Casi notevoli

1) $L_\perp = 0$ → z è asse di simmetria del CR:
[per ogni massa m_i a x_i e y_i esiste massa m_i a $-x_i$ e $-y_i$]

⇝ $\vec{L} \parallel \vec{\omega}$ $\qquad \vec{L} = I_z \vec{\omega}$

In qs. condizione $\vec{L}$ può cambiare solo in modulo e verso tramite:

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(I_z \vec{\omega}\right) = I_z \frac{d\vec{\omega}}{dt} = I_z \vec{\alpha}$$

$\vec{L}$ rimane sempre diretto lungo z e l'asse di rotazione istantaneo non cambia direzione

— Sia $\vec{\alpha}$ che $\vec{\tau}$ sono // all'asse di rotazione

↳ $\boxed{\tau = I_z \alpha}$

Da cui per integrazione $\alpha = \tau / I_z$

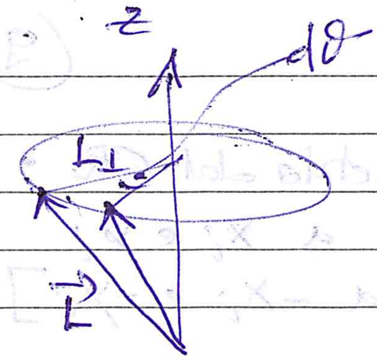
$$\omega(t) = \omega_0 + \int_0^t \alpha \, dt$$

$$\vartheta(t) = \vartheta_0 + \int_0^t \omega \, dt$$

2) $L_\perp \neq 0$, ma $\omega = \text{cost}$

$\vec{L}$ precede attorno all'asse con v. angolare costante e modulo costante

→



In qs. caso $\dfrac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{L}$

$$\frac{dL}{dt} = L_\perp \frac{d\theta}{dt} = L_\perp \omega$$

- Per la comp. assiale $\dfrac{dL_z}{dt} = \dfrac{d}{dt}(I_z \omega) = 0$
  e dunque $\tau_z = 0$
- Per la comp. trasversa $\dfrac{dL_\perp}{dt} = L_\perp \omega = \tau_\perp$

→ l'azione dei momenti delle forze τ_x, τ_y vincola il moto ad avvenire ~~lung~~ attorno all'asse (e i punti su orbite circolari)

- Caso generale :

Assiale: $L_z = I_z \omega \longrightarrow \dfrac{dL_z}{dt} = I_z \dfrac{d\omega}{dt} = I_z \alpha$

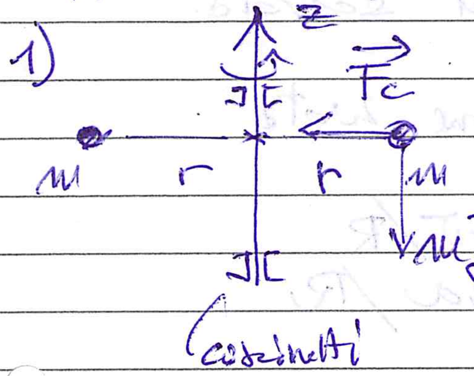
- Eq. dinamica : $\tau_z = I_z \alpha$, la cui soluzione determina l'acc. $\alpha = d\omega/dt$

Trasv. • Le proiezioni $\tau_\perp = \dfrac{dL_\perp}{dt}$ non comporta variazioni di α, ma serve per determinare le reazioni vincolari τ_x, τ_y che vincolano il moto alla rotazione attorno a z

⟶ Situazione analoga al moto circolare :
- Acc. tangenziale, equiv. a relazione assiale (cambia l'acc. lungo la traiettoria)
- F centripeta vincola il moto sul cerchio

