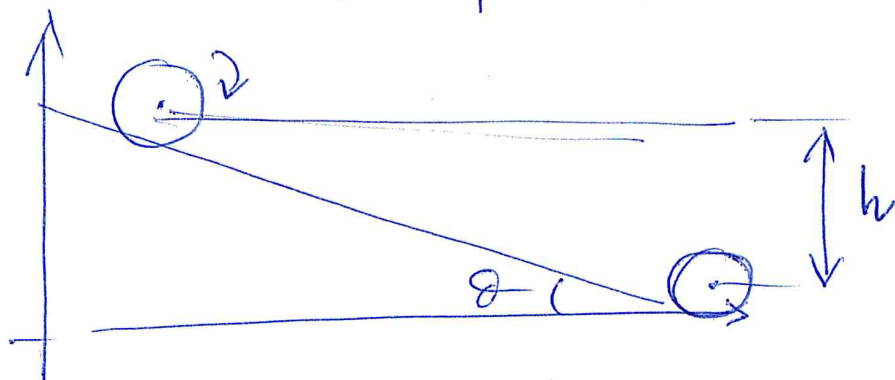


Esempio : Puro rotolamento su piano inclinato
(avevi voluto farlo alla fine delle let. prece.)

Si trovi σ_f , per $\sigma_i = 0$ e $\omega_i = 0$



Non c'è dissipazione di energia (puro rotolamento
 $\Delta S_{ch} = r \Delta \phi$) : $\Delta E_k = \Delta E_p$ cioè:

$$\frac{1}{2} m \sigma_f^2 + \frac{1}{2} I \omega_f^2 = mgh$$

Ricorda che per il CR $E_p = mgh$ con $m = m_{massa}$

Per un CR generico di raggio r : $I = m k^2$

$$mgh = \frac{1}{2} m \sigma_f^2 + \frac{1}{2} m \frac{k^2}{r^2} \sigma_f^2 \quad (\sigma_f = \omega_f r)$$

$$= \frac{1}{2} m \left(1 + \frac{k^2}{r^2} \right) \sigma_f^2$$

$$\sigma_f = \left[\frac{2gh}{1 + k^2/r^2} \right]^{1/2} \leq \sqrt{2gh} \quad \left. \begin{array}{l} \text{CASO} \\ \text{DEL PIANO} \\ \text{INCLINATO} \end{array} \right\}$$

σ_f è tanto maggiore quanto più la massa è concentrata vicino all'asse : $\left(\frac{k^2}{r^2} = 1 \right.$ Anello,
1/2 cilindro, 2/3 guscio sferico, 2/5 sfera)

Vi sono situazioni in cui $J_C \neq 0$ e $\textcircled{2}$
 il moto iniziale non è di puro rotolamento.

In questo caso la soluzione tramite la conservazione dell'energia non è possibile. Un caso caratteristico è quello di un oggetto messo in moto su un piano da una forza impulsiva.

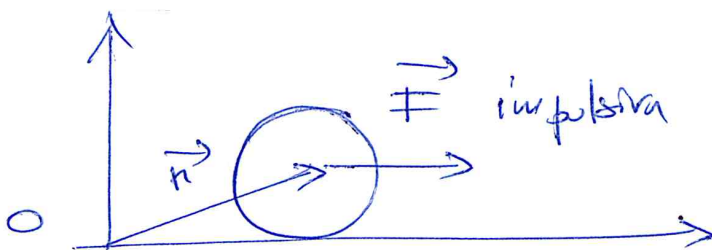
La forza impulsiva determina un momento impulsivo rispetto ad un polo. La legge del moto in forma integrale è:

$$\int_{t_1}^{t_2} \vec{M} dt = \Delta \vec{L}$$

forma integrale di $\vec{M} = d\vec{L}/dt$

Per $\vec{M}$ generata da forza impulsiva, la posizione di applicazione della forza, relativa al polo non cambia nel breve istante di applicazione

$$\int_{t_1}^{t_2} \vec{M} dt = \int_{t_1}^{t_2} \vec{r} \times \vec{F} = \vec{r} \times \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} dt = \vec{r} \times \vec{J} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$



O = polo nel
 riferim. iniziale

$$(1) \int \vec{J} = \Delta \vec{p}_{cm} \Rightarrow J_{cm}(0) = J/m$$

$$(2) \int \vec{M} = \int \vec{r} \times \vec{J} = \Delta \vec{L} \Rightarrow \Delta L_o = \Delta L' + \Delta L_{cm}$$

(3)

$$(2) \quad rJ = I\omega + r \cdot mJ_{cm}$$

$$\Rightarrow \omega = 0 \quad (\text{dalla (1) è } rJ = r mJ_{cm})$$

* La forza impulsiva determina un moto di puro strisciamento all'istante iniziale.

