SISTEMI DI PUNTI MATERIALI

* Come punti "liberi" (sistema planetario)
* Come punti "rigidamente" vincolati (corpo rigido)

Proprietà dinamiche descritte dalle leggi della dinamica per ciascun punto, ma alcune proprietà di insieme possono essere descritte da grandezze di insieme

→ semplificazione della descrizione

Definito un sistema di punti la forza agente su ciascun punto, che ne determina il moto, può essere scritta come:

$$\vec{F}_i = \vec{F}_i^{(e)} + \vec{F}_i^{(i)}$$

$\vec{F}_i^{(e)}$ = forze esterne al sistema agenti sul punto (ad esempio $\vec{P}$)

$\vec{F}_i^{(i)}$ = forze interne " (ad esempio gravitazione dovuta agli altri punti, tensione di fili, molle, ...)

La classificazione è un po' arbitraria e dipende da cosa si vuol considerare parte del sistema

Es. - $\vec{P}$ della mela dovuta alla terra
- Attrazione gravitazionale del sistema terra-mel

In ogni caso, una volta definito il sistema, valgono le seguenti osservazioni:

- Per ogni coppia di punti:

$$\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji} \qquad \text{Azione - Reazione}$$

- Per ogni punto:

$$\vec{F}_i^{(e)} = -\vec{F}_e^{(i)} \longrightarrow \text{Reazione alle forze esterne}$$

La forza di reazione alle forze esterne agisce sull'esterno del sistema: NON E' RILEVANTE PER DETERMINARE IL MOTO DEI PUNTI DEL SISTEMA

NOTA: Stiamo considerando forze reali in un sistema ~~inerziale~~, altrimenti F di reazione potrebbe non esserci.

→ La risultante delle forze interne è nulla

$$\vec{R}^{(i)} = \sum_{i \neq j} \vec{F}_{ij} = \cancel{\vec{F}_{12}} + \cancel{\vec{F}_{13}} + \ldots + \cancel{\vec{F}_{21}} + \cancel{\vec{F}_{23}} + \ldots + \cancel{\vec{F}_{31}} + \cancel{\vec{F}_{32}}$$

Non è nulla la risultante su ciascun punto, ~~Ma~~ né in generale la risultante delle $\vec{F}^{(e)}$, ma $\vec{R}^{(i)} = 0 \longrightarrow$ Esiste una proprietà globale

→ Il moto del sistema (di ogni punto del sistema) può essere descritto come

+ moto di un punto notevole (detto centro di massa) sotto l'azione delle forze esterne

+ moto relativo dei punti rispetto al centro di massa.

Supponiamo di descrivere il moto in un sistema inerziale. Per ciascun punto vale il II principio della dinamica:

$$\vec{F}_i^{(e)} + \vec{F}_i^{(i)} = m_i \vec{a}_i$$

Per la forza complessiva si ha:

$$\vec{R}^{(e)} + \vec{R}^{(i)} = \sum_i m_i \vec{a}_i$$

e poiché $\vec{R}^{(i)} = 0$:

$$\vec{R}^{(e)} = \sum_i m_i \vec{a}_i$$

Possiamo definire un punto (materiale) equivalente tramite la relazione

$$\vec{R}^{(e)} \underset{def}{=} M \vec{a}_{CM}$$

cioè definire un punto (astrazione matematica non un punto materiale reale) ~~che~~ per il quale vale la II legge della dinamica come se tutta massa $M = \sum_i m_i$ fosse concentrata in quel punto, e tutte le forze esterne $\vec{R}^{(e)} = \sum_i \vec{F}_i^{(e)}$ agissero in quel punto.

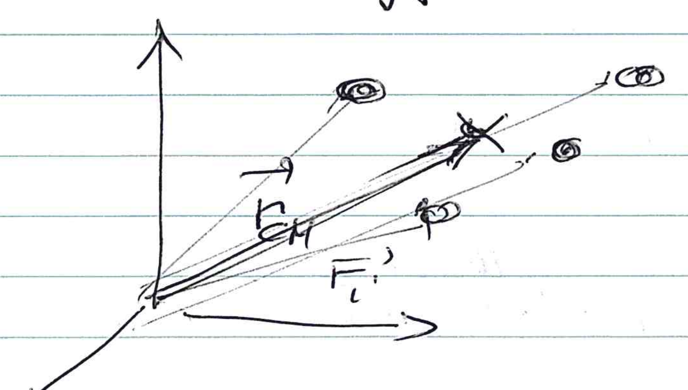
Secondo qs. definizione ~~stessa~~, abbiamo identificato