Esempi sul non parall. di $\vec{\omega}$ e $\vec{L}$

. Rotazioni di 2 masse identiche, con ω = cost

1) 

$$L_z = I_z \omega = 2mr^2 \omega$$

$$L_\perp = \sum m z_i r \omega = 0$$

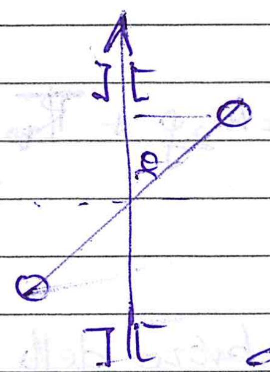
$$(z_i = 0) \longrightarrow \vec{L} = L_z \hat{k}$$

Per ω = cost $\frac{dL}{dt} = 0 \rightsquigarrow \vec{\tau} = 0$

Momenti : F. peso $\sum_i \vec{\tau}_{\vec{mg}} = 0$ bracci opposti (per ogni polo)

F. centripeta $\vec{\tau}_c = 0$ (braccio nullo)

$\rightsquigarrow$ Non serve forza sui cuscinetti assiali per mantenere il moto di rotazione

2) 

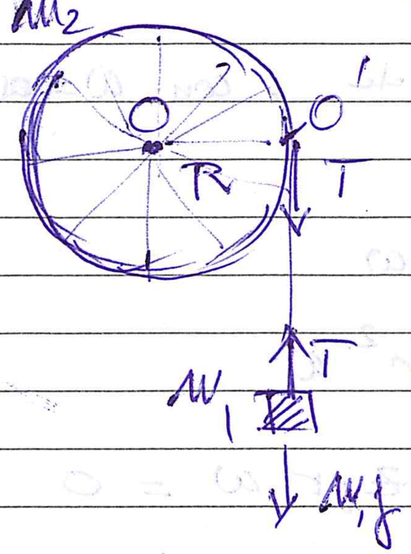
$$L_z = I_z \omega = 2mR^2 \omega$$

$$L_\perp = m z_1 R \omega + m z_2 R \omega = mR^2 r \cos\theta\, \omega \neq 0$$

$$\frac{dL_\perp}{dt} = L_\perp \omega = \tau_\perp$$ momento esercitato dai cuscinetti

$\longrightarrow$ Esempio concreto : bilanciamento x pneumatici

Esercizio : Anello di massa m_2 e raggio R (Ruota con raggi di m nulla)



+ filo che si srotola, con massa appesa, e non scivola

$\longrightarrow$ Rotazione ruota

$\omega = \cancel{R}v/R$

$\alpha = \cancel{R}a/R$

Eq. per il peso m_1 : $m_1\vec{g} - \vec{T} = m_1\vec{a}$

$\vec{R}$ per la ruota con vincolo in O : $m_2\vec{g} + \vec{T} + \vec{R}_V = 0$

da Eq. per le rotazioni attorno a O :

[nota : peso agisce in O, R_V agisce in O $\rightarrow$ braccio nullo] $\quad RT = I_z \alpha$

Con $I_z = m_2 R^2$ (tutta la massa a R da asse)

$$\begin{cases} \cancel{R}T = m_2 R^{\cancel{2}} \alpha \\ m_1 g - T = m_1 a \end{cases} \qquad T = m_2 a \qquad a = \frac{m_1}{m_1 + m_2} g$$

$$R_V = m_2 g + \frac{m_2 m_1}{m_1 + m_2} g \qquad (R_V = m_2 g + T)$$

Nota : $a < g$ $\longrightarrow$ parte del lavoro della forza è speso per mettere in rotazione la ruota

(Esempio Mazzoldi usa cilindro)

Momento di inerzia

— definito rispetto all'asse di rotazione

$$I = \sum_i m_i R_i^2$$

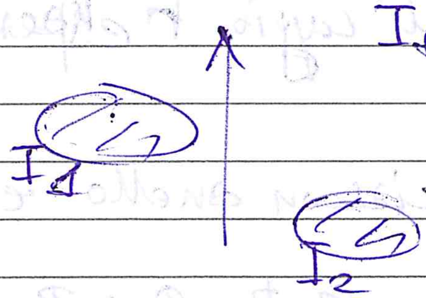
$$= \int dm\, R^2$$

Def. la dinamica di rotazione $\tau_z = I_z \alpha$ in modo analogo a m per $F = m a$

