OSCILLATORE FORZATO

L'oscillazione libera di un oscillatore armonico reale è SEMPRE SMORZATA attriti. Per rendere l'oscillazione persistente è necessario "forzare" l'oscillazione con una perturbazione periodica esterna:

$$\cancel{F(x)}\, F(t) = F_0 \cos \omega t$$

* F non dipende da x, ma da t
* il periodo della forzante è ω, in generale diverso da ω_0

Utilizziamo il formalismo complesso:

$$F(x) = F_0 e^{i\omega t} = F_0(\cos \omega t + i \sin \omega t)$$

Ma solo la parte reale ha interesse fisico. Poichè l'eq. è lineare se scrivo

$$\boxed{F = F_R + i F_I}$$

e trovo una soluzione complessa

$$\boxed{x = x_R + i x_I}$$

Allora x_R è soluzione per F_R $\Longleftarrow$ In questi termini posso usare il formalismo complesso ma considerare solo la parte reale della soluzione!

× Eq. diff dell'oscillatore forzato:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} e^{i\omega t} \qquad (\text{Eq OF})$$

Avendo imparato le proprietà dell'esponenziale, provo la soluzione

$$x(t) = Ae^{i(\omega t + \varphi)}$$

Sostituendo in (Eq. O.F.):

$$-\omega^2 Ae^{i\omega t + \varphi} \; i2\gamma\omega Ae^{i\omega t + \varphi} + \omega_0^2 Ae^{i\omega t + \varphi} = \frac{F_0}{m} e^{i\omega t}$$

$$\boxed{Ae^{i\varphi} = \frac{F_0/m}{\omega_0^2 - \omega^2 + i2\gamma\omega}} \; (***) \quad \text{soluzione } \forall t$$

Soluzione complessa con $\varphi \neq 0$ in generale

→ soluzione ha la le stessa freq. della forzante

→ " fase differente

La soluzione $\boxed{x_R(t) = A\cos(\omega t + \varphi)}$

Dalla relazione (***) l'ampiezza dell'oscillazione e la fase dipendono da ω: $A = A(\omega)$ e $\varphi = \varphi(\omega)$. → Vediamo come

AMPIEZZA E FASE

* $A(\omega) = |Ae^{i\varphi}| = \frac{F}{m} \frac{1}{\left[(\omega_0^2-\omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2\right]^{1/2}}$

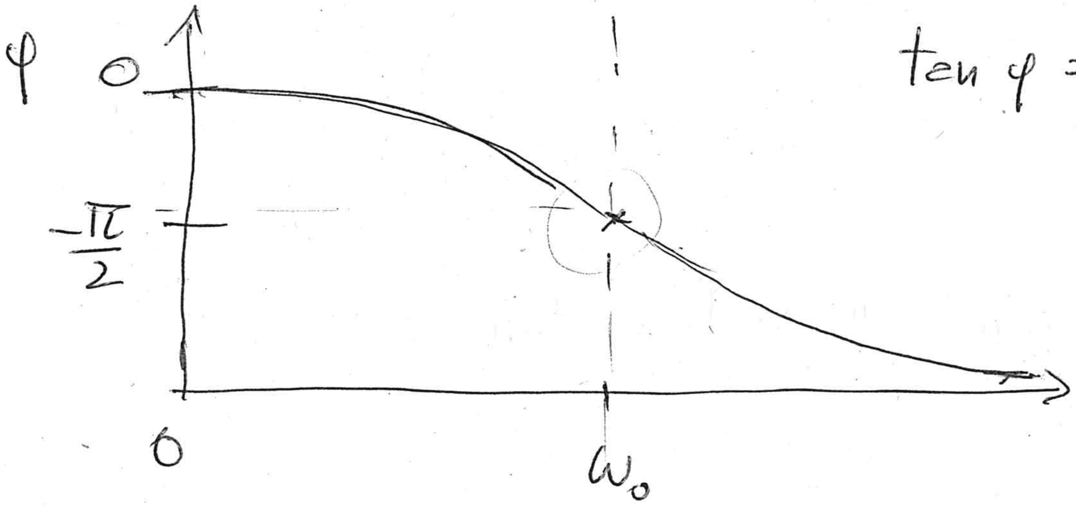
* $\varphi(\omega) = \operatorname{atan}\left(\frac{\operatorname{Im} Ae^{i\varphi}}{\operatorname{Re} Ae^{i\varphi}}\right) = \operatorname{atan}\left[\frac{-\gamma\omega}{\omega_0^2-\omega^2}\right]$