* Si noti che in (1)(2) non compare f ebbene per chi rispetto alla forza impulsiva è trascurabile (non sarebbe trascurabile con vincolo fido).

Dopo l'effetto della forza impulsiva il moto è definito dalle eq. del moto:

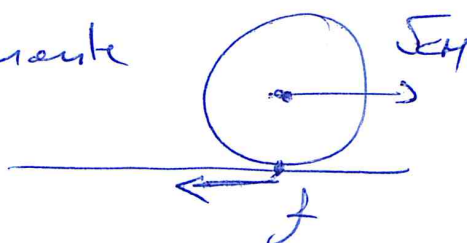
$$(3) \quad \begin{cases} m a_{cm} = -f \\ r f = I \alpha \end{cases}$$

Con condizioni iniziali $J_{cm}(0) = I/m$. Poiché $J_{cm}(0) \neq \omega r$, l'acc. del cm e α non sono accoppiate.

L'oggetto sviluppa il rotolamento e continua l'azione frenante fino al che $\omega r = J_{cm}$

Stesso tempo t^*

con $\omega t^* = \alpha t^*$

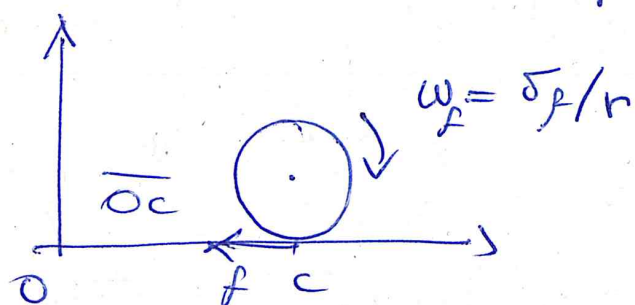


$$= \frac{r f}{I} t^* \rightarrow \text{nota che l'acc. è costante}$$

(4)

Per $t \geq t^*$ il moto procede a velocità $v_{cm} = v_f$ costante, poiché nel moto di puro rotolamento non c'è dissipazione di energia.

Sfruttiamo la conservazione di L_o (mom. angolare rispetto al polo O) per calcolare v_f . La conservazione di L_o consegue da $M_o = 0$:



$$M_o = \vec{OC} \times \vec{f} = 0$$

($\vec{OC}$ e $\vec{f}$ sono paralleli)

$$\Delta L_o = L_o(f) - L_o(i) = 0$$

$$\begin{cases} L_o(i) = r J & (\text{dalla Eq. (2)}) \\ L_o(f) = I\omega + r m v_{cm}(f) \end{cases}$$

$$r^2 J = I\omega r + m r^2 v_f$$

Da cui:

$$v_f = \frac{J r^2}{I + m r^2} = \frac{J}{m} \left[\frac{1}{1 + k^2/m^2} \right]$$

$$= v_{cm}(0) \left[\frac{1}{1 + k^2/m^2} \right] < v_{cm}(0)$$

(5)

La diminuzione di velocità è dovuta alla dissipazione di energia per effetto dell'attrito dinamico ~~diretto~~ nel moto di "strisciamento". Calcoliamo in modo esplicito la variazione di en. cinetica:

$$\Delta E_k = E_k(f) - E_k(i) =$$

$$= \frac{1}{2} m v_f^2 + \frac{1}{2} I \omega_f^2 - \frac{1}{2} m v_i^2 =$$

$$= \frac{1}{2} m v_f^2 + \frac{1}{2} m \frac{k^2}{r^2} v_f^2 - \frac{1}{2} m v_i^2 =$$

$$= \frac{1}{2} m \left(1 + \frac{k^2}{r^2}\right) v_f^2 - \frac{1}{2} m v_i^2 =$$

$$= \frac{1}{2} m \left(1 + \frac{k^2}{r^2}\right) \frac{1}{(1 + k^2/r^2)} v_i^2 - \frac{1}{2} m v_i^2 =$$

$$= - \frac{k^2}{r^2 + k^2} E_k(i) = - \frac{1}{1 + r^2/k^2} E_k(i) < 0$$

La dissipazione è tanto maggiore quanto minore è r^2/k^2 , anzi tanto meno le masse concentrate vicino all'asse di rotazione.

