

GRAVITAZIONE

Caso notevole di sist. pi. materiali associato a una forza "fondamentale" (irriducibile)

- Soluzione completa per un sist. 2 corpi
(eq. $\vec{F} = m\vec{a}$ e $\vec{r} = \frac{d\vec{L}}{dt} \rightarrow 6$ eq.)

[Sole - pianeta pianeta - satellite]

- Sistemi complessi (many-body) irriducibili in moto approx

- Sist. Sole e 2 corpi Sole - pianeta + perturbazioni

- 1) Derivazione legge di Forza dal moto
- 2) Descrizione moto (orbita) da L di Forza

[due modi di usare $\vec{F} = m\vec{a}$]

Prima approx: è moto di 1 corpo (pianeta) nel riferimento del Sole
 → Problema di 1 punto materiali sotto l'azione di 1 forza -

donque il moto delle terre nel rif. Sole e' (3)

$$\begin{cases} x_T(t) = -x_S(t) = r_S \cos(\omega t) \\ y_T(t) = -y_S(t) = -r_S \sin(\omega t) \end{cases}$$

è sempre un moto circolare, con $\theta \rightarrow -\theta$

Moti degli altri pianeti - Es. Marte
nel riferimento Terrestre

$$\vec{r}_M = \underbrace{\vec{r}_S}_{\substack{\downarrow \\ \text{circolo} \\ \text{attorno alla terra}}} + \underbrace{\vec{r}_{MS}}_{\substack{\searrow \\ \text{circolo attorno al sole}}}$$

In coordinate polari

$$r_M(t) = r_S e^{i\omega_S t} + r_{MS} e^{i\omega_{MS} t} \quad \text{con } x_M(t) = \text{Re}(r_M) \\ y_M(t) = \text{Im}(r_M)$$

Es. Phobos (nel rif terrestre)

$$\vec{r}_{Ph} = \vec{r}_S + \vec{r}_{MS} + \vec{r}_{MPh} \\ \leadsto r_S e^{i\omega_S t} + r_{MS} e^{i\omega_{MS} t} + r_{MPh} e^{i\omega_{Ph} t}$$

ma "Descrizione Tolemaica" sempre ok,
ma il numero di parametri necessari
è grande $\rightarrow$ non ci sono "simplifications"

1600 BRAHE: Astronomia osservazionale di $\frac{1}{2}$ precisione e ricostruzione delle traiettorie dei pianeti secondo l'ipotesi eliocentrica

1602-1618 KEPLER individua regolarità nelle osservazioni di Brahe che gli consentono di formulare tre leggi generali per il moto dei pianeti in un sistema eliocentrico

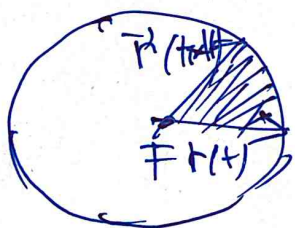
1° legge: I pianeti descrivono orbite ellittiche di cui il sole è uno dei fuochi
[$\Rightarrow$ il moto è piano]

Nota: orbite quasi circolari: $b/a = \begin{cases} 0.999 & \text{Terra} \\ 0.96 & \text{Plutone} \end{cases}$

2° legge: I pianeti spazzano aree uguali in tempi uguali (velocità areale costante)

$\frac{dA}{dt} = \text{cost}$ è valida per tutti i pianeti, ma il valore della velocità areale cambia da pianeta a pianeta

Vedremo che questa legge implica/discende dalla conservazione del momento angolare nel moto



$$\frac{dA}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} |\vec{r}(t) \times \dot{\vec{r}}(t)| \right)$$

3^a legge (1618) Il quadrato del periodo di Lindotta (6)
 è proporzionale al cubo della distanza
media pianeta-sole. Nella formulazione precisa
 la distanza è espressa in termini di "semi-asse"
 maggiore dell'ellisse.

$$(3) \quad T^2 = K_s a^3 \quad \text{con } K_s \text{ identica per tutti i pianeti}$$

Nel 1610, scoperta dei pianeti Medicei (Galileo),
 Keplero osserva le stesse regolarità nel moto
 ripetute delle lune di Giove, nel riferimento di
 Giove. In particolare $T^2 = K_G a^3$

