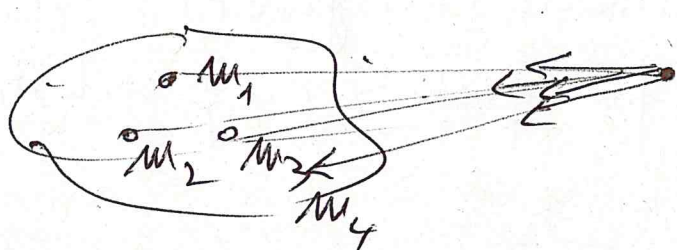


(1)

Forza di gravità tra corpi estesi



$$\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i$$

$$\vec{F} = - \sum_i G \frac{m_i m_0}{r_{i0}^2} \hat{u}_{r_{i0}}$$

- Per una distribuzione continua $m_i \rightarrow dm$ e per tramite della densità $dm = \rho dV$ - In genere $\rho = \rho(r)$, funzione del posto

$$\vec{F}_M = - \int_M G \frac{m dm(r)}{r^2} \hat{u}_r = - \int_V G \frac{\rho(r) dV}{r^2} \hat{u}_r$$

Integrazione su r con $\rho(r)$, $\frac{1}{r^2}$ e $\hat{u}_r$ funzioni di r - Situation molto complicata -

- Se anche M è un corpo esteso, complicazioni ulteriori. F risultante tra i due corpi è la somma vettoriale di tutte le forze tra tutte le coppie di punti

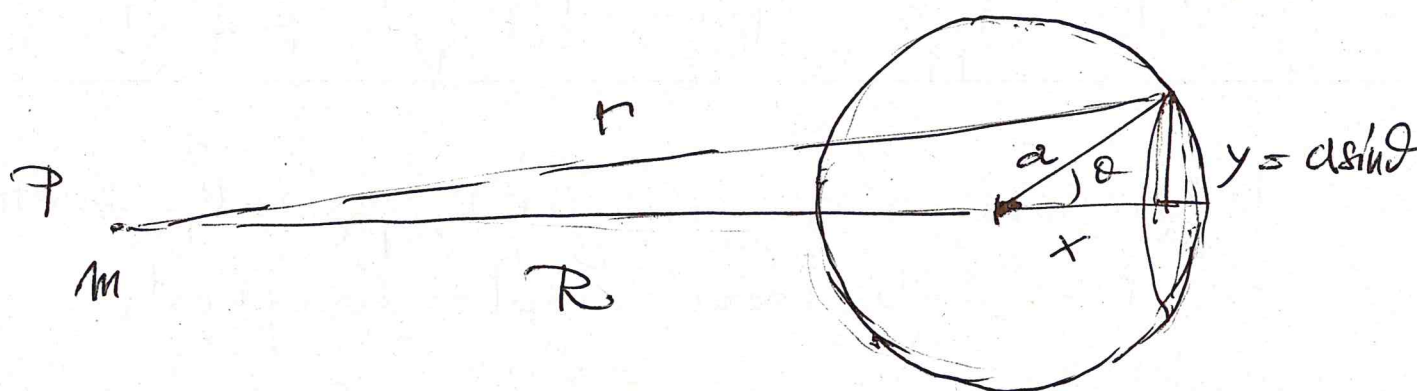
$$\vec{F} = - \int_{V_1} \int_{V_2} G \frac{\rho_1 \rho_2}{r_{12}^2} \hat{u}_{r_{12}} dV_1 dV_2$$

Situazione più semplice per corpi a SIMMETRIA
SFERICA (ed eventualmente omogenei)

→ buona approx per pianeti e corpi celesti

Inoltre, poiché $\vec{F} = -\vec{\nabla} \Phi_P$ è univocamente determinata da Φ_P , conviene calcolare Φ_P evitando le complicazioni del calcolo vettoriale

- Φ_P tra massa puntiforme m e SFERA CAVA (calcolo su Flatté-Resnik):



