LEZIONE 11: OSCILLATORE ARMONICO

(Mazzoldi et al. 9.1 ÷ 9.3, 9.7 ÷ 9.9)

* MOTO ARMONICO SEMPLICE: moto notevole del punto materiale attorno alla posizione di equilibrio stabile per un generico potenziale.

$$E_p(x) \simeq \frac{1}{2} \underbrace{\left.\frac{d^2 E_p}{dx^2}\right|_{x=0}}_{\text{"costante elastica" } k} x^2$$

* Equazione del moto dell'oscillatore armonico semplice (e libero):

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0 \quad ; \quad \omega_0^2 = \frac{k}{m}$$

E' equazione lineare e omogenea di secondo grado → soluzione generale: combinazione lineare (sovrapposizione degli effetti) di due soluzioni indipendenti con due costanti di integrazione, il cui valore è determinato dalle condizioni iniziali del moto

② L'equazione è omogenea $(= 0)$ e lineare (compaiono somme di derivate che sono un operatore lineare, cioè tale che la derivata di una somma è la somma delle derivate) —

Conseguenza di qs. proprietà è che se $x_1(t)$ e $x_2(t)$ sono due soluzioni indipendenti allora la comb. lineare

$f(t) = a_1 x_1(t) + a_2 x_2(t)$ è ancora una soluzione dell'equazione differenziale

È facile dim. qs. proprietà: poiché $x_1(t)$ e $x_2(t)$ sono soluzioni:

$$\frac{d^2 x_1}{dt^2} + \omega_0^2 x_1 = 0 \quad \text{e} \quad \frac{d^2 x_2}{dt^2} + \omega_0^2 x_2 = 0$$

D'altronde, per la linearità delle derivate,

$$\frac{d^2}{dt^2}(a_1 x_1 + a_2 x_2) + \omega_0^2 (a_1 x_1 + a_2 x_2) =$$

$$a_1 \left[\frac{d^2 x_1}{dt^2} + \omega_0^2 x_1\right] + a_2 \left[\frac{d^2 x_2}{dt^2} + \omega_0^2 x_2\right] = 0$$

La soluzione generale dell'equazione dell'oscillatore armonico semplice può essere posta nella forma

$$x(t) = a_1 x_1(t) + a_2 x_2(t)$$

Con a_1, a_2 costanti di integrazione (ci sono due integrazioni, perché l'equazione è di grado 2 - Significa che si devono fissare 2 condizioni per il moto: Es -

Posizione a $t=0$
Velocità a $t=0$

Oppure due posizioni, due v, E_K e E_p o altre combinazioni) -

- $x_1(t)$ e $x_2(t)$ devono essere due soluzioni indipendenti

* Metodo generale per la soluzione (*): poichè la derivata di una funzione esponenziale è ancora una funzione esponenziale, cerchiamo soluzioni del tipo $f(t) = e^{\alpha t}$ con α complesso

(*) METODO GEN. PER EQ. DIFF. OMOGENEE E LINEARI

$$f(t) = e^{\alpha t} \Rightarrow f'(t) = \alpha e^{\alpha t} \Rightarrow f''(t) = \alpha^2 e^{\alpha t}$$

Per ~~l'oscillato~~ l'equazione dell'O.A.S. si ottiene:

$$\alpha^2 e^{\alpha t} + \omega_0^2 e^{\alpha t} = 0$$

che è soddisfatta per ogni valore di t se vale la condizione:

$$\alpha^2 + \omega_0^2 = 0 \Rightarrow \alpha = \pm i\omega_0$$

Si hanno dunque le due soluzioni indip.

$$X_1(t) = e^{-i\omega_0 t}$$
$$X_2(t) = e^{i\omega_0 t}$$

La soluzione generale è dunque:

$$x(t) = A_1 e^{-i\omega_0 t} + A_2 e^{i\omega_0 t} \qquad (**)$$

con la condizione che $x(t)$ sia reale poiché rappresenta un'osservabile fisica: la posizione del punto materiale.

