

(1)

Lezione 2 : Gravitazione

• Leggi $\star \rightarrow$ legge della Forza

$$\vec{F} = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \hat{u}_r \quad (a)$$

Hip. usate : 1) rif. nel sole

2) masse puntiformi

$\rightarrow$ Grav. universale : $F_{\text{grav}} = F_G$ (masse puntif.)

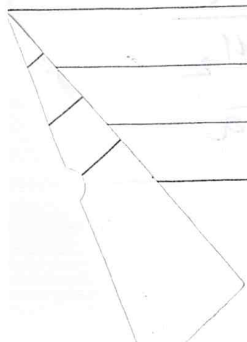
1) Il sole, né i pianeti sono SPi in senso stretto $\rightarrow$ mutua int. reciproca

2) L'interazione non è tra punti materiali ma tra corpi estesi (= sist. continuo di punti) $\rightarrow \vec{F} = \sum_i \vec{F}_i$

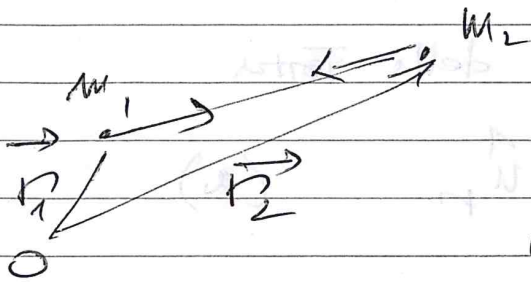
1m) Approx. che vogliamo chiedere per capire se (a) descrive correttamente la struttura della forza

1) Problema dei due corpi
~~2)~~ $\rightarrow$ e conseguenze

2) Interazione tra corpi estesi



1) Problema dei due corpi!



Né m_1 , né m_2 buon riferimento inerziale

Se $\vec{R}(E) = 0$ il CM è un buon ref. (ed è inerziale) - Se ci sono altri corpi (sistema planetario = many body) la descrizione è approx. Poiché l'interazione Sole-planet è dominante, l'approx a due corpi è buona.

Dinamica di $\vec{r}_1$ e $\vec{r}_2$ $\left(\begin{array}{l} \vec{F}_{12} = m_1 \vec{a}_1 \\ \vec{F}_{21} = m_2 \vec{a}_2 \end{array} \right)$

Sostituita da dinamica di

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{r}_{CM} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2} \quad \text{dipende solo da } \vec{R}(E) \\ \vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 \quad \text{dipende da } \vec{F}_{12} \text{ e } \vec{F}_{21} \end{array} \right.$$

~~Abbiamo~~ Dimostriamo:

$$\mu \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \hat{r} \quad \text{con } \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

Forza centrale per massa ridotta
con centro delle forze nel CM del sistema

Equazioni del moto per $\vec{r}$

$$\begin{aligned}\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} &= \frac{d^2}{dt^2} (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) = \vec{a}_2 - \vec{a}_1 \\ &= \frac{\vec{F}_{12}}{m_2} - \frac{\vec{F}_{21}}{m_1} = \vec{F} \left(\frac{1}{m_2} + \frac{1}{m_1} \right) \\ &= \vec{F} \left(\frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2} \right)\end{aligned}$$

Definiamo $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ massa ridotta

L'equazione trovata è $\mu \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \vec{F}$

con $\vec{F} = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \hat{u}_r$ oppure

$$\vec{F} = -G \frac{m_1 m_2}{r^2 m_1 + m_2} (m_1 + m_2) \hat{u}_r$$

$$\boxed{\vec{F} = -G \frac{\mu M}{r^2} \hat{u}_r}$$

Forza centrale pu
punto materiale
di massa μ

→ orbita Kepleriana per μ attorno al
CdM (centro della forza)

Problema dei due corpi $\approx$ equivalente
a problema con 1 pto materiale con F centrale

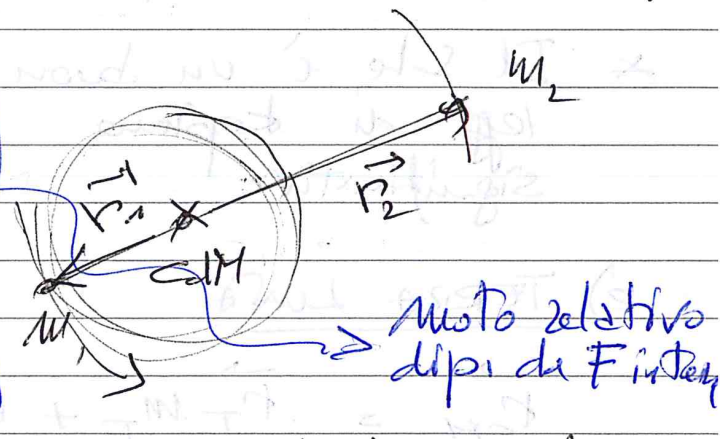
(2)