$$M \vec{a}_{CM} = \sum_i m_i \vec{a}_i$$

Cioè:

$$M \frac{d^2 \vec{r}_{CM}}{dt^2} = \sum_i m_i \frac{d^2 \vec{r}_i}{dt^2}$$

Dove $\vec{r}_{CM}$ individua la posizione del punto materiale che stiamo definendo e $\vec{r}_i$ il raggi vettori che individuano i punti



Poiché le masse sono indip. dal tempo:

$$\frac{d^2}{dt^2}\left(M \vec{r}_{CM}\right) = \frac{d^2}{dt^2}\left(\sum_i m_i \vec{r}_i\right)$$

Dunque la condizione posta sul moto del centro di massa, porta alla definizione della sua posizione tramite:

$$M\vec{r}_{CM} = \sum_i m_i \vec{r}_i$$

e cioè:

$$\vec{r}_{CM} = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{\sum_i m_i}$$ def. del centro di massa

In altri termini: Esiste un punto materiale in un sistema di punti materiali, la cui posizione è:
- definita dalla media delle posizioni pesate colle masse

che si muove sotto l'azione delle forze esterne come se i) tutte le forze agissero in quel punto
ii) tutte le masse fosse in quel punto

Questa proprietà è nota come TEOREMA DEL CENTRO DI MASSA - e il punto così definito è detto CENTRO DI MASSA

In altri termini: il CENTRO DI MASSA è un punto notevole di un sistema (definito in termini matematici, cui non corrisponde un punto materiale fisico) t.c.

$$\vec{R}^{(e)} = M\vec{a}_{CM}$$

→ L'accelerazione del CM è la media (pesata sulle masse) delle accelerazioni dei singoli punti.
Il CM si muove di moto accelerato se $\vec{R}^{(e)} \neq 0$ altrimenti il CM si muove di moto rettilineo uniforme rispetto ad un riferimento

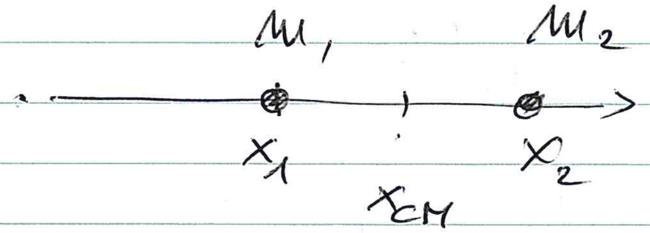
NOTA: Qs risultati giustificano a posteriori la scelta di descrivere il moto di corpi estesi (quando si trascurano i moti interni) in termini di punto materiale. Il CM corrisponde al punto materiale ideale di un corpo esteso. Abbiamo ~~fatto~~ ~~quindi~~ usato questa proprietà in tutti i problemi con corpi estesi di meccanica del punto visti fino ad ora.

Possiamo scomporre la def. del CM in coordinate cartesiane:

$$X_{CM} = \frac{\sum_i m_i x_i}{M}, \quad Y_{CM} = \ldots \text{ ecc.}$$

Esempi espliciti (monodim.)

a)



$m_1 = m_2 = m$

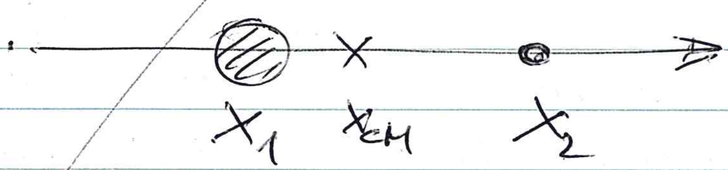
$$x_{CM} = \frac{x_1 m_1 + x_2 m_2}{m_1 + m_2} = \frac{m(x_1 + x_2)}{2m} = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

Punto medio

$$= x_1 + \boxed{\frac{x_2 - x_1}{2}}$$

$m_1 = 2m_2 = m$

b)



$$x_{CM} = \frac{x_1 m_1 + x_2 m_2}{m_1 + m_2} = \frac{x_1 2m + x_2 m}{3m} = \frac{2x_1 + x_2}{3}$$