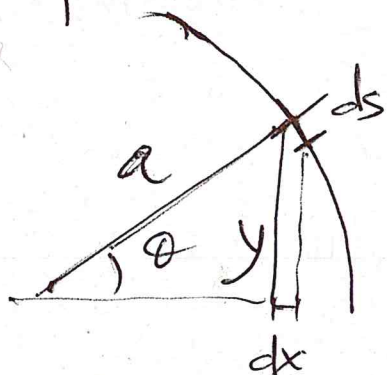
Sfera cava di raggio a e massa M -

Omogenea $\rightarrow \mu = M/4\pi a^2$ densità superficiale di massa

Per motivi di simmetria $\vec{F}$ è diretta lungo la congiungente tra P e il centro della sfera - [Componenti ortogonali di $\vec{F}$ si elidono]

Poiché F è diretta lungo R ($\vec{F} = F \hat{u}_R$),⁽²⁾
l'energia potenziale varia lungo R (superfici
equipotenziali hanno R costante) -

Per mantenere la simmetria, calcoliamo E_p
a partire dal contributo dell'interazione tra
 m e un anello della sfera di raggio y
e spessore ds .



$$y = a \sin \theta$$

$$dx = ds \sin \theta$$

$$dm = \mu 2\pi y ds =$$

$$dm = \mu 2\pi a \sin \theta ds =$$

Massa dell'anello: $dm = \mu 2\pi a dx$

Distanza dei punti dell'anello da P :

$$r^2 = (R + x)^2 + y^2 = R^2 + 2Rx + a^2$$

Variazioni della distanza (differentiabili):

$$d(r^2) = 2r dr = d(R^2 + 2Rx + a^2)$$

$$= 2R dx \quad [R \text{ e } a \text{ sono fissi}]$$

Dunque $dx = \frac{r dr}{R}$ e possiamo esprimere la massa dell'anello in funzione di r :

$$dm(r) = \frac{\mu 2\pi a}{R} r dr$$

L'energia potenziale tra due masse elementari a distanza r è (tutti i punti dell'anello distano r)

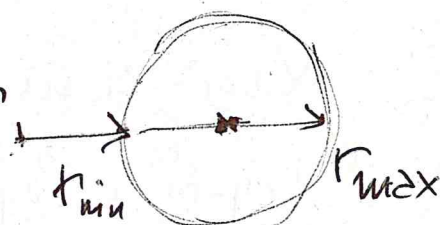
$$E_p(r) = - \frac{G m dm}{r}$$

Sostituendo l'espressione di dm :

$$E_p(r) = - \frac{G M \mu 2\pi a}{R} dr$$

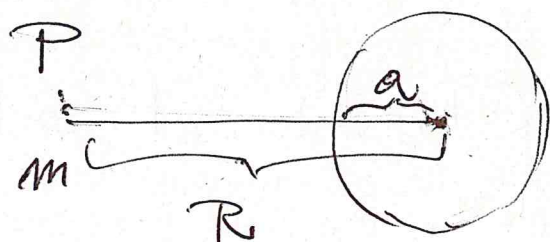
L'energia potenziale complessiva, dovuta a tutta la sfera cava, si ottiene sommando (cioè facendo l'integrale) su tutti gli anelli

$$E_p = - \frac{G M \mu 2\pi a}{R} \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} dr$$



Due situazioni differenti :

1) P esterno alla sfera cava :



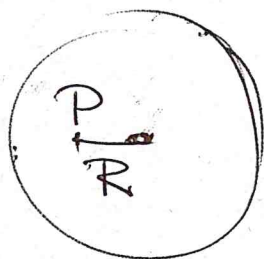
$$\begin{cases} r_{\min} = R - a \\ r_{\max} = R + a \end{cases}$$

$$E_p = - \frac{G m \mu 2\pi a}{R} \int_{R-a}^{R+a} dr = - \frac{G m \mu 2\pi a}{R} [(R+a) - (R-a)]$$

$$= - \frac{G m \mu 4\pi a^2}{R} = - \frac{G m M}{R}$$

- En. potenziale equivalente a punto materiale di massa M nel centro

2) P interno alla sfera :