$$\frac{k^2}{r^2} = \begin{cases} 1 & \text{Anello} \\ 2/3 \approx 0.66 & \text{Guscio sferico} \\ 1/2 = 0.5 & \text{Cilindro} \\ 2/5 = 0.4 & \text{Sfera} \end{cases}$$

NOTA: In realtà c'è dissipazione anche nel puro rotolamento
 ATTRITO VOLVENTE (Pto di contatto non è pto ideale)

Giroscopio : CR con punto fisso $\rightarrow$ non c'è (6)
 moto traslatorio (in virtù delle reazioni vincolari
 nel punto fisso), ma pure rotazione.

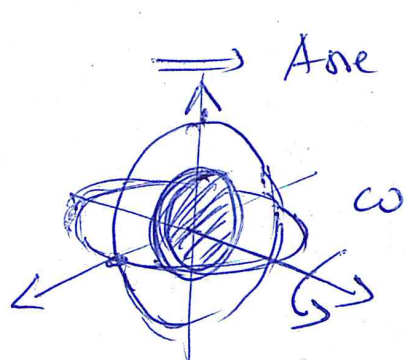
Soluzione generale complessa. Eq del moto

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt} \quad \text{con polo nel punto fisso}$$

(scelta ragionevole, se non ovvio)

Alcuni casi semplici esemplificativi:

1) Pto fisso nel CM, $\vec{M} = 0$, $\vec{L} = I\vec{\omega}$



$\Rightarrow$ Asse di rotazione fisso nel tempo
 (L conservato)

$\rightarrow$ se i supporti (vincolati al corp
 stesso) si muovono, cambia
 l'orientazione relativa del
 giroscopo ~~se~~

$\Rightarrow$ sensori di direzione (giroscopo nei telefonini)

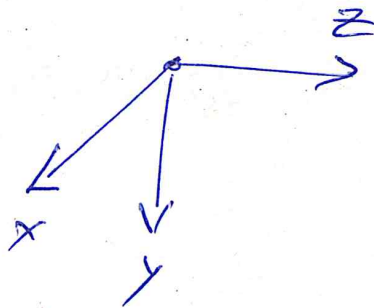
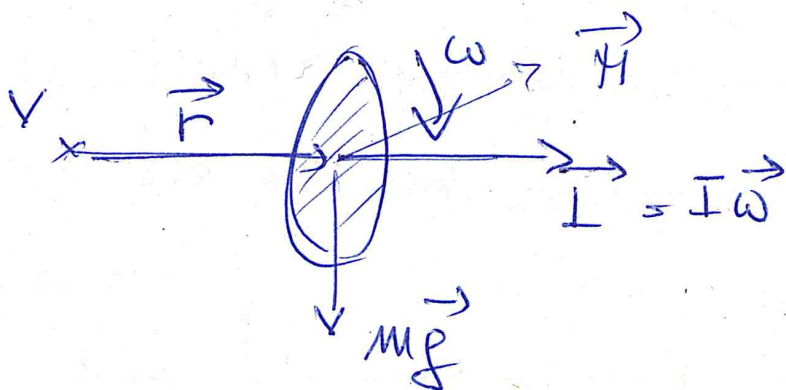
2) Corpo a simmetria sferica in rotazione
 attorno al proprio asse, con ~~se~~ $M^E \neq 0$
~~espresso~~ $\Rightarrow$ Moto di PRESSIONE.

~~Esempio~~

Esempio

Disco / ruota in rotazione
attorno ad asse, vincolato ad
un esterno.

(7)



$$\vec{L} = I\omega \hat{k}$$

$$\vec{F} = mg \hat{j}$$

$$\vec{M} = r \hat{k} \times mg \hat{j} = -mgr \hat{i}$$

Il momento della forza è $\perp$ a $\vec{L}$ e, nell'esempl.
diatto lung. x. L'equilibrio rotazionale è
generato dalla reazione vincolare in V. Eq.
del moto:

$$\begin{cases} F_V - mg = 0 \\ \vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt} \end{cases}$$

La variazione di $\vec{L}$, $d\vec{L}$, è diretta come
 $\vec{M}$ (Eq. vettoriali, con dt prodotto per uno
scalare positivo). Dunque $d\vec{L}$ è ortogonale
a $\vec{L}$, poiché $\vec{M}$ è ortogonale a $\vec{L}$.