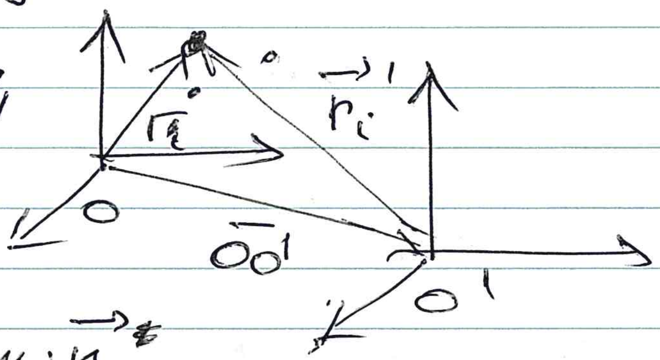
$$= x_1 + \boxed{\frac{1}{3}(x_2 - x_1)}$$

NOTA: La posizione assoluta del CM dip. dal sistema di riferimento

La posizione relativa del CM rispetto ai punti (o la posizione dei punti rispetto al CM) non dip dal sistema di rif — ma dalla dist. relativa tra i punti

In termini generali:

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i\,' + \vec{OO'}$$



$$\vec{r}_{CM} = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{M} = \frac{\sum_i m_i(\vec{r}_i\,' + \vec{OO'})}{M} = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i\,'}{M} + \vec{OO'}$$

$$\vec{r}_{CM} = \vec{r}_{CM}\,' + \vec{OO'}$$

Stessa relazione tra $\vec{r}_{CM}$ e $\vec{r}_{CM}\,'$ e i singoli punti

Cioè la posizione del CM relativa ai punti non dipende da sist inerziale

—o—

Calcoliamo la velocità del CM:

$$\vec{v}_{CM} = \frac{d\vec{r}_{CM}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{M}\right) = \frac{\sum_i m_i \vec{v}_i}{M}$$

$\Longrightarrow$ velocità media pesata sulle masse

Si può definire Q.TÀ DI MOTO TOTALE:

$$\vec{P} = \sum_i m_i \vec{v}_i = M \vec{v}_{CM}$$

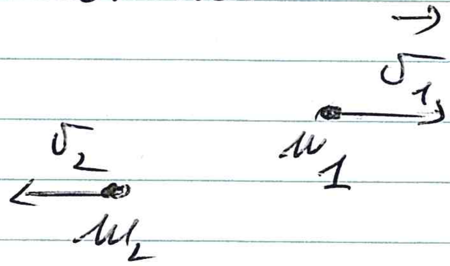
La somma (vettoriale) della q.tà di moto dei singoli punti è pari alla massa totale per la velocità del CM — prop. notevole del CM

Se $\vec{F}^{(e)} = 0 \implies \vec{v}_{CM} =$ cost e la q.tà di moto totale è costante → conservata

$$\vec{P} = \sum_i \vec{p}_i = \text{costante}$$

Consideriamo per semplicità il caso di un sistema di due punti su cui non agiscono $F^{(e)}$, allora:

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{p}_1 + \vec{p}_2) = 0$$



Ne consegue $\frac{d\vec{p}_1}{dt} = -\frac{d\vec{p}_2}{dt}$ e per la II legge della dinamica $\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$

Poiché abbiamo supposto che le forze esterne sono nulle, la relazione trovata significa che le forze agenti tra il punto 1 e 2 sono mutuamente associate

In altri termini, si è ritrovato il principio di azione e reazione (in forma debole)

Cioè: L'assunzione che le $F^{(i)}$ siano mutuamente uguali opposte
$\Longrightarrow$ teorema del CM

L'oss. che $\vec{P} = cost$ se $F^{(e)} = 0$ (che è anche evidenza sperim.) implica l'esistenza di forze interne mutuamente uguali e contrarie

Questa relazione $\vec{F_1} = -\vec{F_2}$ è più debole del principio di azione e reazione, poiché stabilisce una relazione vettoriale tra $\vec{F_1}$ e $\vec{F_2}$ ma non richiede che le due forze giacciano sulla stessa retta (come stabilito dal principio di azione-reazione).