Risolto il moto per un pto materiale di massa ridotta μ , si trova il moto di m_1 e m_2 dalle eq. che legano $\vec{r}_1$ e $\vec{r}_2$ a $\vec{r}_{CM}$ e $\vec{r}$:

$$\begin{cases} M\vec{r}_{CM} = m_2\vec{r}_2 + m_1\vec{r}_1 \\ m_1\vec{r} = m_2\vec{r}_2 - m_1\vec{r}_1 \end{cases} \quad \left. \begin{array}{l} (\times M) \\ (\times m_1) \end{array} \right\}$$

$$\int M\vec{r}_{CM} + m_1\vec{r} = 2m_2\vec{r}_2 \quad \times$$

$$\int M\vec{r}_{CM} - m_2\vec{r} = +M\vec{r}_1 \quad \text{in modo analogo}$$

$$\begin{cases} \vec{r}_1 = \vec{r}_{CM} - \frac{m_2}{M}\vec{r} \\ \vec{r}_2 = \vec{r}_{CM} + \frac{m_1}{M}\vec{r} \end{cases}$$


moto del CM dipende da $\vec{R}(t)$

moto relativo dipi da F_{inter}

I pianeti orbitano attorno al CM a distanze

$$\int d_1 = \frac{m_2}{M} d$$

$$\int d_2 = \frac{m_1}{M} d$$

~~La~~ La posizione del CM e il moto dei corpi dipende dalla relazione tra k e m

1) SOLE - PIANETI

$$M \gg m_p \quad (m_p \approx 10^{-6} M \text{ nel Sist. Solar})$$

$$\text{CM} : \quad \vec{r}_{CM} = \frac{M\vec{r} + m_p\vec{r}_p}{M+m_p} \approx \vec{r}_s$$

coincide con la posizione del sole

$$\vec{r}_s = \vec{r}_{sp} \cdot \frac{M+m_p}{m_p} \approx \vec{r}_{sp} \odot$$

$$\vec{r}_p \approx \vec{r}_{sp}$$

← il pianeta orbita attorno al sole !

* Il Sole è un buon rif. inerziale e le leggi di Keplero non richiedono correzioni significative

2) TERRA LUNA : $m_L \approx \frac{1}{80} m_T$ ($\approx 1\%$)

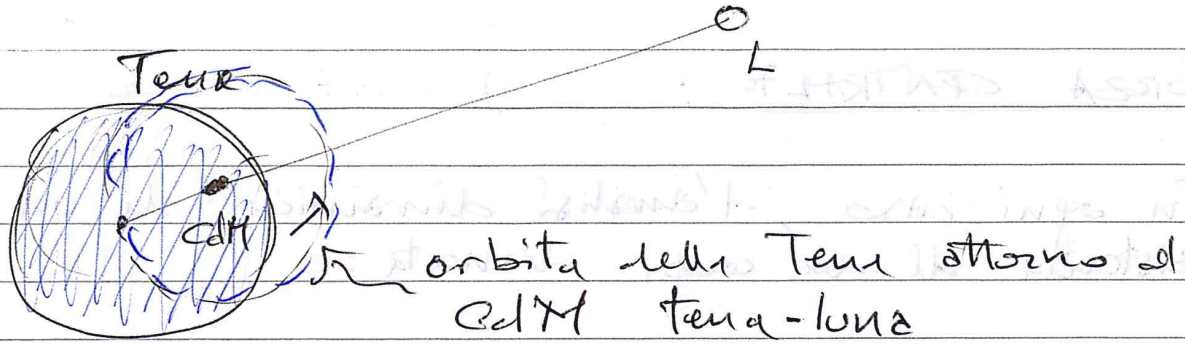
$$\vec{r}_{CM} = \frac{\vec{r}_T m_T + \vec{r}_L m_L}{m_T + m_L}$$

nel riferimento terrestre : $\vec{r}_T = 0$

$$\vec{r}_{CM} = \frac{m_L}{m_T + m_L} \vec{r}_L \approx \frac{1}{80} \vec{r}_L$$