$$\begin{cases} r_{\min} = a - R \\ r_{\max} = R + a \end{cases}$$

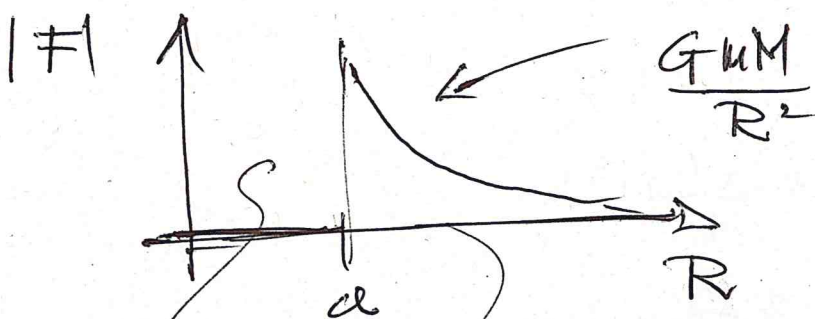
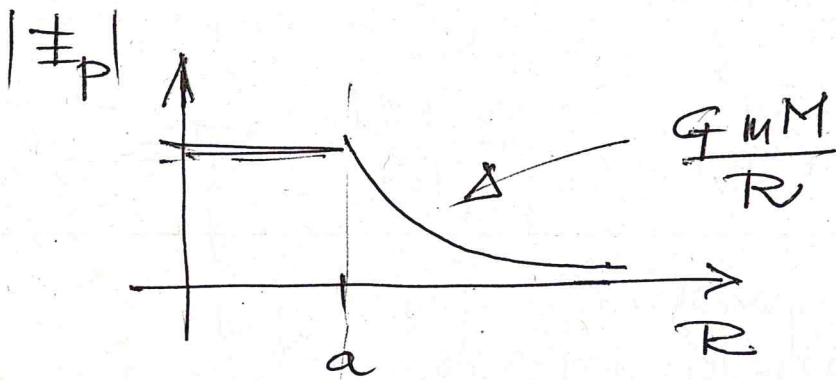
$$E_p = - \frac{G m \mu 2\pi a}{R} \int_{a-R}^{a+R} dr = - G m \mu 4\pi a$$

$$= - \frac{G m M}{a} \rightarrow \text{costante indep da } R$$

Per la forza $F(R) = -\frac{dE_p}{dR}$

$$F(R) = \begin{cases} 0 & \text{per } R < a \quad \text{P. interno} \\ -\frac{GMm}{R^2} & \text{per } R > 0 \quad \text{P. ext} \end{cases}$$

Nota: per $R = a$ il risultato per P interno e P esterno coincidono



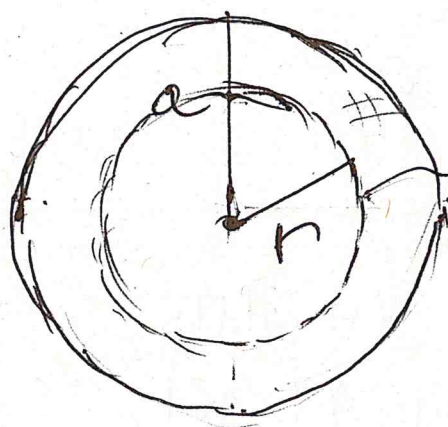
$F=0$

Comportamenti
come pts materiali

STERA PIENA

omogenea di raggio a

4



$dm(r)$

massa di una sfera
cara (guscio) di raggio r

$$M = \int_0^a dm(r)$$

Somma (infinita) di
gusci sferici di
spessore infinitesimo

Per ciascun guscio l'espressione della forza su
un punto di massa m è:

$$dF(dm) = \begin{cases} 0 & \text{per } R < r \\ -\frac{Gmdm}{R^2} & \text{per } R > r \end{cases}$$

La forza complessiva è la somma (integrale) di
tutte le forze dovute a ciascun guscio (concentrici
e dunque permane la simmetria del problema)

$$F = \int_0^R dF(r) = -\frac{Gm}{R^2} \int_0^R dm$$

Due casi a seconda di R interno o ext. alla sfera

Caso A: Punto esterno alla sfera ($R \geq a$)

$$F = - \frac{G M}{R^2} \int_0^a dm = - \frac{G M}{R^2} M$$

Risultato equivalente alla forza esercitata da un punto materiale di massa M nel centro della sfera. Il risultato è ovvio, indipendentemente dagli aspetti formali della integrazione: il punto è esterno a tutti i gusci e F relativa a ciascun guscio dipende solo da R (identico per tutti i gusci, purché riferito al centro) e dalla massa del guscio, ma non dal raggio del guscio. Dunque per la sfera l'unica dipendenza è dalla somma delle masse dei gusci, cioè la massa totale.

