varepsilon^2)}{4\mu^2} = \frac{\pi^2 a^4 (1-\varepsilon^2)}{T^2}$$

$$\Rightarrow T^2 = \frac{4\pi^2}{GM} a^3$$ – Risultato di Newton per orbita circolare

- La forma dell'orbita è completamente definita da $L$ e $E_M$ (2 cost — per 2 gradi di libertà)

- $E_M = E_K + E_P =$

$$= \frac{1}{2}\mu v^2 - \frac{G\mu M}{r}$$

[Infatti $E_K = \frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2 =$

$$= \frac{1}{2}m_1\left(\frac{m_2}{M}\right)^2 v^2 + \frac{1}{2}m_2\left(\frac{m_1}{M}\right)^2 v^2 = \frac{1}{2}\mu v^2 \text{]}$$

- Vogliamo la relazione tra $E_M$ e i parametri dell'orbita $\varepsilon$ e $d$, come l'abbiamo trovata per $L$, in modo da definire le prop. dell'orbita. A tal fine esprimiamo $E_K$ in termini di $r$.

Per le orbite circolari sappiamo (abbiamo visto che) $E_K = \frac{1}{2}|E_p|$, ma in gen. caso il problema è più complicato. $E_p$ e $E_K$ non sono costanti lungo l'orbita. Solo $E_M$ è costante.

Per ~~risolvere~~ raggiungere il ns. obiettivo, scomponiamo ~~$v^2$~~ $E_K$ nelle componenti radiale e angolare.

$$E_k = \frac{1}{2}\mu(\vec{v}\cdot\vec{v}) =$$

$$= \frac{1}{2}\mu\left[\frac{dr}{dt}\hat{u}_r + \frac{r\,d\vartheta}{dt}\hat{u}_\vartheta\right]\cdot\left[\frac{dr}{dt}\hat{u}_r + \frac{r\,d\vartheta}{dt}\hat{u}_\vartheta\right]$$

$$= \frac{1}{2}\mu\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2}\mu r^2\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2$$

Componente angolare:

$$E_k(\text{ang}) = \frac{1}{2}\mu r^2\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 = \frac{1}{2}\mu r^2\frac{L^2}{\mu^2 r^4} =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{L^2}{\mu}\frac{1}{r^2} = \frac{1}{2}\frac{L^2}{\mu}\left[\frac{1}{\varepsilon d} - \frac{\cos\vartheta}{d}\right]^2$$

Comp. radiale:

$$E_k(\text{rad}) = \frac{1}{2}\mu\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = \frac{1}{2}\mu\left(-r^2\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{r}\right)\right)^2$$

$$= \frac{1}{2}\frac{L^2}{\mu}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{r}\right)\right]^2 = \frac{1}{2}\frac{L^2}{\mu}\frac{\sin^2\vartheta}{d^2}$$

Energia potenziale (ricordo $L^2 = G\mu^2 M\varepsilon d$

$$E_p = -\frac{G\mu M}{r} = -\frac{L^2}{\mu\varepsilon d}\frac{1}{r} = -\frac{1}{2}\frac{L^2}{\mu}\frac{2}{\varepsilon d}\left[\frac{1}{\varepsilon d} - \frac{\cos\vartheta}{d}\right]$$

## Energia meccanica

$$E_m = \frac{1}{2}\frac{L^2}{\mu}\left[\frac{\sin^2\vartheta}{d^2} + \frac{1}{(\varepsilon d)^2} \cancel{- \frac{2\cos\vartheta}{\varepsilon d^2}} + \frac{\cos^2\vartheta}{d^2} - \frac{2}{(\varepsilon d)^2} \cancel{+ \frac{2\cos\vartheta}{\varepsilon d^2}}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\frac{L^2}{\mu}\left[\frac{1}{d^2} - \frac{1}{(\varepsilon d)^2}\right] = \frac{1}{2}\frac{L^2}{\mu}\,\frac{\varepsilon^2 - 1}{\varepsilon^2 d^2}$$

Poiché $L^2 = G\mu^2 M \varepsilon d$ !

$$E_m = -\frac{1}{2} G\mu M \left(\frac{1-\varepsilon^2}{\varepsilon d}\right)$$

$\varepsilon < 1$ $\quad E_m < 0$ $\quad$ orbita chiusa ellittica $E_m < 0$

$\varepsilon = 1$ $\quad E_m = 0$ $\quad$ parabola orbita aperta

$\varepsilon > 1$ $\quad E_m > 0$ $\quad$ iperbole, orbita aperta

Se $\varepsilon < 1$, $\dfrac{\varepsilon d}{1-\varepsilon^2} = a$ $\quad$ semiasse maggiore dell'orbita

$$\boxed{E_m = -\frac{1}{2}\frac{G\mu M}{a}}$$

L'energia meccanica dipende solo da $a$ e non dall'ecc. dell'orbita

Per orbite ellittiche:

$$E_m = -\frac{1}{2}\frac{G\mu M}{a} \Rightarrow a = -\frac{1}{2}\frac{G\mu M}{E_m}$$

$$L^2 = G\mu^2 M\, a(1-\varepsilon^2)$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2}\frac{(G\mu M)^2}{E_m}}_{\text{costanti definite da } E_m}\mu(\varepsilon^2-1)$$

→ ecc. dipende da $L^2$

→ orbite con $E_m$ fissata hanno tutte lo stesso semiasse maggiore, ma l'eccentricità dell'orbita è determinata da $L^2$

Per orbite circolari si è visto che

$$E_m = -\frac{G\mu M}{2r} = \frac{1}{2}E_p < 0$$

$$E_K = E_m - E_p = -\frac{1}{2}E_p > 0$$

Fissando $E_m$ è fissato $r$ (cioè $a$, per $\varepsilon = 0$)

La relazione per orbite circolari:

$$E_K = -\frac{1}{2} E_p \longrightarrow \boxed{2E_K + E_p = 0}$$

si dimostra vera anche per i valori medi dell'energia cinetica e potenziale di orbite qualunque (nota: $E_K$ ~~è costante su un~~ e $E_p$ sono costanti su una orbita circolare, ma non su un orbita qualunque)

Inoltre la relazione è vera anche per un sistema di N-corpi in cui agisce solo $F \div 1/r^2$

$$2\langle E_K \rangle + \langle E_p \rangle = 0$$

rappresenta la condizione di equilibrio (orbite stabili) per il sistema (teorema del viriale).

Per stelle nei dintorni del sole, ($\simeq 10^5$ stelle osservabili con tecniche trigonometriche) si può scrivere

$$\sum_i m_i v_i^2 - \sum_{i<j} \frac{m_i m_j}{r_{ij}} = 0$$

Questa equazione può essere verificata usando la misura delle velocità relative delle stelle e delle distanze usando metodi trigonometrici (posizione angolare al variare della posizione della terra sull'orbita) e stimando $m_i$ dalla luminosità stellare

La relazione non è soddisfatta. La materia luminosa è circa 1/3 della materia necessaria