D'altronde sappiamo che r_{TL} (distanza terra-luna) è ~~50~~ ≈ 60 volte del raggio terrestre R_T

$$r_{CM} = \frac{50}{80} R_T = \frac{5}{8} R_T \approx 4700 \text{ km}$$



Periodo di rotazione : $\rightarrow$ moto kepleriano
per corpo di massa ridotta μ

$$\mu \omega^2 r = G \frac{m_1 m_2}{r^2} \equiv G \frac{\mu M}{r^2}$$

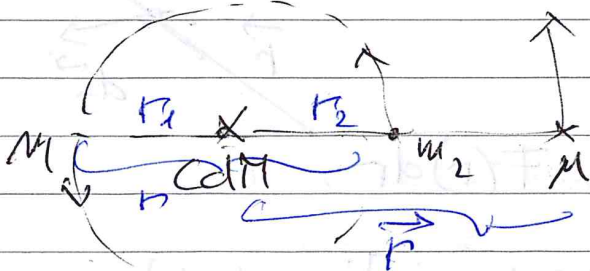
$$\frac{4\pi^2}{T^2} = \frac{GM}{r^3} \quad \leadsto \quad T = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{r^3}{GM} \right]^{1/2}$$

Se guardassimo la luna assumendo la terra
SRI

$$\leadsto T = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{r^3}{GM_T} \right]^{1/2} = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{r^3}{GM} \right]^{1/2} \left[\frac{M}{m_1} \right]^{1/2}$$

Correzione planetaria

3) Stelle binarie $m_1 = m_2 \rightarrow$ correzione imp.



$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} = \frac{m}{2}$$

FORZA CENTRALE :

In ogni caso, l'analisi dinamica di un sistema di due corpi dimosta:

- Legge di forza - centrale
- Centro della forza = Centro di massa
- Nel caso di gravità:

$$\vec{F}(r) = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \hat{u}_r \equiv -G \frac{\mu M}{r^2} \hat{u}_r$$

[Sistema equivalente con μ e massa]

Proprietà generali delle forze centrali:

1) $\vec{L}$ conservato

no orbita di tipo
altorno al CM
per μ

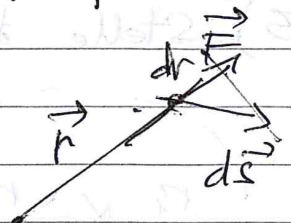
2) E è conservativa

→ il lavoro ~~per~~ di $\vec{F}$ può essere
espresso tramite energia potenziale

Dim. $\vec{F} = F(r) \hat{u}_r$

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{s} = F(r) dr$$

$$W_{AB} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_A^B F(r) dr \quad \text{dipende solo da } r$$



Dunque esiste funzione di r : $U = U(r)$
 t.c.

$$\int_A^B F(r) dr = U(r_A) - U(r_B)$$

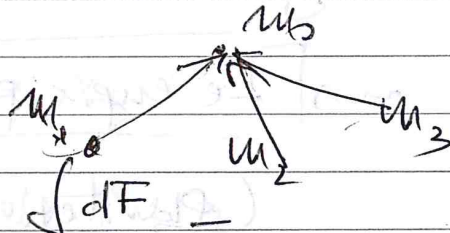
Usiamo q.s. funzione per definire l'energia pot.

$$W_{AB} = - [\mathcal{E}_p(r_B) - \mathcal{E}_p(r_A)] = -\Delta \mathcal{E}_p$$

L'espressione di $\mathcal{E}_p$ va calcolata in modo
 esplicito a partire dalla forza e calcolando
 il lavoro della forza

Nel caso generale, per una distribuzione
 di masse, la forza agente su una massa
 m_b è la somma vettoriale di tutte
 le forze:

$$\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i$$



Al limite continuo

$$\int dF$$

Il lavoro complessivo

$$W_{TOT} = \vec{F}_{TOT} \cdot d\vec{s} \\ = \left(\sum_i \vec{F}_i \right) \cdot d\vec{s}$$

Poichè ciascun termine della somma descrive
 l'interazione tra due punti, che è una forza
 conservativa, la $\vec{F}$ di q.s. è conservativa
 per qualunque distribuzione di masse

→ È utile considerare l'espressione dell'energia potenziale per masse puntiformi e utilizzarla per calcolare $\vec{F}$ con distribuzioni di massa più complesse