Però I dipende dalla distribuzione delle masse rispetto all'asse di rotazione

In sistemi composti da più elementi CR il mom di inerzia si calcola in modo additivo

$$I_{tot} = I_1 + I_2 + \ldots$$

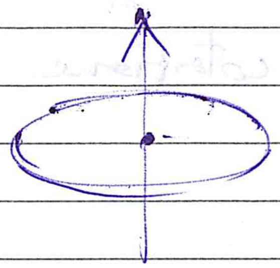


Proprietà che discende in modo ovvio dalla proprietà associativa della somma

$$I = \sum_i m_i R_i^2 = \sum_{i \in 1} m_i R_i^2 + \sum_{i \in 2} m_i R_i^2 + \ldots$$

Per alcune forme geometriche notevoli, conviene conoscere i momenti di inerzia:

1) Anello di raggio R e massa m (RUOTA)

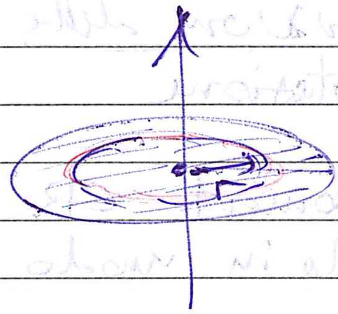


$$I = mR^2$$ tutta la massa è a dist. R

$$I = \int dm\, R^2 = R^2 \int dm = mR^2$$

2) Disco pieno omogeneo di raggio R e massa m

$$I = \frac{1}{2} mR^2$$



$$I = \int_0^R dI_{anello}(r)$$

Ogni anello (corona circolare) di raggio r e spessore dr ha massa $dm = \frac{m}{\pi R^2} \cdot 2\pi r\, dr$

Il momento di inerzia di ciascun anello è

$$dI(r) = r^2 dm \qquad \text{con } r \text{ tra } 0 \text{ e } R$$

Dunque: $$I = \int_0^R r^2 \frac{m}{\pi R^2} \cdot 2\pi r\, dr$$

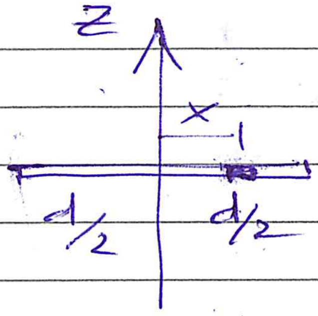
$$= \frac{2m}{R^2} \int_0^R r^3 dr = \frac{2m}{R^2} \frac{R^4}{4} = \frac{1}{2} mR^2$$

3) Cilindro: $I = \frac{1}{2} mR^2$ (I_z non dip da distrib lungo l'asse, ma solo da dist. dall'asse)

4) Sfera cava (pallone) $\quad I = \frac{2}{3} m R^2$

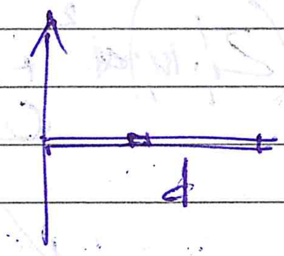
5) Sfera piena $\quad I = \frac{2}{5} m R^2 \longrightarrow$ esercitato

6) Sbarra (rispetto al CdM) $\quad I = \frac{1}{12} m d^2$



$$I = \int_{-d/2}^{d/2} \frac{m}{d} dx \cdot x^2 = \frac{1}{12} m d^2$$

7) Sbarra per un estremo



$$I = \int_0^d \frac{m}{d} dx\, x^2 = \frac{1}{3} m d^2$$

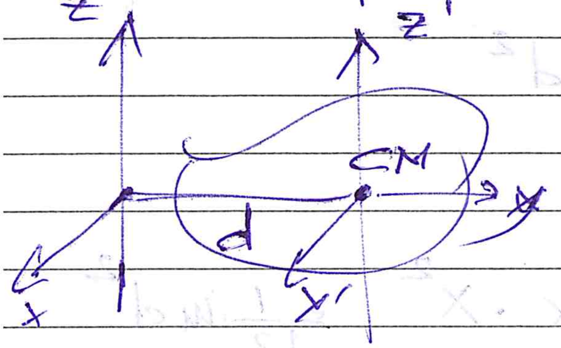
$\longrightarrow$ In tutti i casi: massa x dimensione caratt x fattore numerico

