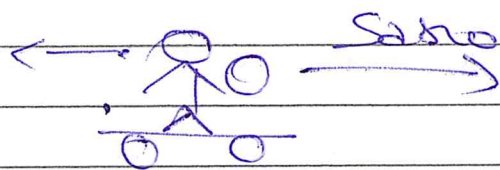


URTI

Esempio  
Applicazione

$$\vec{P}' = 0$$

$$\vec{F}_K = \vec{F}_K' + \frac{1}{2} M v_{CM}^2$$



CARRELLI SENZA ATRITO

Se  $R^{(e)} = 0$  ,  $\vec{P} = 0$  ,  $\vec{J}_{CM} = 0$   
 Se  $R^{(e)} \neq 0$  ,  $\vec{P}' = 0$  ,  $\vec{J}_{CM} \neq 0$

Azioni di  $F^{(e)}$  per lanciare il sasso

$$\vec{P}' = 0 \quad m_u \vec{v}_u' + m_s \vec{v}_s' = 0$$

(indice primato riferito al sist. del ColM)

nel ColM  $v_u = - \frac{m_s v_s}{m_u}$  Rinvolto

stessi direzioni, verso opposto

Per conoscere  $v_s$  e  $v_u$  in modulo assoluto bisogna conoscere l'intensità della forza che agisce sul punto (e uno dei due sono forze mutue reciproche)

$$\vec{J}_s = \int \vec{F}_s dt = \Delta \vec{p}_s$$

$$= m_s \Delta v_s$$

TEOREMA DELL'IMPULSO

L'energia cinetica è cambiata per effetto del lavoro delle forze interne

- il termine che cambia è quello dell'energia cinetica relativa

- senza ragione, perché non c'è azione di forze esterne

In un sistema di PTI

•  $\sum F^e$  → moto del cdm

•  $F^i$  → rilevante per moto interno

•  $F^e + F^i$  moto di ciascun punto

L'esempio presentato è un caso particolare di un urto tra due corpi  
"URTO ESPLOSIVO"



# URTI TRA DUE PONTI MATERIALI

\* URTO - Interazione tra due ponti ~~che vengono a contatto~~ ( $F$ : interna) in un intervallo di tempo  $\tau$  molto piccolo rispetto al tempo di osservazione del sistema

-  $\tau$  piccolo  $\Rightarrow$  ponti "fissi" nell'intervallo di tempo di interazione  $\tau$

- Forza impulsiva  $\Rightarrow$  Forza  $F(t) \neq 0$  solo per  $t \sim \tau$

Forza molto intensa:

$$\int_0^{\tau} F(t) dt = \text{finito per } \tau \text{ infinitesimo}$$

- È forza interna di mutua interazione

Durante l'urto  $J^{(e)} = 0$

• Si può assumere  $J^{(e)} = 0$  anche durante l'urto  $\leftarrow F^{(e)} \neq 0$  durante poiché  $\tau$  è piccolo e l'ipotesi di Forza impulsiva significa  $F^{(i)} \gg F^{(e)}$

$$J^{(i)} \gg J^{(e)} \quad (F \text{ ext. trascurabile durante l'urto})$$

Conseguente:

$$J^{(ce)} = 0 \quad \text{durante l'orto}$$

$$\Rightarrow \Delta \vec{P} = 0 \quad \vec{F}_{in} = \vec{F}_{fin} = (m_1 + m_2) \vec{v}_{cm}$$

Dunque  $\vec{v}_{cm} = \text{cost}$  durante l'orto:

- il sist di riferimento del CM è riferimento inerziale durante l'orto
- Inoltre è il riferimento più comodo per descrivere le variazioni di moto interne al sistema