È una situazione del tutto analoga al caso (c)
del moto circolare uniforme con $\vec{F} \perp \vec{\phi}$

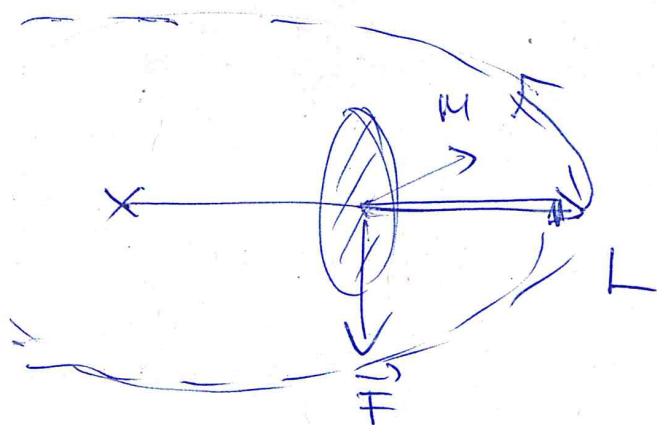
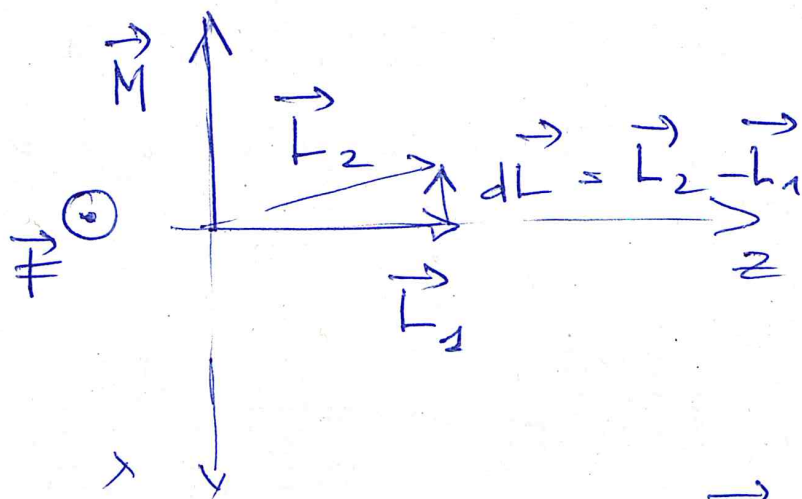
$\frac{d\vec{\phi}}{dt} = \vec{F}$ e' ortogonale a $\vec{F} \Rightarrow \vec{\phi}$ cambia

direzione (acc. centripeta), ma non modulo -

Analogamente qui $\vec{L}$ cambia direzione, ma non modulo $\rightarrow$ il corpo precece attorno a $\vec{F}$

(Si noti che $\vec{M}$ e $\vec{L}$ ruotano assieme, come $\vec{F}$ e $\vec{\phi}$, mantenendoli ortogonali)

VISTA NEL PIANO $\vec{M}$ e $\vec{L}$:



$\vec{F}$ non fa "cadere" il disco, che precece nel piano ~~vede~~ orizzontale

D'altronde, in modo formale:

(9)

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt} (L \hat{u}_{\parallel}) = \frac{dL}{dt} \hat{u}_{\parallel} + L \frac{d\phi}{dt} \hat{u}_{\perp}$$

$$\vec{M} = M_{\parallel} \hat{u}_{\parallel} + M_{\perp} \hat{u}_{\perp} = + m \vec{r} \times \hat{u}_{\perp}$$

$$\Rightarrow \frac{dL}{dt} = 0 \quad (\text{comp. parallele molla})$$

$L = \text{cost}$ in modulo

$$L \frac{d\phi}{dt} = m \vec{r} \times \hat{u}_{\perp}$$

$$\frac{d\phi}{dt} = \Omega \quad \text{frequenza angolare di precessione}$$

$$T = \frac{2\pi}{\Omega} = 2\pi \frac{L}{m \vec{r} \times \hat{u}_{\perp}} = 2\pi \frac{I \omega}{m \vec{r} \times \hat{u}_{\perp}}$$

* Questa soluzione è approx:

Ω attorno a $\vec{\omega}$ sviluppo $L_y \neq 0$

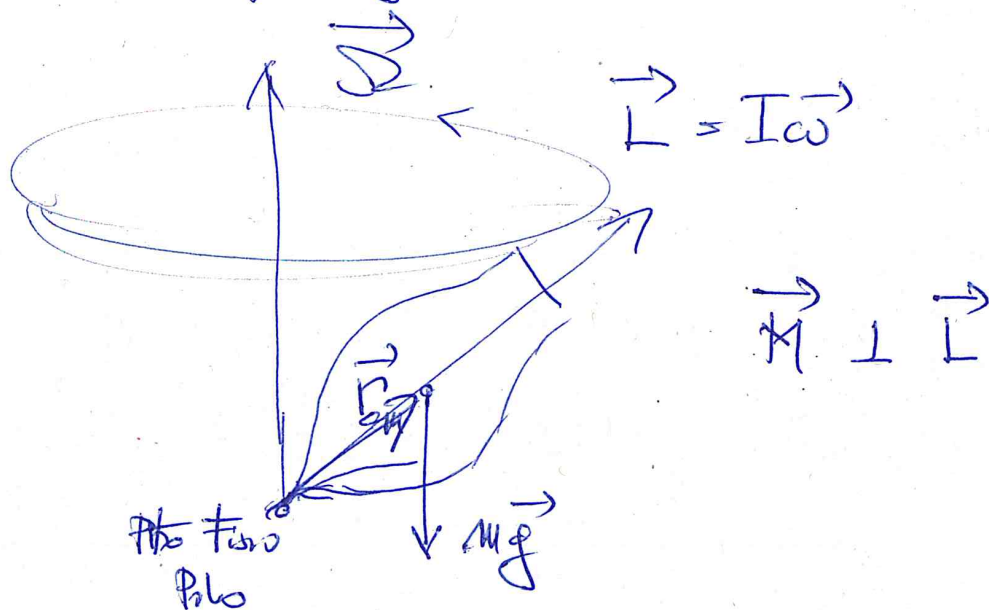
$$L_y = m \omega r^2 \quad (\text{se } \omega \gg \text{Raggio disco})$$

$$\text{Però } \tau_y = 0 \rightarrow L_y = \text{cost.}$$

* Moto diverso da $\omega = 0 \rightarrow$ corpo cade.

Caso più generale della trottola identico:

(10)



Vale sempre

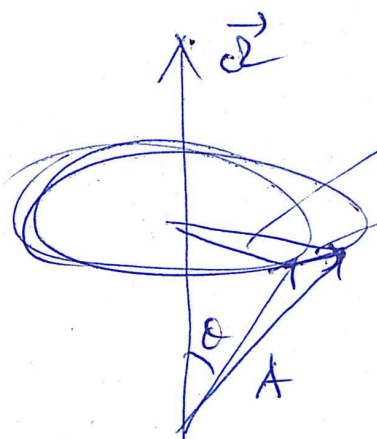
$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{dL}{dt} \hat{u}_{\parallel} + L \frac{d\phi}{dt} \hat{u}_{\perp}$$

$$e \quad |\vec{M}_{\parallel}| = 0 \quad |\vec{M}_{\perp}| = r_{cm} mg$$

Stesso risultato del caso particolare precedente

Averemo anche visto che per un vettore che precessa, con modulo costante

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \vec{\Omega} \times \vec{A}$$



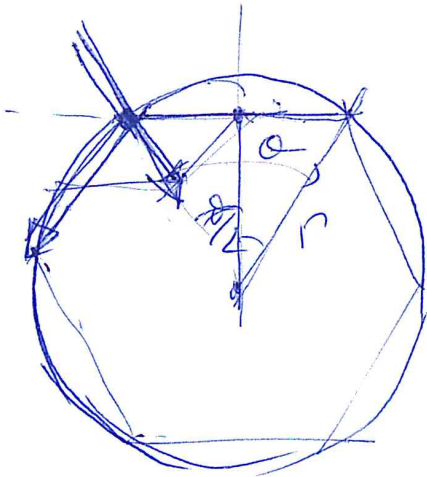
$$\frac{d\vec{A}}{dt} = A \sin\theta \frac{d\phi}{dt} = \vec{\Omega} \times \vec{A}$$

$$\text{Da cui: } \vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\Omega} \times \vec{A}$$

$$\vec{\Omega} = \frac{|\vec{M}|}{|\vec{L}|}$$

Es. * Moto di un pto materiale su un
poligono iscritto a un cerchio, con velocità
 v costante