Ricordiamo inoltre che

$$\vec{F} = -\vec{\nabla} E_p = -\left(\frac{\partial E_p}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial E_p}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial E_p}{\partial z} \hat{k} \right)$$

$$\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i = \sum_i \vec{\nabla} E_p(i)$$

$$= \vec{\nabla} \left(\sum_i E_p(i) \right)$$

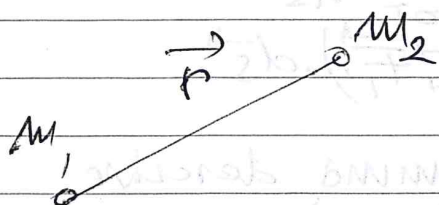
derivata e
funzione (lineare)

cioè $\sum_i E_p(i)$ dimostrano possiamo costruire la somma delle energie pot. che è legata alla $\vec{F}$ risultante

ma Le energie potenziali si sommano

(gravitazionale)

1) Energia potenziale per un sistema di 2 punti



$$F_{12} = -G \frac{m_1 m_2}{r_{12}^2}$$

La F è radiale $\rightarrow \vec{F} = F \hat{u}_r \Rightarrow F = - \frac{dE_p}{dr}$

Si ricordi che $\frac{dx^{\alpha+1}}{dx} = (\alpha+1)x^{\alpha}$

$$W_{AB} = - \int_{r_A}^{r_B} \frac{G m_1 m_2}{r^2} dr$$

$$= -G m_1 m_2 \int_{r_A}^{r_B} \frac{dr}{r^2} = \left[\frac{G m_1 m_2}{r} \right]_{r_A}^{r_B}$$

$$= \frac{G m_1 m_2}{r_B} - \frac{G m_1 m_2}{r_A} = - \left(\mathbb{E}_p(r_B) - \mathbb{E}_p(r_A) \right)$$

$$\mathbb{E}_p(r) = - \frac{G m_1 m_2}{r} + \text{cost}$$

Poiché la cost è arbitraria e la funzione è nulla a $r = \infty$, scegliamo $\text{cost} = 0$ a $r = \infty$ per semplificare l'espressione:

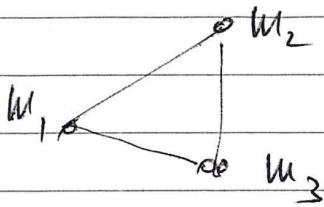
En. potenziale per masse puntiformi

$$\mathbb{E}_p(r) = - \frac{G m_1 m_2}{r}$$

Nota: Rappresenta $\mathbb{E}_p$ di m_1 sotto l'azione di m_2 o alterni di m_2 sotto l'azione di m_1

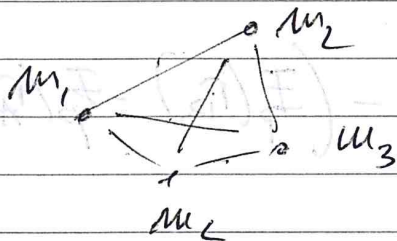
- a) Non c'è $\mathbb{E}_p$ se c'è solo una massa
- b) Non ci sono due termini, con due masse, ma un termine solo

N - masse:



$$\begin{aligned} \mathbb{E}_p = & -G \frac{m_1 m_2}{r_{12}} + \\ & -G \frac{m_1 m_3}{r_{13}} + \\ & -G \frac{m_2 m_3}{r_{23}} \end{aligned}$$

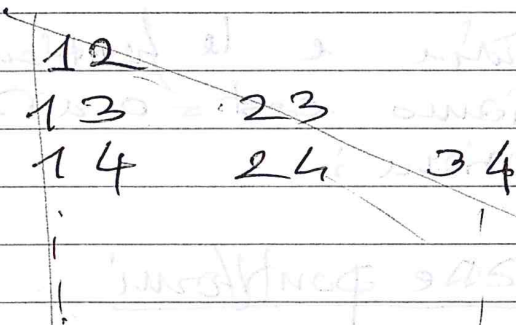
→ tre termini: tre mutue interazioni



6 mutue interazioni (4 masse)

Caso generale :

$$\mathbb{E}_p = - \sum_{i=1}^N \sum_{j>i}^N G \frac{m_i m_j}{r_{ij}}$$



$$1 \cdot 2 \quad 2 \cdot 3 \quad 3 \cdot 4 \quad \dots \quad (N-1) \cdot N$$

$$N-1 + N-2 + N-3 + \dots + 1$$

~~(N-1) termini~~
~~(N-1) volte~~

→ Regola di Gauss: somma di $N-1$ termini interi: $\frac{N(N-1)}{2}$

Segno negativo di E_p è conseguente
 in $\lim_{r \rightarrow \infty}$ della natura attrattiva
 della forza gravitazionale con direzione
 verso il centro della forza