Perché  $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$  per la forza impulsiva

$$\vec{J}_{12} = -\vec{J}_{21} = \int_0^{\vec{L}} \vec{F}_{12} dt \neq 0$$

$$\Rightarrow \Delta \vec{p}_1 = \vec{J}_{12}$$

$$\Delta \vec{p}_2 = -\vec{J}_{12}$$

$$\Rightarrow \Delta \vec{p}_1 = -\Delta \vec{p}_2$$

Variazioni di  
qta' di moto  
uguali e opposte

[ D'altronde  $\Delta \vec{P} = 0$  significa

$$\Delta \vec{P} = \Delta(\vec{p}_1 + \vec{p}_2) = \Delta \vec{p}_1 + \Delta \vec{p}_2 = 0$$



Energia nell'orto

T. EN. CINETICA :  $W = \Delta E_K$

per  $F^{(e)}$  trascurabili come nel caso di orti,  $W$  e' dovuto solo a forze interne

$$\Delta E_K = W^{(I)}$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{ij} \vec{F}_{ij} \cdot d(\vec{r}_i - \vec{r}_j)$$

invariante per tutti i riferimenti inerziali

Per ogni riferimento inerziale  $\Delta E_K = \Delta E'_K + \Delta E_{CM}$  particolare nel rif del cdm

$$E_K = \frac{1}{2} M v_{CM}^2 + E'_K$$

$$\Delta E_K = \Delta \left( \frac{1}{2} M v_{CM}^2 \right) + \Delta E'_K$$

= 0 poiche'  $v_{CM} = cost$

Variation dell'energia cinetica dovuta ai moti interni coincide con la variazione di en. cinetica in tutti i rif. inerziali (risultato ovvio per le ipotesi fatte e per il risultato generale che  $\Delta E_K = \Delta E'_K$  se agiscono solo  $F^{(int)}$ )

## Variatione di $E_k$ cinetica durante un urto

In generale :

- $\Delta E_k \neq 0$  ( $\mathcal{W}^i \neq 0$ )
- $F_{int}$  cons. e non conservative

$\Rightarrow \Delta E_k$  dipende solo dalle forze non conservative

Dimostrazione : Scomponiamo il teorema dell'energia cinetica durante l'urto nel contributo delle forze interne IMPULSIVE di natura cons. e non conservative :

$$\begin{aligned} \Delta E_k' &= \mathcal{W}_{mc}^{(I)} + \underbrace{\mathcal{W}_{cons}^{(I)}}_{\substack{\text{Esprimibile} \\ \text{tramite } \mathbb{F}_p}} \\ &= \mathcal{W}_{mc}^{(I)} - \Delta \mathbb{F}_p^{(I)} \end{aligned}$$

•  $\mathbb{F}_p$  è una funzione delle coordinate dei punti (per ogni pto  $\mathbb{F}_{p,i}^{(I)} = \mathbb{F}_{p,i}(\mathbf{R}_i)$ )

• Durante un urto ( $\tau$  piccolo), punti fissi e spostam. trascurabili  $\Rightarrow \Delta \mathbb{F}_p^{(I)} = 0$  | ossia il lavoro delle forze conservative impulsive è nullo -

$$\Rightarrow \Delta E_k' = \mathcal{W}_{nc}^{(I)}$$

[Se ci sono solo forze conservative  $\Delta E_k' = 0$ ]



## CLASSIFICAZIONE DEGLI URTI

Si utilizza la variazione dell'energia cinetica in un urto per classificare gli urti:

$$1) \Delta E_K' = 0$$

URTO ELASTICO  
(non ci sono forze  
non conservative)

$$2) \Delta E_K' < 0$$

URTO INELASTICO  
dissipazione di  $E_K'$

$$3) \Delta E_K' = -E_K' (in)$$

URTO COMPLETAMENTE  
INELASTICO  
→ dissipazione completa  
di  $E_K'$

$$4) \Delta E_K' > 0$$

URTO ESPLOSIONE  
 $E_K'$  aumentata dai  
lavori interni  
(esempio propulsione  
dei razzi o lancio  
del sasso)