—— o

NOTA: Mazzoldi usa $\vec{p}_1 + p_2 = 0$ come condizione per dare una definizione dinamica delle masse:

$$m_1 = m_2 \, v_2 / v_1$$

Ma è una porcheria. La definizione dinamica di massa è tramite il rapporto di accelerazioni, sotto l'azione di una medesima forza

Esempi

1) $m \xrightarrow{v}$ $\qquad$ $m \xrightarrow{v}$

$$\vec v_{CM} = \frac{m\vec v + m\vec v}{2m} = \vec v$$

velocità comune dei punti

2a) $m \xrightarrow{v}$ $\qquad$ $2m \xrightarrow{v}$

$$\vec v_{CM} = \frac{m\vec v + 2m\vec v}{3m} = \vec v$$

2b) $m \xrightarrow{v}$ $\qquad$ $m \xrightarrow{2v}$

$$\vec v_{CM} = \frac{m\vec v + 2m\vec v}{2m} = \frac{3}{2}\vec v$$

In qs. esempi v_{CM} = cost $\Rightarrow R^{(e)} = 0$, quindi CM è un sistema inerziale.
Scegliendo ~~il~~ CM come origine del sistema di riferimento, nei casi 1) e 2a) i punti sono fermi rispetto al CM.
Nel caso 2b) — composizione di Galileo

$$v_1' = \vec v - \frac{3}{2}\vec v = -\frac{1}{2}\vec v$$

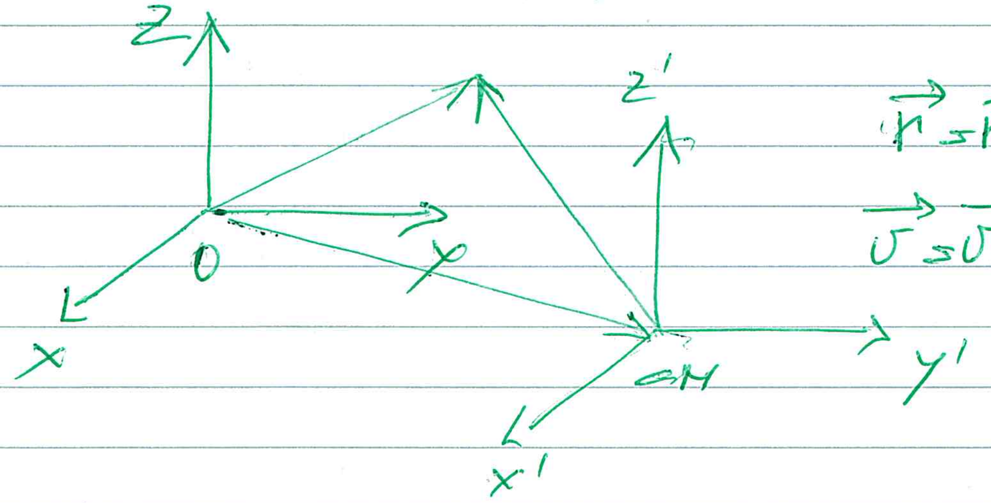
$$v_2' = 2\vec v - \frac{3}{2}\vec v = \frac{1}{2}\vec v$$

i due punti si allontanano con la stessa velocità (o q.tà di moto nel caso generale con $m_1 \neq m_2$) ~~scegliendo~~

→ Se sono in moto relativo con $\vec v$ non cost allora $F^{(i)} \neq 0$ ma i punti si allontanano o avvicinano al CM, che resta fisso. ~~[illegible]~~ con $a \neq 0$

SISTEMA DI RIFERIMENTO DEL CENTRO DI MASSA

a) Origine nel CM
b) Assi fissi (non ruotano rispetto a S.I.)
c) Non è in generale un sistema inerziale poiché $F^{(e)}$ può essere diverso da zero, ma ha proprietà notevoli



$$\vec{r} = \vec{r}\,' + \vec{r}_{CM}$$

$$\vec{v} = \vec{v}\,' + \vec{v}_{CM} + \cancel{(\vec{\omega}_{CM} \times \vec{r}\,')}$$

non c'è rotazione

Proprietà 1) $\vec{P}\,'_{CM} = 0$ quantità di moto totale nel CM è nulla

Infatti $\vec{P}\,'_{CM} = M\vec{v}\,'_{CM}$, ma $\vec{v}\,'_{CM} = 0$ rispetto a sé