* Urti elastici con le pareti

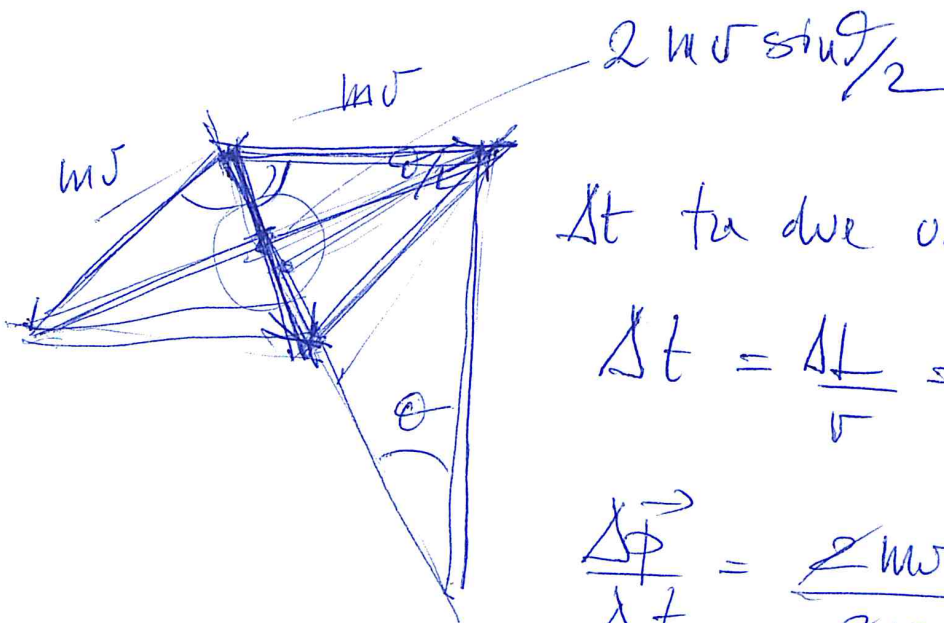


$$\vec{F} = m\vec{a}$$

Variazione urto elastico: solo angoli

$$\Delta \vec{p} = 2m v \sin \frac{\theta}{2} \hat{u}_r$$

Limite
del continuo



Δt tra due urti

$$\Delta t = \frac{\Delta L}{v} = \frac{2r \sin \theta/2}{v}$$

$$\frac{\Delta \vec{p}}{\Delta t} = \frac{2m v \sin \theta/2 \cdot \hat{u}_r}{2r \sin \theta/2} = \frac{m v^2}{r} \hat{u}_r$$

Legge NW :

$$\vec{F}_c = m\vec{a} = \left(\frac{m v^2}{r} \right) \hat{u}_r$$

Forza centripeta.

Moto generale:

$$\int \vec{F} = \frac{d\vec{P}_{CH}}{dt} \quad \text{Moto del CM}$$

$$\left| \vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt} \right. \quad \text{moto rispetto al CM}$$

Abbiamo visto situazioni particolari in cui le due equazioni non sono completamente indipendenti. Nel caso generale le equazioni possono essere complanari. In casi semplici si può ricorrere a leggi di cons. (se $\vec{M} = 0$ $\vec{L} = \text{cost}$, che significa $\vec{\omega} = \text{cost}$ solo se l'asse di rotazione è asse princ. di inerzia).

Statica: $\vec{F} = 0$
 $\vec{M} = 0$ 6 eq. definiscono le condizioni di equilibrio

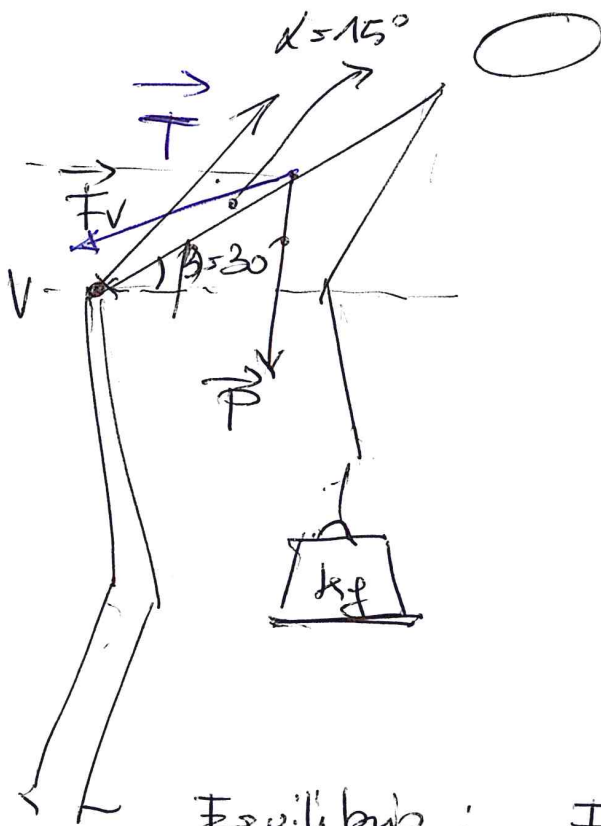
Se $\vec{F} = 0$, $\vec{v}_{CM} = 0$ e inoltre $\vec{M}$ è indipendente dal polo, che può essere scelto in modo conveniente