Caso B: Punto interno alla sfera ($R < a$)

I gusci a $r > R$ non danno contributo a F ($F = 0$ per punti interni al guscio).

Solo la massa contenuta a raggi $r < R$ contribuisce alla forza -



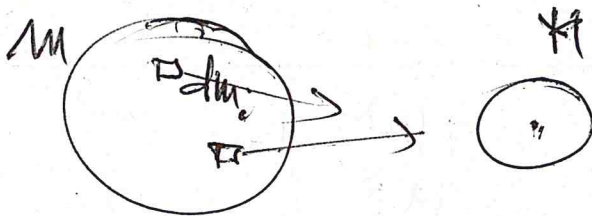
(5)

All'interno delle sfere forza centrale elastica

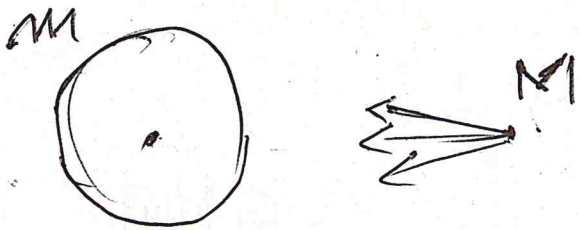
$$F(R) = - \frac{GMm}{a^3} R \quad R < a$$

Per un punto esterno alle sfere, la forza è equivalente a quella tra due punti materiali —

— Generalizzazione a corpi sferici omogenei



1) Per ogni elemento dm , la sfera di massa M' è equivalente a un po. materiale nel centro



2) Azione - Reazione:
Forza tra M (equivalente) e sfera m

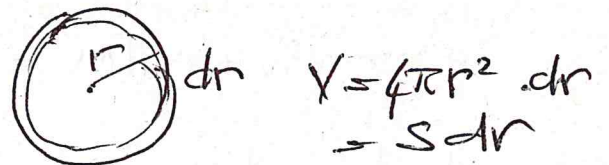
3) Dimostrato che per punto e sfera, la forza è equivalente a $F = - \frac{GMm}{R^2}$

con R distanza tra i centri

$$F = - \frac{GM}{R^2} \int_0^R dm$$

Per sfera omogenea : $\rho = \frac{M}{V} = \frac{M}{\frac{4\pi}{3}a^3}$ e la massa di un guscio di raggio r e spessore dr

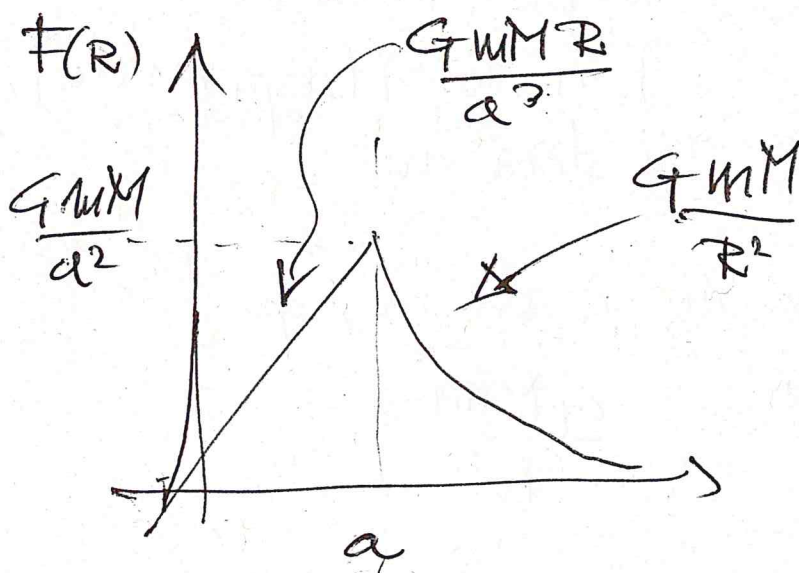
$$dm = \rho 4\pi r^2 dr$$



$$F = - \frac{GM}{R^2} \int_0^R \rho 4\pi r^2 dr = - \frac{GM 4\pi \rho}{R^2} \int_0^R r^2 dr$$