Si può scrivere in generale

$I = m K^2$ con K = Raggio giratore pari al raggio dell'anello di ~~anello~~ pari massa che avrebbe lo stesso momento di inerzia

Teorema dell'asse parallelo (Huygens-Steiner)

- Calcolo del mom. di inerzia per un asse parallelo all'asse per il CdM



$$I = I_{CM} + md^2$$

$$I_{CM} = \sum_i m_i (x_i'^2 + y_i'^2)$$

$$I = \sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2)$$

$$= \sum_i m_i [x_i'^2 + (y_i' + d)^2] =$$

$$= \sum_i m_i (x_i'^2 + y_i'^2) + (\sum_i m_i) d^2 + \underbrace{2d \sum_i m_i y_i'}_{0}$$

$$= I_{CM} + md^2$$

termine nullo poiché $\sum_i m_i y_i' = m y_{CM}'$ e la posizione del CM nel SR del CdM è 0

Esempio: risolvere l'esercizio di pag 10-bis (ruota con filo e peso) scegliendo il polo in O'

Coperto nella lezione successiva

Energia cinetica e lavoro nel moto di rotazione

- Si può ricorrere, talvolta a $W = \Delta E_k$ per la soluzione del problema dinamico

Nel caso di RRAF:

$$E_k = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2$$

$$= \sum_i \frac{1}{2} m_i (R_i \omega)^2$$

$$= \frac{1}{2}\left(\sum_i m_i R_i^2\right) \omega^2 = \frac{1}{2} I \omega^2$$

L'energia cinetica può essere espressa tramite il momento di inerzia

- ω è indip. dalla scelta dell'asse fisso di rotazione nella descrizione del moto

- I invece dipende da AF di rotazione

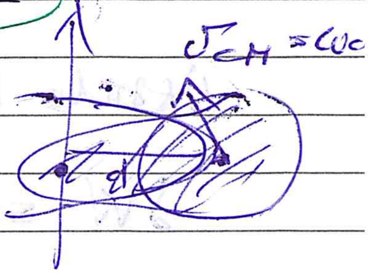
KOENIG

Si può esprimere I in riferimento al teorema di Huygens-Steiner: $I = I_{CM} + md^2$

⇒ meglio farlo con teorema di Koenig

$$E_k = \frac{1}{2} I \omega^2 = \frac{1}{2}\left(I_{CM} + md^2\right)\omega^2 =$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2} I_{CM} \omega^2}_{\text{Rotazione attorno al CM}} + \underbrace{\frac{1}{2} m v_{CM}^2}_{\text{Traslazione del CM}}$$



Stesso risultato da Koenig:

$$E_k = \frac{1}{2} m v_{CM}^2 + E_k'$$

L'energia cinetica può essere calcolata sia trattando il moto come pura rotazione attorno ad AF:

$$E_k = \frac{1}{2} I \omega^2$$

Sia come moto di traslazione del CM + rotazione attorno al CM:

$$E_k = \frac{1}{2} I_{CM} \omega^2 + \frac{1}{2} m v_{CM}^2$$

L'en. cinetica è identica nei due casi. Bisogna stare attenti però, nel calcolo di fare le cose in modo consistente.

— Lavoro di rotazione (attorno asse z)

$$W = \Delta E_k = \frac{1}{2} I_z \omega_f^2 - \frac{1}{2} I \omega_i^2$$

In termini infinitesimi

$$\delta W = d\left(\frac{1}{2} I_z \omega^2\right) = I_z \omega \, d\omega = I_z \frac{d\theta}{dt} \alpha \, dt$$

Usando l'equazione dinamica del moto angolare

$$\delta W = I \alpha \, d\theta = \tau_z \, d\theta$$