2) E_K nel sist. del CM:

$$E_K = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \sum_i \frac{1}{2} m_i \left(\vec{v}_i\,' + \vec{v}_{CM}\right)^2$$

$$= \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i'^2 + \frac{1}{2}\left(\sum_i m_i\right) v_{CM}^2 + \cancel{\underbrace{\left(\sum_i m_i \vec{v}_i\,'\right)}_{\vec{P}\,'_{CM} = 0} \cdot \vec{v}_{CM}}$$

$$\boxed{E_K = E_K' + \frac{1}{2} M v_{CM}^2}$$

En. cinetica nel sist. CM = En. cinetica relativa al CM + en. cinetica del CM

Lavoro e teorema dell'energia cinetica

Per ogni punto i:

$$dW_i = \vec{F}_i \cdot d\vec{r}_i = \left(\vec{F}_i^{(e)} + \vec{F}_i^{(i)}\right) \cdot d\vec{r}_i = dW_i^{(e)} + dW_i^{(i)}$$

Sommando su tutti i punti:

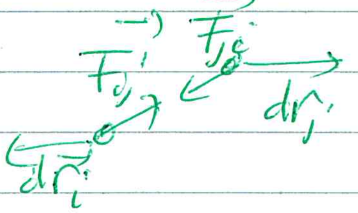
$$dW = \sum_i dW_i^{(e)} + \sum_i dW_i^{(i)}$$

Focalizziamo l'interesse sul lavoro delle forze interne

$$dW^{(i)} = \sum_i dW_i^{(i)} = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1\ (j\neq i)}^{N} \vec{F}_{ij} \cdot d\vec{r}_i$$

riscriviamo la somma in modo da rendere espliciti i termini con mutua interazione

$$dW^{(i)} = \frac{1}{2} \sum_{i\neq j} \left(\vec{F}_{ij} \cdot d\vec{r}_i + \vec{F}_{ji} \cdot d\vec{r}_j\right)$$



$$\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji}$$

$$d\vec{r}_i \neq d\vec{r}_j \quad \text{in generale}$$

$$dW^{(i)} = \frac{1}{2} \sum_{i\neq j} \vec{F}_{ij} \cdot \left(d\vec{r}_i - d\vec{r}_j\right)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i\neq j} \vec{F}_{ij} \cdot d\left(\vec{r}_i - \vec{r}_j\right)$$

$\longrightarrow$

* Lavoro delle forze interne è in generale $\neq 0$
* Dipende ~~solo~~ dalla variazione di posizione relativa tra i punti $d(\vec{r}_i - \vec{r}_j)$

→ invariante per cambio di sistema di rif. (trasf. di Galileo

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i\,' + \vec{OO'}$$
$$\vec{r}_j = \vec{r}_j\,' + \vec{OO'}$$
$$\Longrightarrow d(\vec{r}_i - \vec{r}_j) = d(\vec{r}_i\,' ...$$

→ $dW^{(i)}$ è uguale in tutti i sistemi di riferimento inerziali

* Se i punti hanno posizioni relative fisse (corpo rigido) $d(\vec{r}_i - \vec{r}_j) = 0 \;\; \forall i,j$ e il lavoro delle forze interne è nullo

→ TEOR. DELL'EN. CINETICA

Per ogni singola particella:

$$W_{i\,AB} = \frac{1}{2} m_i v_{i,B}^2 - \frac{1}{2} m_i v_{i,A}^2$$ Forma integrale

Sommando su tutte le particelle

$$W_{AB} = \sum_i W_{i,BA} = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_{i,B}^2 - \sum_i \frac{1}{2} m_i v_{i,A}^2$$
$$= E_K(B) - E_K(A)$$

Il lavoro $W_{AB} = W_{AB}^{(e)} + W_{AB}^{(i)}$:

$$W_{AB}^{(e)} + W_{AB}^{(i)} = \Delta E_k$$ ⟵ teorema dell'en. cinetica

* L'energia cinetica, e la sua variazione, in generale dipendono dall'osservatore (v_i dipendono dall'osservatore), ma il teorema è valido indipendentemente dall'osservatore – è conseguenza della validità dell'en. cinetica per le singole particelle

* Se $W^{(e)} = 0$ [sistema isolato]

$$\Delta E_k = W^{(i)}$$ ⟵ indipendente dall'osservatore inerziale poiché $W^{(i)}$ è invariante di Galileo