⇒ in un sistema a due corpi sole-pianeta
pianeta-luna (quindi non solo in un
 sistema "eliocentrico") valgono le leggi
 di Keplero

INTERPRETAZIONE
 DINAMICA

⇒ Stesso tipo di "terza"

Secondo Keplero $F \rightarrow$ sostiene la
 velocità (visione pre-Newtoniana), la
 terza legge, indicando pianeti più veloci"
 vicini al sole, suggerisce una forza
 maggiore vicino al sole - ~~Keplero~~ La
 formulazione corretta (in termini di accel) $\rightarrow$ Newton

(*) Nella derivazione di Keplero
 non si pensa a "due corpi", ma
 a 1 corpo in un riferimento
 fissato nell'altro corpo

Newton: Legge della forza di gravitazione

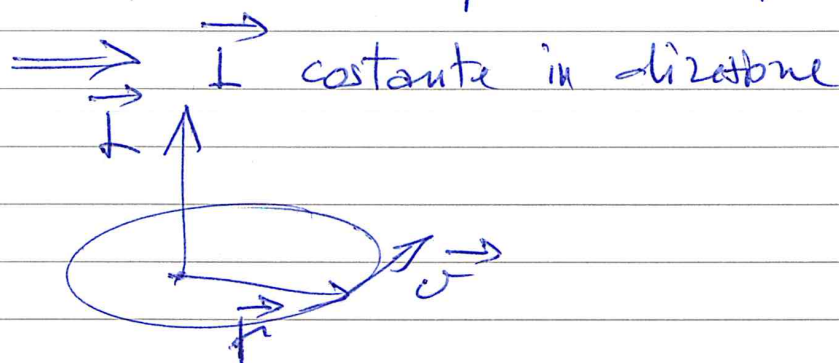
[c'è un'accelerazione $\rightarrow$ c'è una forza]

$\times$ Struttura vettoriale delle forze dalla 1^a e 2^a legge di Keplero

● 1^a Legge: il moto è piano (ellittico)

$$\Rightarrow \vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v} \quad \text{calcolato ad es. con polo nel fuoco } F$$

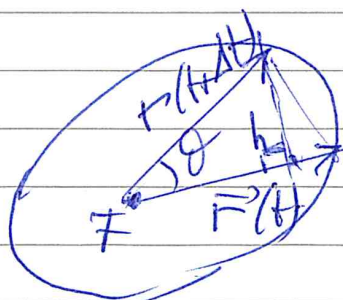
poiché $\vec{r}$ e $\vec{v}$ sono complanari durante il moto $\vec{L}$ è sempre $\perp$ al piano del moto



● 2^a Legge: velocità areale costante

$$\Rightarrow L \text{ costante in modulo}$$

Dimostrazione



$$\begin{aligned} A &\approx \frac{1}{2} r(t) \cdot h \\ &= \frac{1}{2} r(t) r(t+\Delta t) \sin \theta \end{aligned}$$

Area triangolo $\approx$ Area settore circolare per θ piccolo -

(8)

Possiamo scrivere in forma vettoriale

$$A = \frac{1}{2} \left| \vec{r}(t) \times \vec{r}(t + \Delta t) \right|$$

poichè $\vec{r}(t) \times \vec{r}(t) = 0$ (ogni vettore, moltiplicato vettorialmente per se stesso medesimo dà zero)

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2} \left| \vec{r}(t) \times \vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t) \times \vec{r}(t) \right| = \\ &= \frac{1}{2} \left| \vec{r}(t) \times [\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)] \right| \end{aligned}$$

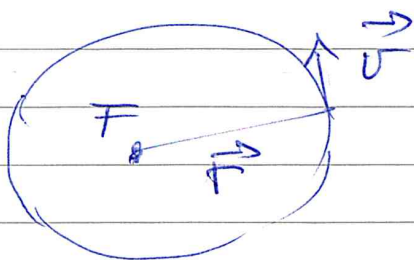
La velocità angolare è la variazione infinitesima di A in un intervallo infinitesimo Δt

$$\begin{aligned} \frac{dA}{dt} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{2} \left| \vec{r}(t) \times \underbrace{[\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)]}_{\Delta t} \right| = \\ &\quad \text{definizione di } \vec{v}(t) \\ &= \frac{1}{2} \left| \vec{r} \times \vec{v} \right| = \frac{1}{2m} \left| \vec{L} \right| \end{aligned}$$