Immaginiamo massa μ a $r = \infty$
 da una massa M

$$E_p(\infty) = - \frac{G\mu M}{r} \Big|_{r=\infty} = 0^-$$

Sotto l'azione della F di gravitazione il
 corpo si avvicina a M (dopo una piccola
 perturbazione che lo porti a r ~~meno~~ un po'
 meno di ∞ - (d'istinto $|F|$ è 0^+)

Durante lo spostamento $\vec{F} \parallel d\vec{s}$

$$d\vec{s} = \vec{r}_p - \vec{r}_1 < 0$$

$$\vec{F} = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \hat{u}_r < 0$$

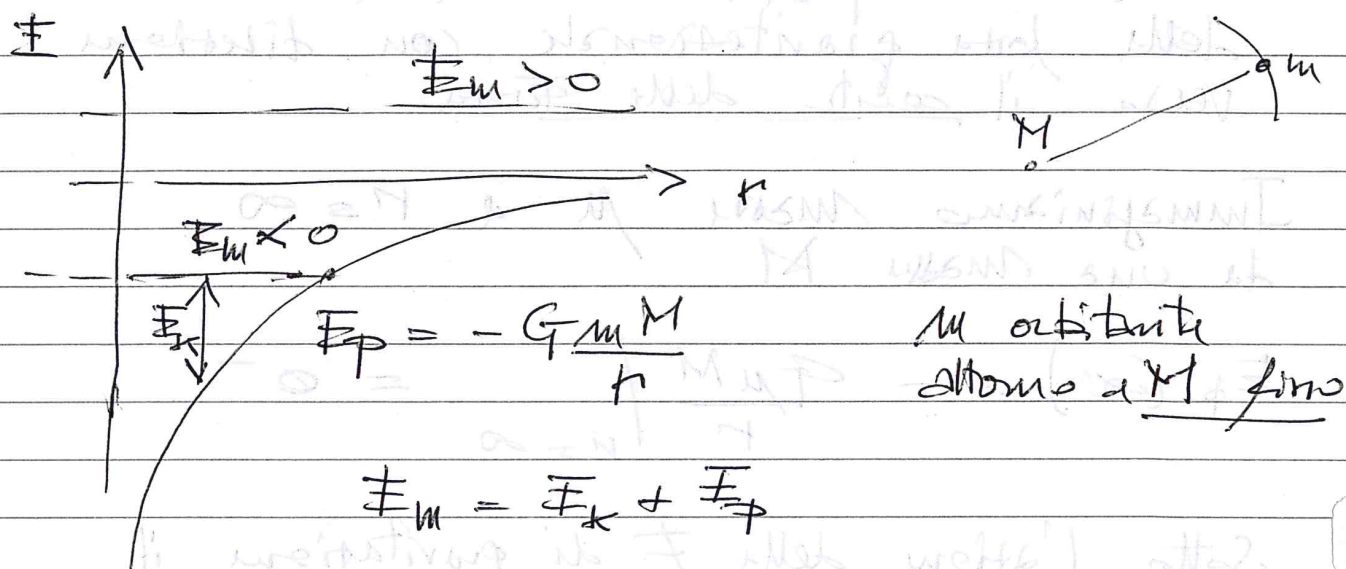
e il lavoro è positivo - Dunque $\Delta E_k > 0$
 Poiché la forza è conservativa $E_m = \text{cost}$

$$E_p + E_k = \text{cost}$$

Se $\Delta E_k > 0$, deve essere $\Delta E_p < 0$

Coerentemente con il segno di E_p trovato

Grafici (qualitativi) di energia meccanica



$$E_k = E_m - E_p = E_m + \frac{GmM}{r} \geq 0$$

L'energia cinetica non può essere negativa
 $E_k = \frac{1}{2}mv^2$, dunque

1) - Se $E_m \geq 0$ l'orbita non è confinata (orbita aperta) poiché $E_k \geq 0$ per qualunque valore di r , anche $r = \infty$

2) Se $E_m < 0$ l'orbita è confinata entro un $r_{\max}$:

$$\frac{GmM}{r_{\max}} \geq -E_m$$

$$r \leq \frac{GmM}{|E_m|} \equiv r_{\max}$$

Per $r = r_{\max}$, $E_k = 0$

Esempi

Se $E_m < 0$, è necessario immissione di lavoro per "svincolare" m e portarlo a distanza infinita da M