Se tutte le forze sono conservative

$$W^{(e)} = -\Delta E_p^{(e)}$$
$$W^{(i)} = -\Delta E_p^{(i)}$$

Teor. dell'energia cinetica: $\Delta E_k = -\Delta E_p^{(e)} - \Delta E_p^{(i)}$

$\Longrightarrow \Delta(E_k + E_p) = 0 \qquad \Delta E_m = 0$

$E_k + E_p = \text{costante}$ cons. dell'energia <u>meccanica</u>

In presenza di forze non conservative, si generalizza il risultato per il pto materiale

$W_{n.c.} = \Delta E_m$ ottenuta dalla somma dei singoli pti materiali

$W_{n.c.} = \Delta E_k + \Delta E_p$ —

<u>Note</u>:

① Le relazioni di lavoro e en. cin. e pot dipendono dalle proprietà per i singoli punti
② Le forze esterne e interne hanno ruoli differenti — Il lavoro delle forze interne non può determinare uno spostamento del CM.

En potenziale e meccanica

— Se $F^{(e)}$ e $F^{(i)}$ conservative

$$E_p = \sum_i E_p(i)$$

$$E_m = E_k + E_p$$

Teo Cons. E_m vale per estensioni ($W_{TOT} = \sum_i W_i$) poiché vale per ogni punto (per ogni W_i)

Calcolo di E_p ~~nel caso di~~ dovuta a $F^{(i)}$ in un sistema di punti

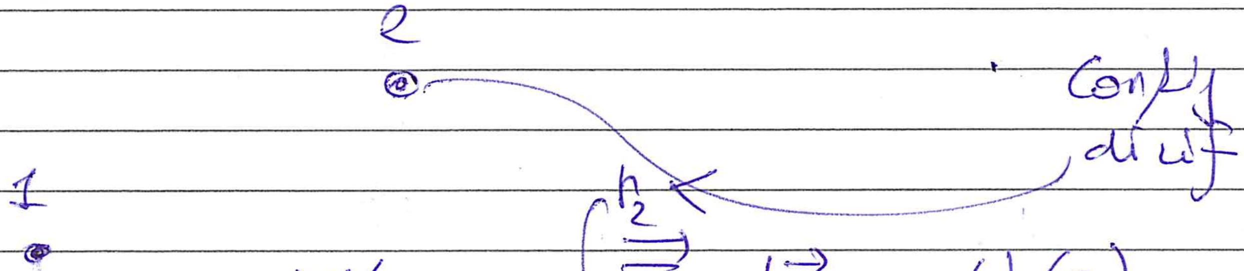
— Imp per sist. con mutua int. reciproca tutte della stessa natura e cons.
— Stessa Legge di Forza

Es. Gravitazione, elettrostatica, F el, ...

— En. pot del pto i E_p = lavoro per portare nella con. da un inf. dove $E_p = 0$

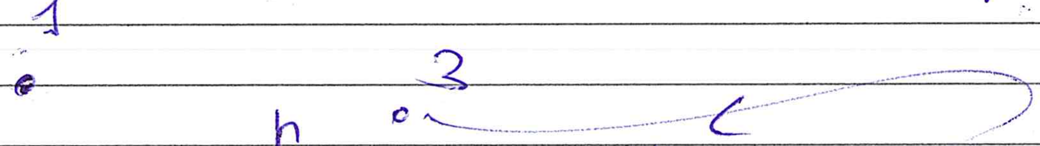
Se solo $F^{(i)}$, per mettere il primo punto, non devo compiere lavoro

Devo compiere lavoro contro $\vec{F}_{12}$ per raggiungere il secondo punto



$$W_{or_2} = \int_0^{r_2} \vec{F}_{12} \cdot d\vec{s}_2 = -U_1(2)$$

Per raggiungere il 3° devo compiere lavoro contro $\vec{F}_{13}$ e $\vec{F}_{23}$, (ma non F_{32} poi dispone 2, che è già in posto)



$$W_{or_3} = \int_0^{r_3} \vec{F}_{13} \cdot d\vec{s}_3 + \int_0^{r_3} \vec{F}_{23} \cdot d\vec{s}_3 = -U_1(3) - U_2(3)$$

Individuiamo $-U_i(j)$ come l'en. potenziale relativa all'interazione tra la coppia — Sommando su tutte le coppie della config.

$$E_p = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j>i} E_p(i,j)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1,\, i \neq j}^{n} E_p(i,j)$$