$\rightarrow \frac{dA}{dt} = \text{cost}$ implica che $|\vec{L}|$ è costante

Dunque: $\left. \begin{array}{l} 1^{\text{a}} \text{ legge } \vec{L} \text{ cost. in direzione} \\ 2^{\text{a}} \text{ legge } \vec{L} \text{ cost. in modulo} \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{L} = \text{cost.}$

Sfruttiamo teorema del momento angolare
riferito a polo nel fuoco dell'orbita



$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{F} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

Poichè $L = \text{cost}$ (eff. al polo)

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{F} = 0$$

$$\left(\frac{d\vec{L}}{dt} = 0 \right)$$

$$\vec{r} \parallel \vec{F}$$

ossia in ogni punto dell'orbita
(e per qualsiasi eccentricità)
la forza è sempre $\parallel$ a $\vec{r}$

che è sempre rivolta verso il Fuoco

$\Rightarrow \vec{F}$ è una forza centrale con
centro delle forze nel fuoco
dell'orbita (ossia nel sole)

Le leggi 1^a e 2^a di Keplero definiscono
la struttura vettoriale della forza:

$$\vec{F} = F(r) \hat{u}_r$$

con $\hat{r}$ misurato a partire dal fuoco

Espressioni di $F(r)$ dalla 3^a legge di Keplero (10)

x Approx di moto circolare - non si perde generalità poiché:

a) Struttura di $\vec{F}$ trovata in modo indipendente dall'eccentricità
 $\rightarrow \vec{F} = F(r) \hat{u}_r$ vera anche per orbite circolari

b) 3^a legge di K soddisfatta da tutte le orbite ellittiche osservate

$\rightarrow$ vera per generalizzazione anche per "tutte" le orbite ellittiche e dunque anche per il cerchio (ellisse di eccentricità nulla)

[Nel sistema solare $\frac{b}{a} = 0.96 \div 0.999$
 b = semiasse minore, a = semiasse maggiore]

• Per orbite circolari $\vec{v} = \omega \vec{r}$

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} |\vec{r} \times \vec{v}| = \frac{1}{2} \omega r^2 \quad \text{per } \vec{r} \perp \vec{v}$$

per $r = \text{cost}$ (cerchio) $\Rightarrow \omega = \text{cost}$

(8)

* Nel moto circolare $\vec{r}$ e $\vec{v}$ sono ortogonali
e $v = \omega r$, dunque:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} \omega r^2 = \text{cost} \quad \text{implica } \omega = \text{cost}$$

poiché $v = \text{cost}$ nel moto circolare.

(*) qd espressione è vera in generale (dim. sul rett.)

* Dunque, nel limite di moto circolare

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \quad \text{con } T = \text{periodo del moto}$$

e poi l'accelerazione ~~centrifuga~~ centripeta ob-planetaria

$$F_{sp} = m_p \omega^2 r = m_p \left(\frac{4\pi^2}{T^2} \right) r$$

In base alla 3^a legge di Keplero: $T^2 = K_s r^3$

$$F_{sp} = m_p \frac{4\pi^2}{K_s r^3} r = \frac{4\pi^2}{K_s} \frac{m_p}{r^2} \quad (4)$$

La legge di forza per la forza gravitazionale: la
forza dip. dalla massa (inerziale) del pianeta
e dall'~~potenziale~~ inverso del quadrato della distanza
dal sole, tramite una costante comune $\frac{4\pi^2}{K_s}$

I pianeti non sono solo corpi orbitanti (o passivi) ⁹
~~alla~~ ~~fonti~~ dell'interazione con il sole), ma anche
 centri del moto orbitale di satelliti, per i
 quali valgono le stesse ~~relazioni~~ leggi di Keplero.