Nella maggior parte dei problemi si presentano forze complanari, la descrizione delle forze può essere ridotta alle ^(condizioni per le) componenti $F_x = 0$ e $F_y = 0$ essendo tutte le F_z identicamente nulle. Poiché le forze giacciono tutte nello stesso piano, la scelta di un polo complanare garantisce che M_x e $M_y = 0$ e la condizione di equilibrio di cui occuparsi è solo $M_z = 0 \Rightarrow 3$ equazioni.

Nel caso di leve, un vincolo fisso garantisce 3 eq. dov. e serve solo 1 eq.

Esempio di forte coupling: FORZE AGENTI SULLA SCHIENA —

Si calcoli la reazione vincolare esercitata dalla 5^a vertebra lombare quando si solleva un corpo addossando la schiena (vedi figura)



$\vec{P}$ = peso complessivo del tronco + corpo da sollevare

$\vec{T}$ = tensione del muscolo scheletrico della schiena (agisce con un angolo di 15°)

$\vec{F}_v$ = Reazione vincolare (incognita)

V - vincolo nella 5^a vertebra lombare (Polo per i Momenti)

Equilibrio:

$$F_{vx} = T \cos(\beta) \quad \text{asse } x$$

$$F_{vy} = T \sin(\beta - \alpha) + P \quad \text{asse } y$$

$$M_z: P \sin\left(\frac{\beta}{2} - \alpha\right) = T \sin(\alpha) \quad M_z = 0$$

$$\beta = 30^\circ, \alpha = 15^\circ$$

$$\beta - \alpha = 15^\circ$$

$$\frac{\beta}{2} = \beta = 60^\circ$$

Si ricavi T dalla terza equazione. Sostituendolo in (1) e (2) si trovano F_{vx} e F_{vy} . Da esse $F_v = \sqrt{F_{vx}^2 + F_{vy}^2}$

Fenomeni Elastici

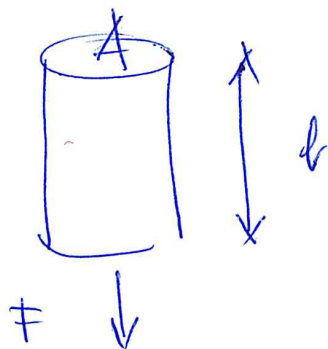
non discusso (per mancanza di tempo)

(13)

CR e' un'idealizzazione $\rightarrow$ deformazioni

- x compressione / trazione
- x taglio e momenti torcenti
- x torsione

- x Deformazioni : $\Delta l / l$ ($\Delta x / x$)
- x sforzo F / A



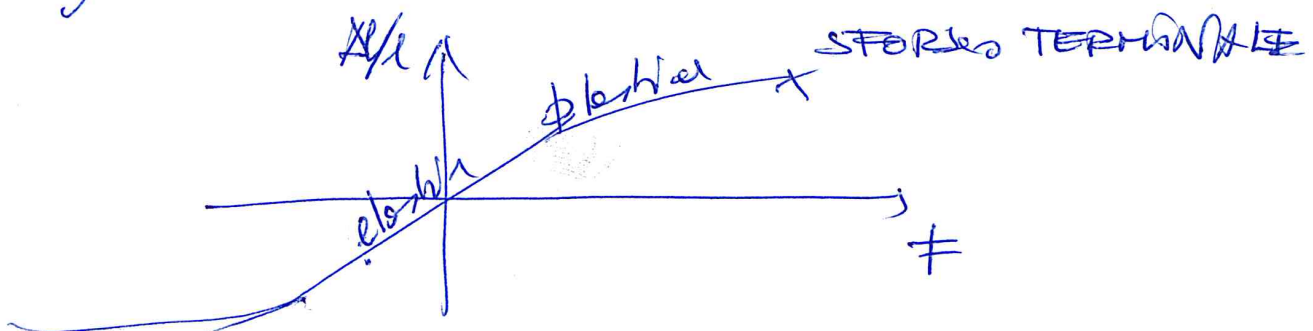
$$\vec{F} = -k \vec{\Delta l}$$

Forza elastica
(legge di Hooke)