- In riferimento a ciò, si può calcolare la velocità di fuga di un corpo di massa m = velocità che bisogna imprimere al corpo (aumentando la sua energia cinetica con del lavoro), perché la sua orbita diventi aperta, in altri termini, perché possa avere

$E_m \geq 0 \rightarrow v_f$ corrisponde al caso limite $E_m = 0$

$$E_m = \frac{1}{2} m v_f^2 - \frac{GmM}{r} = 0$$

(significa che il corpo da un'orbita di raggio r , si può portare a $r = \infty$ con $v(r \rightarrow \infty) = 0$)

$$v_f = \left[2 \frac{GM}{r} \right]^{1/2}$$

$$\begin{aligned} v_f \text{ della Terra: } v_f &= \left[2 \frac{GM}{R_T} \right]^{1/2} = \\ &= \left[2 R_T g \right]^{1/2} \approx 11'000 \text{ m/s} \end{aligned}$$

Relazioni tra σ e raggio orbita

$$\frac{1}{2} m \sigma_{fin}^2 + \frac{GmM}{r_p} = \frac{1}{2} m \sigma_i^2 - \frac{GmM}{r_i}$$

$$\sigma_{fin} = \left[\sigma_i^2 + 2GM \left(\frac{1}{r_{fin}} - \frac{1}{r_i} \right) \right]^{1/2}$$

* Questa contiene la relazione della velocità di fuga come sottocono (ponendo $\sigma_i = 0$ e r_{fin})

* Inoltre per la alta peso (vicino alla superficie terrestre):

$$\begin{aligned} r_{fin} &\approx r_T + h_f \\ r_i &\approx r_T + h_i \end{aligned}$$

con $r_T \gg h$ si ottiene

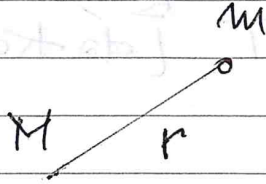
$$\sigma_{fin} = \left[\sigma_i^2 + 2GM \left(\frac{r_i - r_{fin}}{r_T \cdot r_T} \right) \right]^{1/2}$$

$$\approx \left[\sigma_i^2 + \frac{2GM}{r_T^2} \Delta h \right] =$$

$$= \left[\sigma_i^2 + 2g \Delta h \right]$$

← Relazioni trovate per F. peso

Relazioni tra E_p , E_k e E_m : orbite circolari



Condizione per orbita circolare:

$$m\omega^2 r = \frac{GMm}{r^2} \quad (*)$$

→ La massa del satellite non interviene nella relazione dinamica $F = ma$

→ si può mantenere un satellite di massa qualunque su un'orbita di raggio r qualunque, purché gli si fornisca l'energia cinetica necessaria:

$$\omega^2 r = \frac{GM}{r^2} \Rightarrow \frac{v^2}{r} = \frac{GM}{r^2}$$

$$E_k = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} \frac{GMm}{r} = -\frac{1}{2} E_p$$

L'energia cinetica su un'orbita circolare è $E_k = -\frac{1}{2} E_p$

[e sono entrambe costanti del moto, poiché fissate su un'orbita circolare. Attenzione: non è il caso generale. In generale si conserva E_m soltanto]

$$E_m = E_k + E_p = E_p - \frac{1}{2} E_p = \frac{1}{2} E_p = -\frac{1}{2} \frac{GMm}{r}$$

Ovviamente l'eq. (*) è possibile per
 r qualunque con determinata E_k ma
 fissato r c'è fissato anche T [da Kepler]

$$(*) \quad \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 r = \frac{GM}{r^2}$$

Es. $T = 1$ giorno $r = 42000$ km (geostart.)

→ Per modificare rapido dell'orbita
serve immissione di lavoro esterno
 (motori a razzo)

$$L_{\text{ext}} = \Delta E_k + \Delta E_p = \Delta(E_k + E_p) = \Delta E_m$$

$$\text{con } E_k = -\frac{1}{2} E_p \text{ e } E_m = \frac{1}{2} E_p$$

$$L_{\text{ext}} = \Delta E_m = \frac{1}{2} GM \left(\frac{1}{r_i} - \frac{1}{r_f} \right)$$

$$L_{\text{ext}} > 0 \text{ se } r_i < r_f$$

$$L_{\text{ext}} < 0 \text{ se } r_f \leq r_i$$

Es

Vedremo analisi più completa di orbite
 più avanti, ora usiamo la approx (2)
 - corpi esteri