$E_K'$  è l'energia relativa al CM. Sappiamo  
che durante l'urto  $\Delta E_K' = \Delta E_K$ , ma  
in generale  $E_K \neq E_K'$  (se  $v_{CM} \neq 0$ )



# DESCRIZIONE DEGLI URTI

• Sistema del Laboratorio : SRI in cui  
 cui si compiono le osservazioni cinematiche  
 sui due corpi :  $m_1, m_2, \vec{v}_1$  e  $\vec{v}_2$

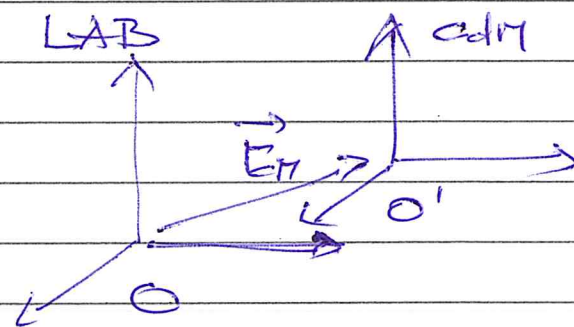
• Sistema del CM : SR (non necessariamente  
 inettiale) in cui si ha una descrizione  
 semplice dell'urto dinamico

$$\left. \begin{aligned} \vec{P}' &= 0 \\ \Delta E'_K &= W_{nc} \end{aligned} \right\}$$

## Procedimento :

1) Descrizione nel LAB :

$$\vec{v}_{CM} = \frac{m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2}{m_1 + m_2}$$



Ricavo  $v_{CM}$  rispetto al SRI del LAB

2) Passaggio al CM (SR in moto con  $\vec{v} = \vec{v}_{CM}$   
 ma senza rotazione di assi)

$$\vec{v}'_i = \vec{v}_i - \vec{v}_{CM} \quad i = 1, 2$$

3) Analisi dell'urto :  $\vec{P}' = 0 \Rightarrow \left[ \begin{aligned} m_1 \vec{v}'_1 &= -m_2 \vec{v}'_2 \end{aligned} \right]$   
 Prima ed dopo l'urto

3) Analisi dell'urto nel CM :

Condizioni :  $\vec{P} = 0$  e  $\Delta\vec{P}' = 0$  (solo F. interna)

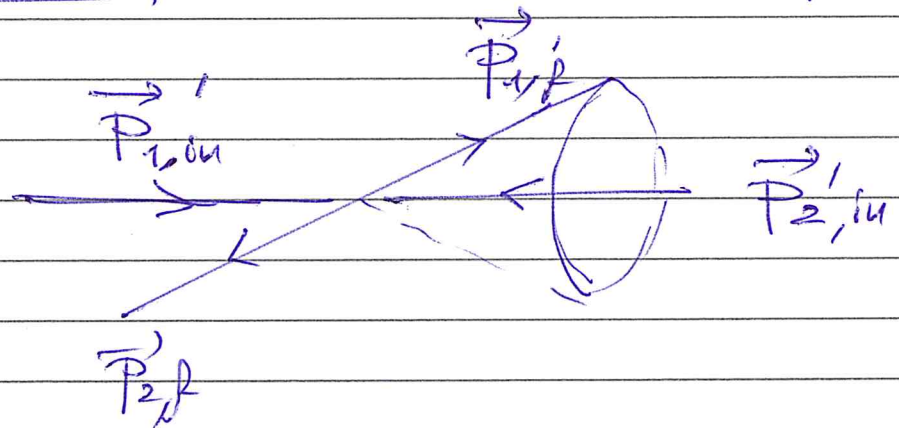
$\Rightarrow m_1 \vec{v}_1' = -m_2 \vec{v}_2'$  Prima e dopo l'urto

(\*)  $\begin{cases} \vec{P}_{1,iu}' = -\vec{P}_{2,iu}' \\ \vec{P}_{1,f}' = -\vec{P}_{2,f}' \end{cases}$  Stessi direzioni e moduli  
velocità opposti sia prima  
sia dopo l'urto