Seguendo lo stesso percorso, possiamo scrivere per
 i satelliti di Giove:

$$F_{G, \text{sat}} = \frac{4\pi^2}{T_G^2} \frac{M_{\text{sat}}}{r^2}$$

(per astrazione)

Dunque si può assumere che per una qualunque
 coppia di corpi valga una legge ~~generale con~~ di
 forma con la struttura della relazione Keplera. In
~~sfruttando il principio~~ particolare ~~per la~~, ad esempio,
 per la coppia Sole-Giove possiamo scrivere

$$F_{S, G} = \frac{4\pi^2}{T_S^2} \frac{M_G}{r^2} \quad (4.1)$$

$$F_{G, S} = \frac{4\pi^2}{T_G^2} \frac{M_S}{r^2} \quad (4.2)$$

Dove la rel. (4.1) discende direttamente dalla 3^a legge
 di Keplero, mentre la (4.2) consegue ~~dalla~~ ^{LA REGOLARITÀ DELLA} ~~relazione~~ da un
 processo di astrazione: NON ESISTE UNA LEGGE DI KEPLERO
 NEL RIF DI GIOVE, SE NON PER I SUOI SATELLITI

Nota: Questo paraffio di datazione non è
 espresso in modo chiaro sul Mazzoli, dove
 si assume in modo speditivo che la relazione
 vale per il sistema nel Sf. di G. , Schwarzschild
 di K.

Per il principio di azione e reazione deve essere
 (in modulo)

$$F_{sp} = F_{ps} \Rightarrow k_{mp} = k_{sm}$$

Poiché la relazione deve valere per qualunque
 coppia sole - pianeta, k_{mp} è una costante
universale $\gamma = k_{sm} \rightarrow 1/k_s = \frac{m_s}{\gamma}$

Posto nella forma $\frac{1}{\gamma} = G$, la legge di forza è

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

legge di gravitazione
 universale di Newton

④ non dipende dalle masse e dalla geometria
 ma caratterizza l'intensità dell'interazione
 gravitazionale -

in termini dimensionali

$$[G] = [F] L^2 M^{-2}$$

$$= M L T^{-2} L^2 M^{-2} = L^3 T^{-2} M^{-1}$$

$$G = 6.67 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$$

- La legge è verificata perimet su ampia scala. Per ricavare G occorre conoscere il valore delle masse -

(41)

- Prima verifica ed opera di Newton

- oggetti cadono sulla Terra $F = m g$

$$g = G \frac{M_T}{r_T^2}$$

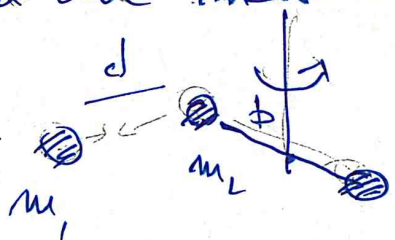
Tuttavia G e M_T non sono noti individualmente; la misura di g misura $G M_T$ (r_T era noto con precisione dell'antichità)

- Caduta della Luna sulla Terra:

$$m_L \omega_L^2 r_L = \frac{G M_T m_L}{r_L^2} \quad \leftarrow \text{dalla misura di } r_L \text{ e } \omega_L \text{ si ricava } G M_T$$

- la misura separata di G e m_T (di fatto la "pesatura" della Terra) ha richiesto un esperimento dedicato ad opera di Cavendish (1798)

Bilancia di torsione per la misura di F tra due masse note -



condizione di equilibrio

$$\tau = F \cdot \phi$$

τ = momento di richiamo prop. elastico del filo

$$\tau = G \frac{m_1 m_2}{d^2} \cdot \phi$$

calibrato con

MASSA INERZIALE E GRAVITAZIONALE

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

Forza gravitazionale legata a proprietà corpi $\leftrightarrow$ massa Grav.

$$\Rightarrow F = m a$$

Proprietà cinematica $\Rightarrow$ massa Inerziale

Nel ricavare la legge di gravitazione abbiamo implicitamente assunto che $m_{grav} = m_{inert.}$; ~~questo~~ nella relazione $F_{ip} = \frac{G}{r^2} m_p m_I$ m_p viene dall'acc. centripeta (inerziale)

- Per un corpo in caduta libera sulla terra:

$$m_I g = G \frac{m_T m_I}{r^2} \left(\frac{m_g}{m_I} \right) \quad \text{e cioè}$$