$$= - \frac{GM 4\pi \rho}{R^2} \frac{R^3}{3} = - \frac{GM M}{a^3} R$$

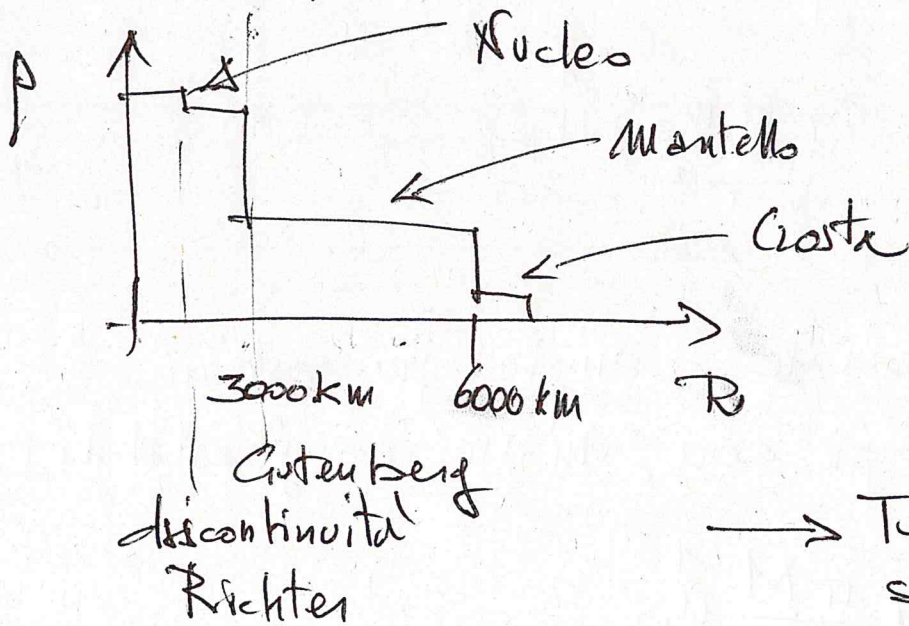
Forza per sfera omogenea :



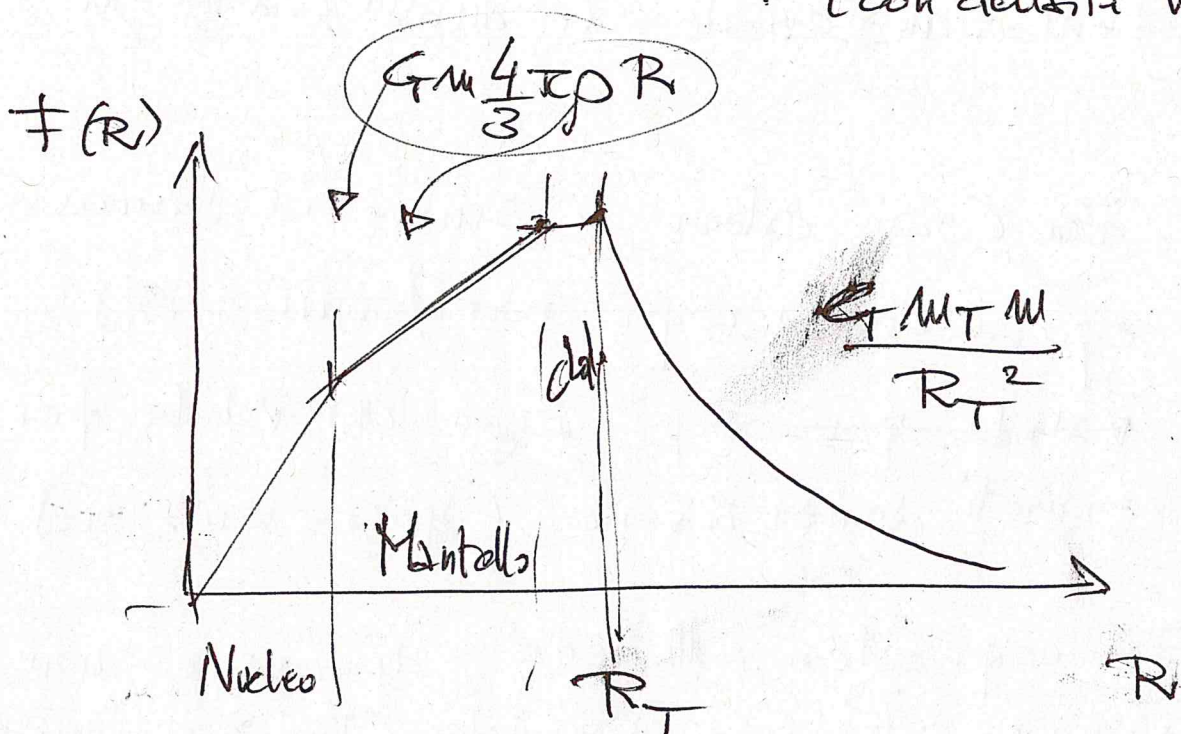
$$F(R) = \begin{cases} - \frac{GMmR}{a^3} & \text{ext.} \\ - \frac{GMm}{R^2} & \text{int.} \end{cases}$$