4) Ritorno al SRI del LAB

$\vec{v}_{i,f} = \vec{v}_{i,f}' + \vec{v}_{cm}$   $i = 1, 2$

Attenzione : In generale però  $\vec{P}_{1,f}' \neq \vec{P}_{1,iu}'$



La condizione  $\Delta\vec{P}' = 0$  (3 equazioni scalari) non è sufficiente a determinare completamente l'urto - vincola modulo e direzioni relative di  $\vec{P}_{1,f}'$  e  $\vec{P}_{2,f}'$ , ma non modulo e direzioni assoluta della coppia



In generale nell'orbita sono "misurati" (o definiti)  
 $\rightarrow \vec{\Phi}_1, \dot{\alpha}_1$  e  $\vec{P}_2, \dot{\alpha}_2$  (oppure  $\vec{\Phi}_1, \dot{\alpha}_1$  e  $\vec{P}_2, \dot{\alpha}_2$ )  
 e si vuole determinare  $\vec{\Phi}_1, \dot{\alpha}_1$  e  $\vec{P}_2, \dot{\alpha}_2$   
 o viceversa —

$\rightarrow$  Il problema ha 6 incognite

$\rightarrow$  La condizione  $\vec{\Phi}_1, \dot{\alpha}_1 = -\vec{P}_2, \dot{\alpha}_2$   
 definite 3 equazioni

Restano 3 incognite indeterminate

$(\Phi_x, P_x, P_z)_{1,2}$  oppure  $|\Phi_f|, \vartheta, \varphi$

Queste incognite richiedono ulteriori  
 condizioni —

~~Ad esempio~~:  $\Delta E_K = W_{h.c.}$

$\rightarrow$  fissa il modulo di  $P_f$

Condizioni vincolari: (moto 1D,  
 mob piano)

$\rightarrow$  fissa le direzioni

Conditione su  $\Delta E_K'$

(variazione di  $E_K'$  nell'urto)

$$E_K' = \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2'^2$$

$$= \frac{1}{2} \frac{p_1'^2}{m_1} + \frac{1}{2} \frac{p_2'^2}{m_2} \quad (\vec{p}_1' = -\vec{p}_2')$$

$$= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) \phi_1'^2$$

$$= \frac{1}{2} \frac{\phi_1'^2}{\mu}$$

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

massa ridotta

$$\Delta E_K' = \frac{1}{2} \frac{\phi_{1,i}^2}{\mu} - \frac{1}{2} \frac{\phi_{1,f}^2}{\mu}$$

$$\boxed{\phi_{1,f}^2 = \phi_{1,i}^2 + 2\mu \Delta E_K'}$$

• La condizione su  $\Delta E_K'$  pone una condizione sul modulo di  $\phi_{1,f}$

• Nel caso di urto ELASTICO  $\Delta E_K' = 0$

$$\phi_{1,i} = \phi_{1,f}$$

Cambiano solo la direzione (2 angoli)



# COLLISIONI ELASTICHE

$$\Delta E'_K = 0$$

$$E_{K, in} = E_{K, fin}$$

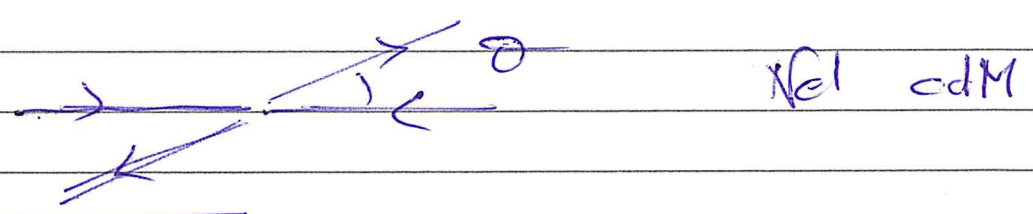
molte  $\left\{ \begin{array}{l} P_{1,u} = P_{2,u} \\ \vec{P}_{1,p} = -\vec{P}_{2,p} \end{array} \right. \quad 4 \text{ equazioni}$