(segno negativo perchè è a denominatore)

Nota: $A(\varphi)$ e $\varphi(\omega)$ non dipendono dalle condizioni iniziali, che riguardano solo il moto libero -

- Una soluzione generale è la somma della soluzione per il moto libero (che fa zero nell'eq.) + la soluzione per il moto forzato
- dopo un tempo lungo ($t \gtrsim 5\tau = 5/\gamma$) il moto libero è smorzato completamente e l'oscillazione è solo quella del <u>moto forzato</u>
- che avviene a freq. $\omega \neq \omega_0$ con ampiezza e fase dip. da ω

Andamento dell'ampiezza e fase al variare di ω



$$\tan\varphi = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}$$

$\omega = 0$ $\quad \tan\varphi = 0 \Rightarrow \varphi = 0$

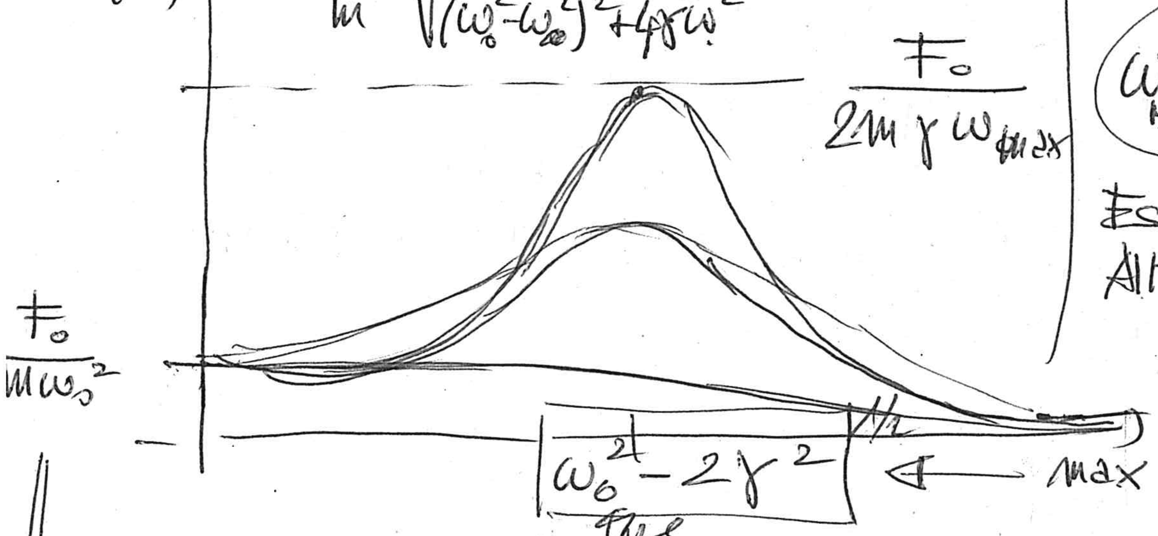
$\omega = \omega_0$ $\quad \tan\varphi = \dfrac{-\gamma\omega_0}{\omega_0^2-\omega_0^2} = -\infty$ per $\omega < \omega_0$

$\Rightarrow \varphi = -\frac{\pi}{2}$

$\omega = \infty$ $\quad \tan\varphi \approx \frac{1}{\omega} \rightarrow 0^+$ $\quad \varphi = -\pi$

Imp

$$A(\omega) = \frac{F_0}{m}\frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\gamma^2\omega^2}}$$



max $\frac{dA}{d\omega} = 0$

$\omega_{max} = \sqrt{\omega_0^2-2\gamma^2} < \omega_0$

Esiste se $\omega_0^2 > 2\gamma^2$

Altrimenti monotona

$\frac{F_0}{K}$ = ALLUNGAM. DELLA MOLLA PARI A F_0 / COST. ELASTICA

POTENZA MEDIA FORNITA DALLA FORZANTE

La "forzante" occorre per sostenere (rendere per=
sistente) l'oscillazione. Dunque la potenza
fornita dalla forzante eguaglia in media la
potenza dissipata dagli attriti viscosi —

$$P_A = F_A \cdot v = -\eta v^2 = -2\gamma m v^2$$

Per $F = F_0 \cos \omega t$, abbiamo la soluzione:

$$x(t) = A \cos(\omega t + \varphi) \qquad \text{con } A = A(\omega); \varphi = \varphi(\omega)$$
$$v(t) = -A\omega \sin(\omega t + \varphi)$$