Sfera non omogenea, a SIMMETRIA SFERICA (Terza) (6)

Tema: profilo di densità variabile con R



→ Tuttavia sistema a simmetria sferica vale ancora la soluzione a gusci (con densità variabile)



Ricapitolando :

1) Leggi di Keplero $\rightarrow$ legge di Forza

$$\vec{F} = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \hat{u}_r \quad (*)$$

2) Legge universale, anche per sistemi di due corpi con masse confrontabili

$$\vec{F}_\mu = -G \frac{\mu M}{r^2} \hat{u}_r$$

Centro delle forze = centro di massa
Punto materiale di massa ridotta μ

3) ~~Per~~ Corpi esteri a simmetria sferica
equivalenti a corpi puntiformi ~~ok~~
~~Valida per corpi~~ Legge (*) valida per
pianeti senza libere (approx unif. ok)

4) Per corpi esteri sulla Terra, di forme non
sferica, $\vec{F}$ sono parallele ($R_T \gg$ dimensioni
oggetti) $\rightarrow$ Per teorema Cdm risultante
 $F_{ext}(P_{ext})$ agisce su Cdm come se tutta
la massa fosse in quel punto

Applicazione 1 : Orbite circolari (e velocità) ⁽⁷⁾
di un sistema di punti orbitanti entro una
distribuzione di massa omogenea sferica di raggio R_0

$$R < R_0 \quad F(R) = \frac{GM M}{R_0^3} R$$

Acc. centripeta su orbita circolare di raggio R

$$M \frac{v^2}{R} = \frac{GM M}{R_0^3} R$$

$$v^2 \div R^2 \rightarrow \boxed{v \div R}$$

La velocità è proporzionale a R - In altri
termini la velocità angolare è identica
per ogni orbita circolare : $v = \omega R$

Il sistema è COROTANTE - Tutti i corpi
orbitanti si muovono su orbite con velocità
cost. ω , come se si trattasse di un 'corpo rigido'

→ È il moto che si osserva per le stelle
nel centro delle galassie $\Rightarrow$ Le stelle sono
all'interno di una DISTRIBUZIONE DI MASSA
OMOGENEA ($\rho = \text{costante}$)