~~$\vec{P}_{1,u} = \vec{P}_{2,u}$~~

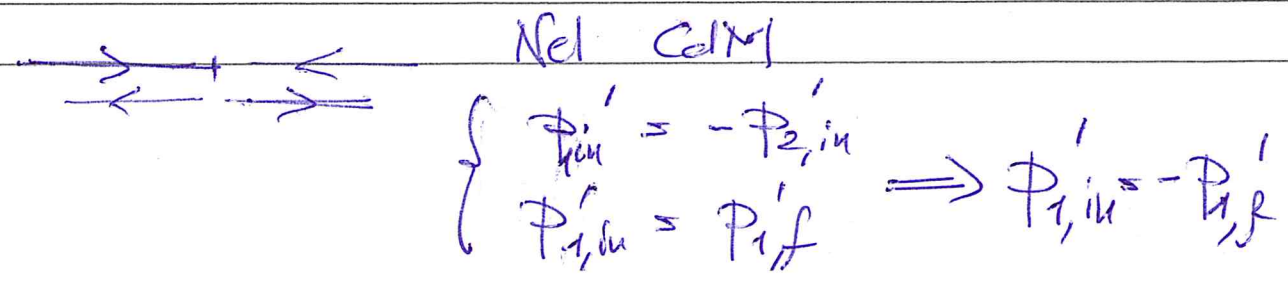
- Cas 3d : 2 incognite (direzioni  $u, p$ ) non definite
- serve minima o altre condizioni vincolari

- Cas 2d - Restrizione vincolare che vincola l'urto in un piano (Es. biglie su tavolo da biliardo)

1 incognita supplementare -  $\vec{v}$  esempio di sfidare

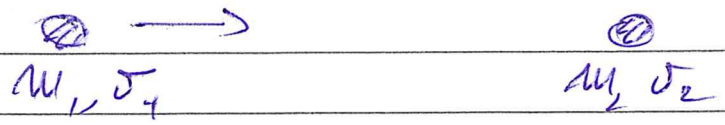


- Caso 1d : 2 condizioni vincolari (URTO FRONTALE)
- urto completamente determinat.



# Esempio 1D: Urto Frontale elastico

## 1) SRI del Laboratorio



$$v_{CM} = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} \quad (\text{verso di } v_1 \text{ e } v_2 \text{ dal segno})$$

## 2) SR del CM: $v'_{j,m} = v_{j,m} - v_{CM} \quad j=1,2$

## 3) Dinamica dell'urto elastico

$$\vec{P}' = 0 \text{ e } \Delta \vec{P}' = 0 : \begin{cases} P_{1,m}' = -P_{2,m}' \\ P_{2,f}' = -P_{1,f}' \end{cases}$$

$$\Delta E_K' = 0 : \begin{cases} P_{1,m}' = -P_{1,f}' \\ P_{2,m}' = -P_{2,f}' \end{cases}$$

$$\Rightarrow v'_{j,f} = -v'_{j,m}$$

## 4) SRI del LAB: $v'_{j,f} = v'_{j,f} + v_{CM}$

$$v_{j,f} = v_{CM} - v'_{j,m} = 2v_{CM} - v_{j,m}$$

$$\begin{cases} v_{1,f} = \frac{2m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} - v_1 = \frac{(m_1 - m_2)v_1 + 2m_2 v_2}{m_1 + m_2} \\ v_{2,f} = \frac{(m_2 - m_1)v_2 + 2m_1 v_1}{m_1 + m_2} \end{cases}$$