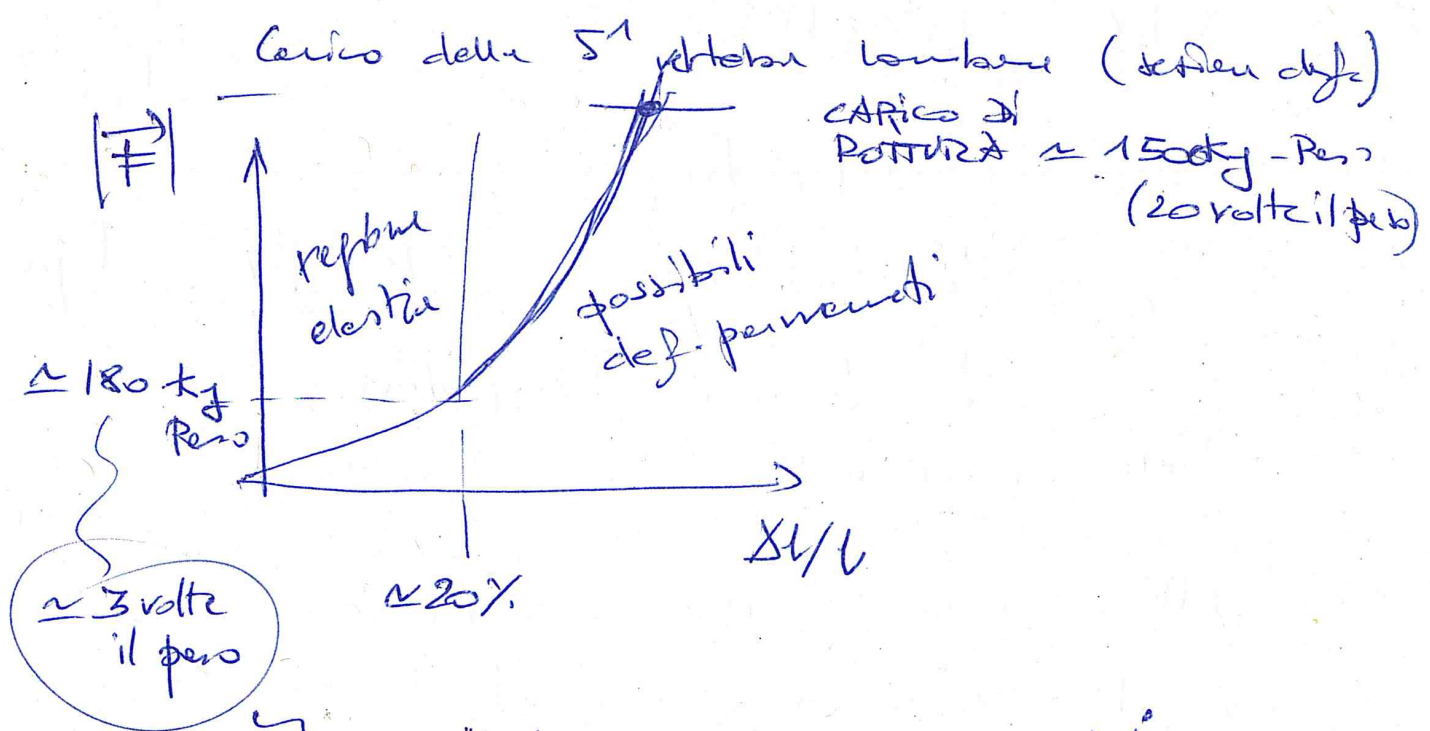
$$k = E \frac{A}{l}$$

$\downarrow$
costante elastica
 E = modulo di Young

La cost. elastica e' prop. alle sezioni, e dipende di materiale -
legge di Hooke, valida in un intervallo limitato di deformazioni



Es. Struttura della colonna con dischi
di diametro / sezione) crescente verso il
basso $\rightarrow$ maggior resistenza flessi
in legno della superficie



Al limite di allungamento del
fiori con tutto piegato

~~Al limite di allungamento del fiori con tutto piegato~~