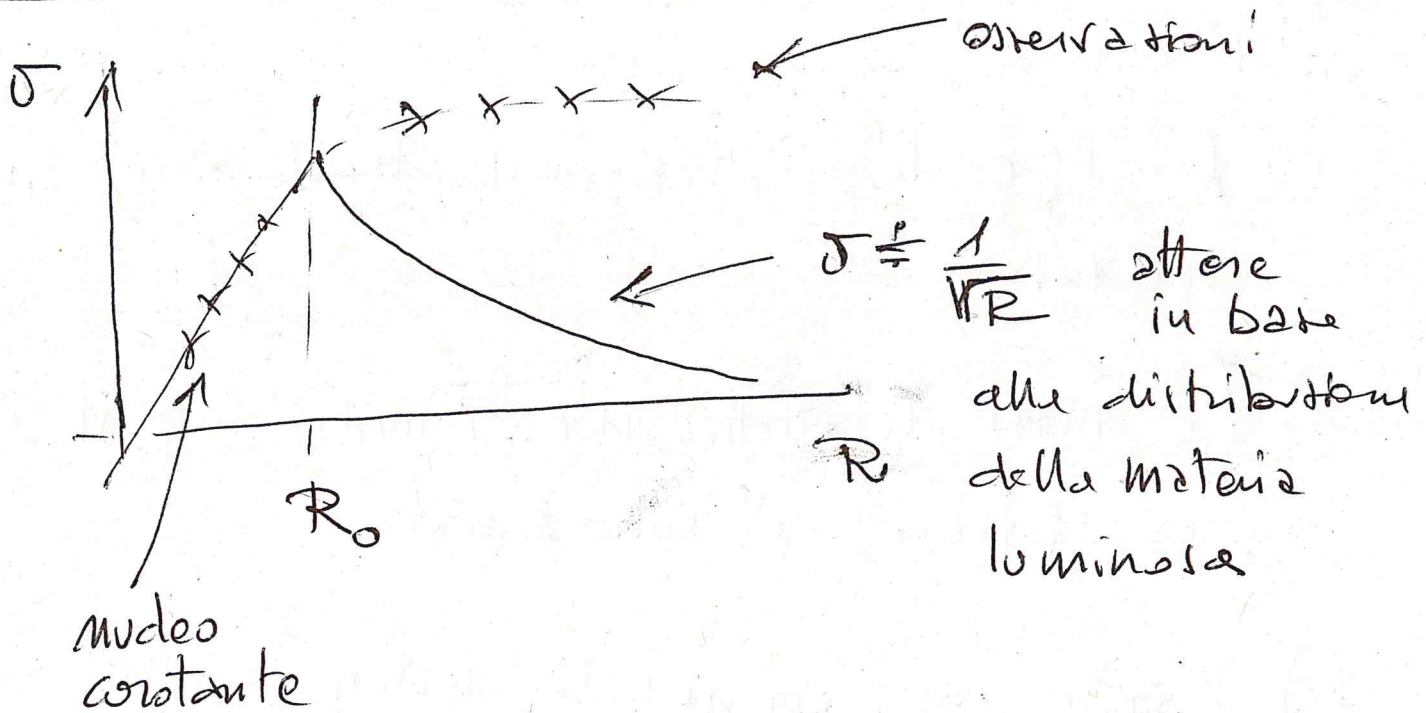
Applicazione 2 : Velocità di un sistema di corpi orbitanti a $R > R_0$

— spostamenti delle stelle nei bracci delle galassie o nelle regioni lontane dal nucleo

$$m \frac{v^2}{R} = \frac{G M m}{R^2} \Rightarrow v \propto \frac{1}{\sqrt{R}}$$

La velocità diminuisce allontanandosi dal centro galattico (orbite kepleriane come per un sistema planetario con massa concentrata nel sole)

- x Galassie a spirale caratterizzate da un disco piatto con nucleo luminoso (costante) e da un alone sferico — Si definisce raggio ottico R_0 la distanza dal centro del disco a cui la luminosità diventa uguale alla luminosità di fondo cosmico, cioè dove la materia luminosa non è più distinguibile
- x Ci si attende che per $R > R_0$, v degli corpi celesti diminuisce come $1/\sqrt{R}$ (rivelati in banda radio, visto che non sono visibili in banda ottica fuori dal raggio ottico)

Risultati osservazionali

Si osserva che per $R > R_0$ $\sigma = \text{cost.}$

→ distribuzione di massa (simmetria sferica):

$$\frac{M \sigma^2}{R} = \frac{G M M(R)}{R^2} \Rightarrow M(R) \propto R$$

La massa contenuta entro un disco di raggio R continua a crescere, proporzionalmente a R , ben oltre la dimensione del legge ottico [Nota, la massa cresce con R , ma il volume con R^3 . La densità diminuisce allontanandosi, ma non è nulla]

Questa massa, legata gravitazionalmente alla galassia, non è visibile $\Rightarrow$ MATERIA OSCURA

Possibilita'

- 1) La legge di gravitazione richiede una modifica
- 2) La massa di oggetti non luminosi (planeti, gas, polveri) e' sottovalutata
- 3) Esiste una forma di materia con proprieta' di interazione non note (si gravitazione, no e.m., ...)