Alcuni casi particolari

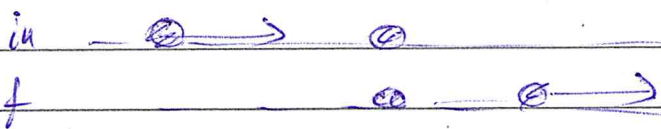
A)  $m_1 = m_2$  e  $\sigma_2 = 0$

$\rightarrow \sigma_{1,f} = 0$

$\sigma_{2,f} = \sigma_1$

la prima biglia si ferma

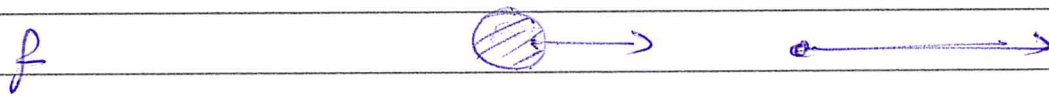
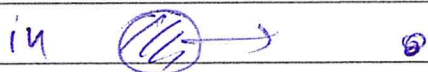
la seconda biglia prende la v. della prima (e  $\vec{p}$  e  $E_k$ )



B)  $m_1 \gg m_2$  e  $\sigma_2 = 0$

$\sigma_{1,f} \approx \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \sigma_1 \ll \sigma_1$

$\sigma_{2,f} \approx \frac{2m_1}{m_1 + m_2} \sigma_1 \approx 2\sigma_1$



C)  $m_1 \ll m_2$  e  $\sigma_2 = 0$

$\sigma_{1,f} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \sigma_1 \approx -\sigma_1$  Rimbalza

$\sigma_{2,f} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} \sigma_1 \approx 0$  Non si muove



URTO CONTRO PARETE

Parete non è libera del T esterno (vincoli)  
 ma possiamo assumere urto contro  
 massa infinita -

È il caso c) -

• il CM coincide con la parete ( $M = \infty$ )  
 e per urto elastico  $\Phi'_{1, \text{in}} = -\Phi'_{1, f}$

— L'oggetto incidente rimbalza contro  
 la parete

Se  $m = \infty$ , nel laboratorio (caso c)

$$v_{1, \text{in}} = -v_{1, f}$$

$$\rightarrow E_K(\text{in}) = \frac{1}{2} m v_{1, \text{in}}^2 = \frac{1}{2} m v_{1, f}^2 = E_K(f)$$

$$\rightarrow \Delta P_1 = 2 P_1 \quad \leftarrow \text{Sarei portato a pensare che } \Delta p \text{ non si conserva}$$

\* Nella descrizione in termini di URTO, non si conserva  $\Delta P_1$ , ma  $\Delta P_{\text{TOT}}$ . La cons. è garantita da  $M_2 = \infty \rightarrow \Delta p \neq 0$  perché  $\Delta p = 0$

\*  $M_2 = \infty$  è una scelta di massa efficace utile per la descrizione - In realtà ho  $\vec{J}^{(e)}$  dovuto alla forza normale del muro -



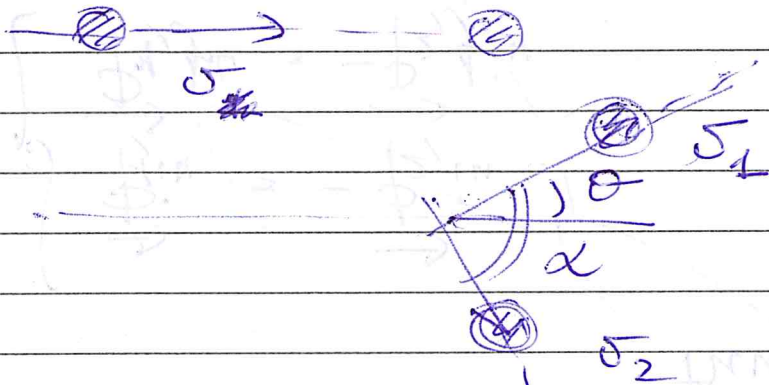
Esercizio 2D (semplice)