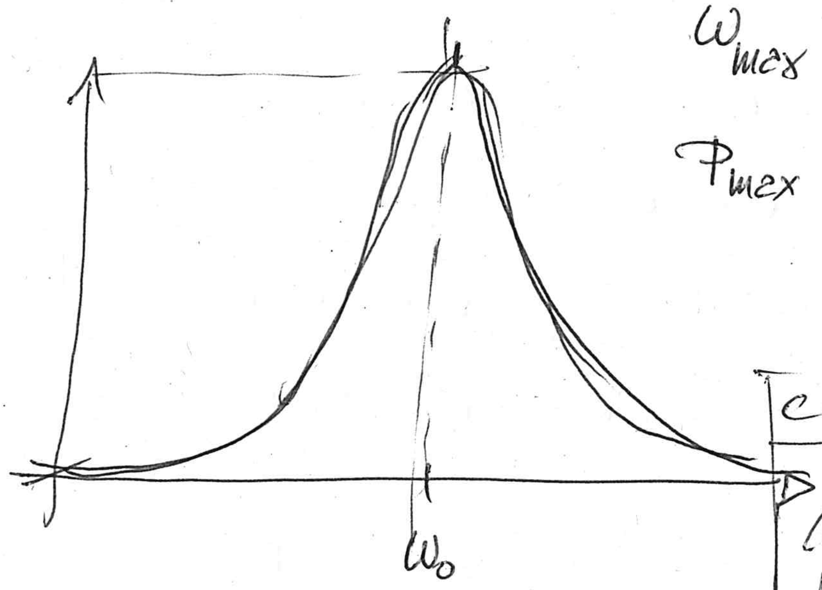
Per la potenza si ottiene:

$$P_A = 2 m \gamma \omega^2 A^2 \sin(\omega t + \varphi)$$

e per la potenza media

$$\langle P_A \rangle_T = m \gamma \omega^2 A^2$$
$$= m\gamma \frac{F_0^2}{m^2} \frac{\omega^2}{[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2]}$$

Potenza media:



$$\omega_{max} = \omega_0$$

$$P_{max} = \frac{F_0^2}{4m\gamma} \propto \frac{1}{\gamma}$$

CURVA DI RISONANZA

max trasferimento di energia al sistema per $\omega = \omega_0$, cioè forzante con stesso periodo del periodo proprio dell'oscillatore armonico

$$\langle P(0) \rangle_T = 0$$

$$\langle P(\infty) \rangle_T \to 0$$

$\frac{dP}{d\omega} = 0$ determina il max.

$$\frac{dP}{d\omega} = \frac{d}{d\omega}\left(\frac{\gamma F_0^2}{m} \frac{\omega^2}{[(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\gamma^2\omega^2]}\right) =$$

$$= \frac{\gamma F^2}{m[\quad]^2} \cdot \left(\underbrace{2\omega(\omega_0^2-\omega^2)^2}+\cancel{8\gamma^2\omega^3}+\underbrace{4\omega^3(\omega_0^2-\omega^2)}\cancel{-8\gamma^2\omega}\right)$$

entrambi nulli per $\omega = \omega_0$

$$A(\omega_0) = \frac{F_0}{m} \frac{1}{2\gamma\omega_0} = \left[\frac{F}{m\omega_0^2}\right] \cdot \frac{\omega_0}{2\gamma}$$

Ampiezza per $\omega = 0$

Si definisce ~~ampiezza~~ larghezza della risonanza la quantità $\Delta\omega = \omega_1 - \omega_2$ con

$$\langle P(\omega_{1,2}) \rangle = \frac{1}{2} \langle P(\omega_0) \rangle$$

Si dimostra che $\Delta\omega = 2\gamma$ —

Ampiezza $\div 1/\gamma$

Larghezza $\div \gamma$

$\rightarrow$ γ controlla la "qualità" dell'oscillatore e la sua capacità di essere selettivo in freq.

$\Longrightarrow$ NOTA: È un caso fisico generale $F(t)$ sinusoidale ?

× Eq. lineare vale sovrapp. effetti

× Per una generica funzione periodica con freq. ang ω

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(\underbrace{n\omega t}_{\text{Armoniche}} + \phi_n) + a_0$$

× ~~Si~~ può estendere il teorema al caso continuo

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} a(\omega) \sin(\omega t + \varphi(\omega))\, d\omega$$

$\longrightarrow$ ESEMPIO ORECCHIO ANALIZZ. FREQ.