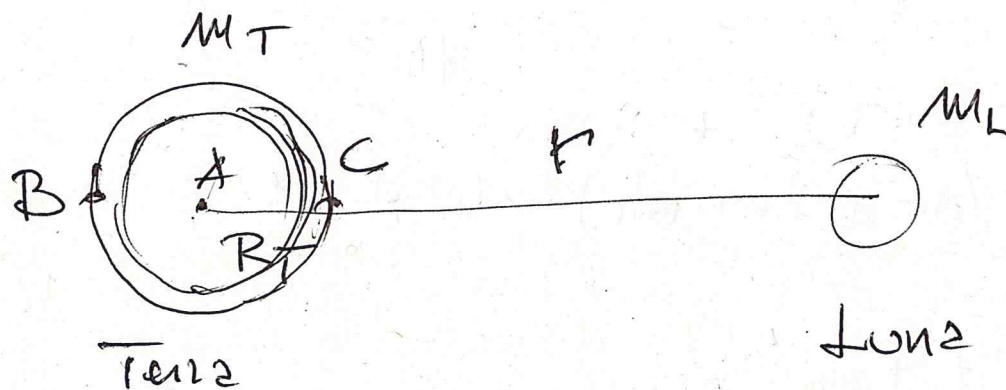
Vi sono altre ~~per~~ indicazioni cosmologiche di materia oscura -

La ricerca di materia oscura "corpuscolare" e' un fronte vivace della ricerca -

- * indiretta $\rightarrow$ interazioni rare di urti su nuclei di materia ordinaria
- * diretta $\rightarrow$ produzione a collider di particelle (LHC)

Forze di Marea

(9)



Scomponiamo M_T in elementi dm_A, dm_B, dm_C e calcoliamo interazioni tra luna (puntiforme) e i punti A, B, C -

$$F_A = \frac{G M_L dm}{r^2}$$

$$F_{B,C} = \frac{G M_L dm}{(r \pm R_T)^2} \approx \frac{G M_L dm}{r^2} \left(1 \mp 2 \frac{R_T}{r}\right) \quad (*)$$

$$\left[\text{Usata approx: } (r \pm R_T)^2 = r^2 \left(1 \pm \frac{R_T}{r}\right)^2 = r^2 \left(1 \pm 2 \frac{R_T}{r} + \frac{R_T^2}{r^2}\right) \text{ trascurabile} \right]$$

Differenza di Forza tra i punti -

Il punto A "cade" verso la luna con accelerazione centripeta F_A - Il moto di B e C nel riferimento di A include la forza reale F_B e F_C di (*) e $F_{app.}$

$$F_{app} = -dm a_{NI} = -dm \frac{F_A}{dm} = -F_A$$

Nel riferimento (non inerziale) di A :

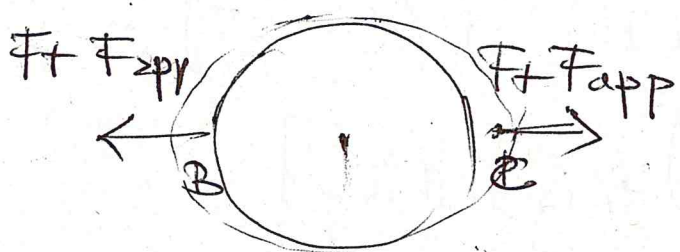
$$F'_{B,c} = F_{B,c} + F_{app} =$$

$$= F_{B,c} - F_A =$$

$$= F_A \left(1 - \frac{2R_T}{r} \right) - F_A$$

$$= -2F_A \frac{R_T}{r} \quad \text{Segni opposti}$$

→ l'acqua si solleva da entrambe le parti



$$- \frac{2 G m M}{r^3} R_T$$

☉
Luna

• Marea solare / lunare: Rapporto di forza di marea

$$\frac{F_L}{F_s} = \frac{m_L / r_L^3}{m_s / r_s^3} = \frac{\rho_L (R_L / r_L)^3}{\rho_s (R_s / r_L)^3} \approx \frac{\rho_L}{\rho_s} \approx 3$$

←
Raggio apparente di Sole
e Luna sono identici (Eclissi)

Maree lunari
più intense