Biglie uguali

$$m_1 = m_2 \equiv m$$

$$v_1 \neq 0$$

$$v_2 = 0$$



URTO ELASTICO

Angolo  $\alpha \neq 90^\circ$

Dim. - Nel CAS SRI

$$\vec{P} = \text{cost} \Rightarrow m \vec{v} = m \vec{v}_1 + m \vec{v}_2$$

$$\Delta E_k = 0 \Rightarrow \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m v_1^2 + \frac{1}{2} m v_2^2$$

$$\begin{cases} \vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 \\ v^2 = v_1^2 + v_2^2 \end{cases}$$

Regole di somma  
Rel. vettoriale

$v_1, v_2, v$  sono i lati di un triangolo

Il triangolo è rett. (Pitagora)

Dim nel CAS

$$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = (\vec{v}_1' + \vec{v}_{CM}) \cdot (\vec{v}_2' + \vec{v}_{CM}) = v_{CM}^2 - v_1'^2$$

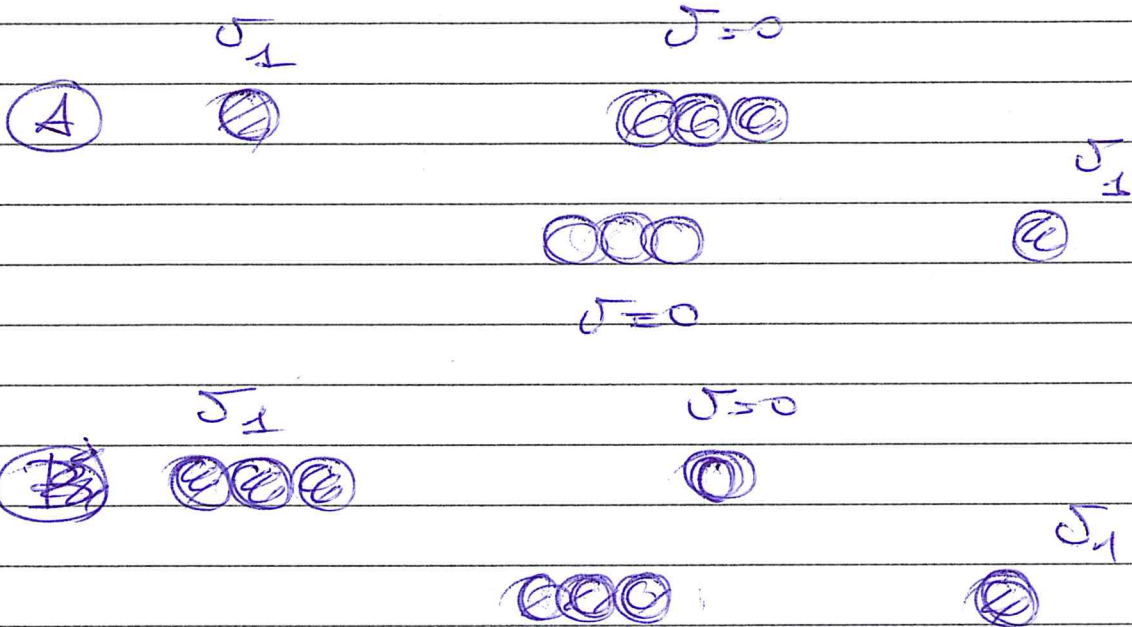
$$\text{and } v_{CM} = \frac{1}{2} v$$

$$v_1' = \frac{1}{2} v$$

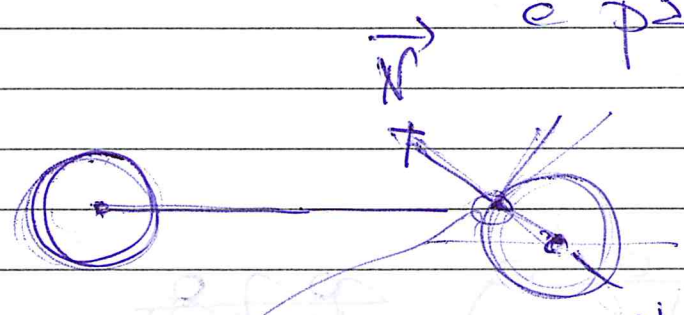
(Provare per credere)

Altri esempi sul digiarolo

1) Mono dim.