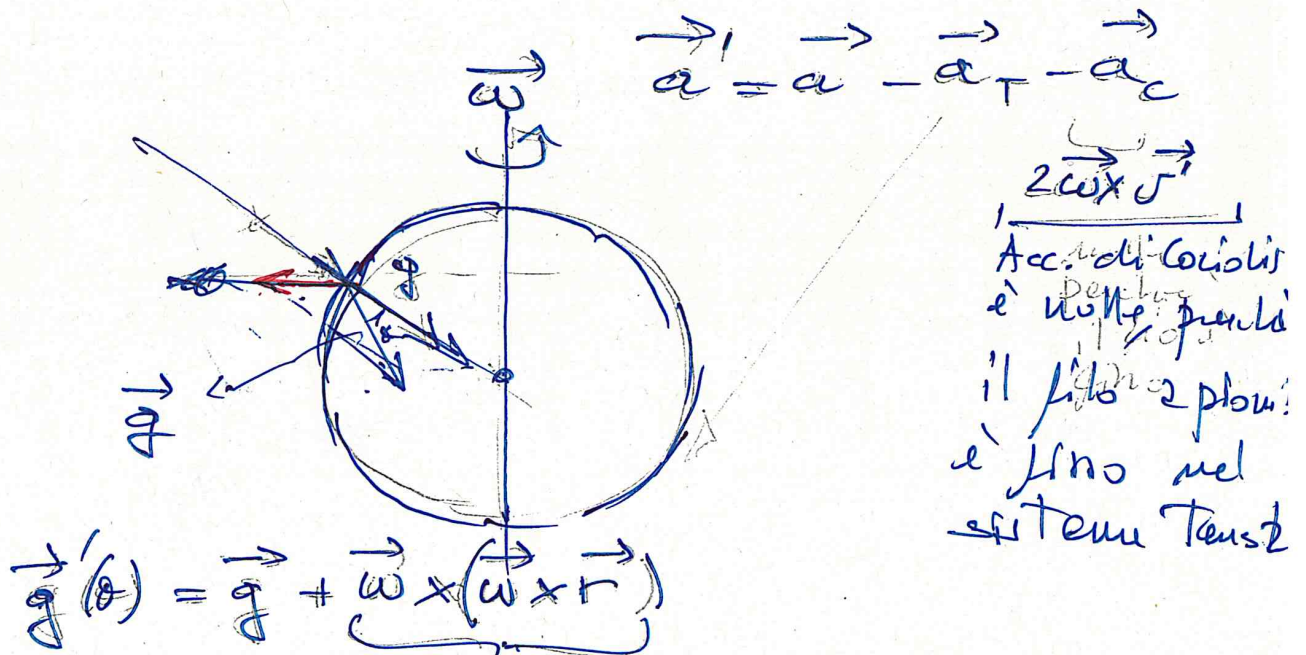
$$g = G \frac{m_T}{r^2} \left(\frac{m_g}{m_I} \right) \rightarrow \text{massa inerziale e gravitazionale sono per lo meno proporzionali}$$

$\Rightarrow$ Assunti identici e cost. di proporzionalità riassorbita in G

D'altronde se il rapporto m_g/m_I dipendesse dai corpi potrebbe essere possibile evidenziare le diff. tra i due concetti di massa più via speriment.

- Esp come filo a Pb $\rightarrow$ dipende da G e dall'acc. centripeta ($\neq$)

Dim del Filo A PB (indica la verticale)



- Accelerazione apparente (trascinamento) determina una forza legata alla massa inerziale $\vec{F}_{app} = m_I \vec{a}$

La direzione del filo ~~apparente~~ ^{apparente} si discosta dalla verticale a seconda del rapporto m_I/m_g

→ non c'è evidenza di diff. m_I/m_g per diversi materiali

NOTA: L'esperimento va condotto in modo differenziale:

- Un materiale di riferimento definisce la verticale (la cui definizione ~~esiste~~ ^è la direzione di $\vec{g}'$ in ~~esso~~ ^{esso})
- Per altri materiali si verifica lo scostamento dalla verticale