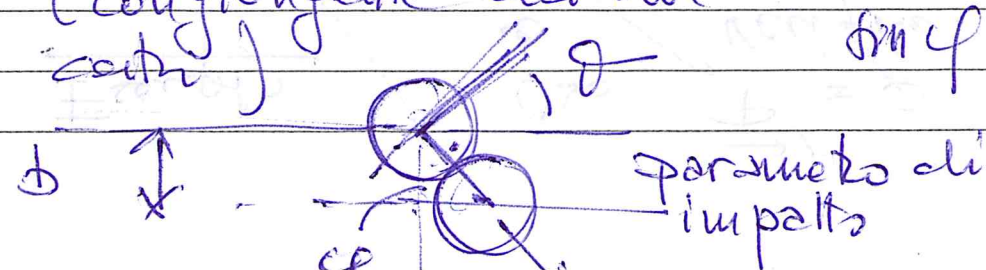
3) Area 2D - Angolo di diffusione e parametro di impatto



L'impulso agisce lungo  
 la congiungente tra il punto di contatto con  
 il centro della sfera  
 (congiungente dei due  
 centri)

$$\theta + \phi = \frac{\pi}{2}$$

$$\sin \phi = \frac{b}{2R}$$



parametro di  
 impatto



Urta anelastici

• Cas generale  $\Delta E_K' < 0$  ( $\rightarrow$   $\Delta K_{int, el}$ ,  $\Delta E_{form}$ )

• Cas notevole  $\Delta E_K' = -E_{K, in}'$

tutta l'en. cinetica iniziale e' dissipata  
(relativa)

$$E_{K, in}' = E_{K, in}' + \frac{1}{2} M \sigma_{CM}'^2$$

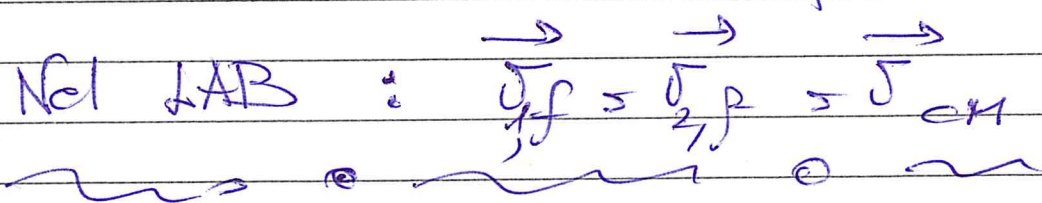
→ questo termine e' dissipato

$$E_{K, in}' = \frac{1}{2} m_1 \sigma_{1, in}'^2 + \frac{1}{2} m_2 \sigma_{2, in}'^2$$

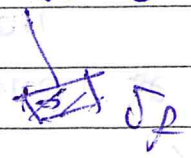
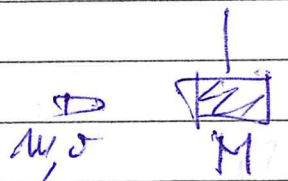
$$E_{K, R}' = 0 \implies \sigma_{1, R}' = \sigma_{2, R}' = 0$$

I corpi sono fermi nel SR del CM

→ RESTANO ATTACCATI (esempio pallottola nel pendolo balistico)



Es. Pendolo balistico



$$\sigma_f = \sqrt{2gh}$$

$$\sigma_{CM}' = \frac{m v_0}{m+M}$$

$$\sigma = \frac{m+M}{m} \sqrt{2gh}$$