Ricorriamo alla formula di Eulero (rappr. dei numeri complessi):

$$e^{\pm i\omega t} = \cos \omega t \pm i \sin \omega t$$

e troviamo, sostituendo in $(**)$:

$$x(t) = (A_1 + A_2) \cos \omega_0 t + i (A_2 - A_1) \sin \omega_0 t$$

da cui seguono le condizioni:

$$\begin{cases} \mathrm{Im}(A_1 + A_2) = 0 \\ \mathrm{Re}(A_2 - A_1) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_1 = a + ib \\ A_2 = a - ib \end{cases}$$

sostituendo:

$$x(t) = 2a \cos \omega_0 t + 2b \sin \omega_0 t$$

che è equivalente a

$$x(t) = A \sin(\omega_0 t + \varphi) \quad \text{oppure}$$

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi') \qquad \varphi = \varphi' + \frac{\pi}{2}$$

Infatti :

$$A\cos(\omega_0 t+\varphi) = A\cos(\omega_0 t)\cos\varphi - A\sin(\omega_0 t)\sin\varphi$$

Dunque è una soluzione ~~con la stessa~~ identica a $2a\cos(\omega_0 t)+2b\sin(\omega_0 t)$

con la condizione

$$A\cos\varphi = 2a$$
$$-A\sin\varphi = 2b$$

- La soluzione $A\cos(\omega_0 t+\varphi)$ [o pure $A\sin(\omega_0 t+\varphi')$ che è la stessa a meno di una fase] è quindi la soluzione generale dell O.A.S., con due costanti A e φ definite dalle condizioni del moto

- La soluzione può essere posta nella forma equivalente:
$$A'\cos(\omega_0 t) + B'\sin(\omega_0 t)$$

- Useremo ~~ipi~~ più spesso $A\cos(\omega_0 t+\varphi)$

Energia dell'oscillatore:

Abbiamo già visto, nel caso della forza elastica, che

$$E_m = E_k + E_p =$$

$$= \frac{1}{2} m A^2 \omega_0^2 \cos^2(\omega_0 t + \varphi) + \frac{1}{2} k A^2 \sin^2(\omega_0 t + \varphi)$$

$$= \text{cost.}$$

$E_m = \text{cost}$, E_k e E_p oscillano con periodo $\frac{T}{2}$ (frequenza doppia) della periodo (frequenza) propria dell'oscillatore.

E' utile valutare il valor medio di E_k e E_p su un periodo (in previsione di fenomeni dissipativi). $\frac{T}{2} = \frac{\pi}{\omega_0}$

$$\langle E_k \rangle = \frac{2}{T} \int_0^{T/2} \frac{1}{2} m A^2 \omega_0^2 \cos^2(\omega_0 t + \varphi) = \frac{1}{2} E_m$$

$$\langle E_p \rangle = \frac{2}{T} \int_0^{T/2} \frac{1}{2} k A^2 \sin^2(\omega_0 t + \varphi) = \frac{1}{2} E_p$$

L'integrazione su un periodo è equivalente all'integrazione di $\cos^2 x$ o $\sin^2 x$ tra 0 e π; poiché la fase è irrilevante se considero un periodo intero.

Vale: $\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos^2 x \, dx = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{\pi} \left[\int_0^{\pi} \cos^2 x \, dx + \int_0^{\pi} \sin^2 x \, dx \right] \right] = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} dx \right] = \frac{1}{2}$

OSCILLATORE ARMONICO SMORZATO:

~~Lo~~ L'O.A.S. corrisponde al caso ideale in assenza di attriti. ~~Nel~~ Nel caso più generale l'energia meccanica è dissipata per effetto del ~~fat~~ lavoro delle forze di attrito.

$$W_{n.c.} = \Delta E_m$$

Le forze agenti su oscillatori armonici "reali" sono, nella maggior parte dei casi, forze di natura viscosa:

$$\vec{F}_A = -\eta \vec{v}$$

~~Questa forza~~ Questa forza è collineare al moto, e dunque diretta come la forza elastica e gli spostamenti. L'eq. del moto è ancora monodimensionale:

$$ma = -\eta v - kx$$

Eq. DIFFERENZIALE ~~generale~~ dell'O.A. smorzato:

$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0}$$

Avendo posto:
$$\begin{cases} \omega_0^2 = \dfrac{k}{m} \\ \gamma = \dfrac{\eta}{2m} \end{cases}$$

Soluzione gen. della forma $f(t) = e^{\alpha t}$

(è ancora eq. diff. lineare e omogenea)

$$\alpha^2 e^{\alpha t} + 2\gamma\alpha e^{\alpha t} + \omega_0^2 e^{\alpha t} = 0$$

Ha soluzione per ogni valore di t, se

$$\alpha^2 + 2\gamma\alpha + \omega_0^2 = 0$$

Da cui:

$$\alpha_{1,2} = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$$

Si distinguono tre casi, corrispondenti a tre situazioni fisiche differenti:

1. <u>OSCILLATORE SOVRASMORZATO</u>

$$\gamma^2 - \omega_0^2 > 0$$

Si hanno due soluzioni <u>reali</u>:

$$\alpha_{1,2} = -\gamma\left(1 \mp \sqrt{1 - \frac{\omega_0^2}{\gamma^2}}\right) = \begin{cases} -\gamma_1 \\ -\gamma_2 \end{cases}$$

* Valgono le seguenti relazioni per γ_1 e γ_2

$$\boxed{\gamma_1 = \gamma\left(1-\sqrt{1-\omega_0^2/\gamma^2}\right) < \gamma\left(1+\sqrt{1-\omega_0^2/\gamma^2}\right) = \gamma_2}$$

In termini dimensionali si ha $[\gamma] = T^{-1}$ e posso introdurre le costanti di tempo

$$\tau_1 = 1/\gamma_1 \qquad e \quad \tau_2 = 1/\gamma_2 \quad \text{con } \boxed{\tau_1 > \tau_2}$$

Per $\gamma^2 \gtrsim \omega_0^2$ $\quad \gamma_1 \lesssim \gamma_2 \quad$ e $\tau_1 \gtrsim \tau_2$

Per $\gamma^2 \gg \omega_0$ $\quad 0 \simeq \gamma_1 \ll \gamma_2 \simeq 2\gamma \quad \tau_1 \gg \tau_2$

* La soluzione generale è:

$$\boxed{\begin{aligned} x(t) &= Ae^{-\gamma_1 t} + Be^{-\gamma_2 t} = \\ &= Ae^{-t/\tau_1} + Be^{-t/\tau_2} \end{aligned}} \qquad x(t) \xrightarrow[t\to\infty]{} 0$$

* non ci sono termini oscillanti
* per ~~[illegible]~~ tempi lunghi il termine e^{-t/τ_1} è dominante (l'altro svanisce prima) e controlla lo smorzamento ($x(t) \to 0$ per $t \to \infty$)
* Lo smorzamento diventa più lento (controllato da τ_1) al crescere di γ.

2. OSCILLATORE CRITICAMENTE SMORZATO

$$\gamma^2 - \omega_0^2 = 0$$

~~Si~~ hanno due soluzioni reali degeneri.

La soluzione generale è del tipo

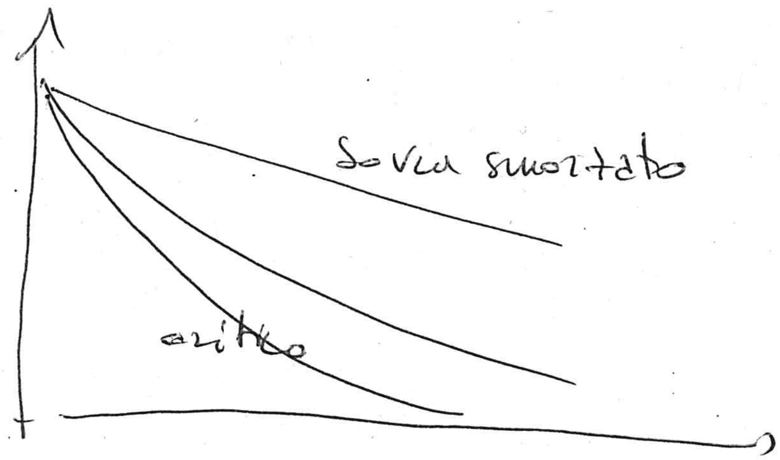
$$(A + Bt)\,\underbrace{e^{-\gamma t}}_{\text{termine di smorzamento}}$$

[Provare a sostituire per dim. la solut. $te^{-\gamma t}$ e la seconda soluzione indip. dell'omogenea]

Questa condizione corrisponde al caso limite del caso precedente e determina lo smorzamento più rapido dell'oscillatore, con costante di tempo

$$\tau = \frac{1}{\gamma} \left(= \frac{1}{\omega_0} \right)$$

Se C.I. $x(0) = x_0$:



3. OSCILLATORE SOTTO SMORZATO

$$\gamma^2 - \omega_0^2 < 0$$

Soluzioni complesse

$$\alpha_{1,2} = -\gamma \pm i\omega' \qquad \omega' = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} < \omega_0$$

* Questo è il caso più interessante e rappresenta situazioni come il pendolo o la molla, che abbiamo esaminato nel limite $\gamma = 0$ (senza attriti) –

* Le soluzioni indip:

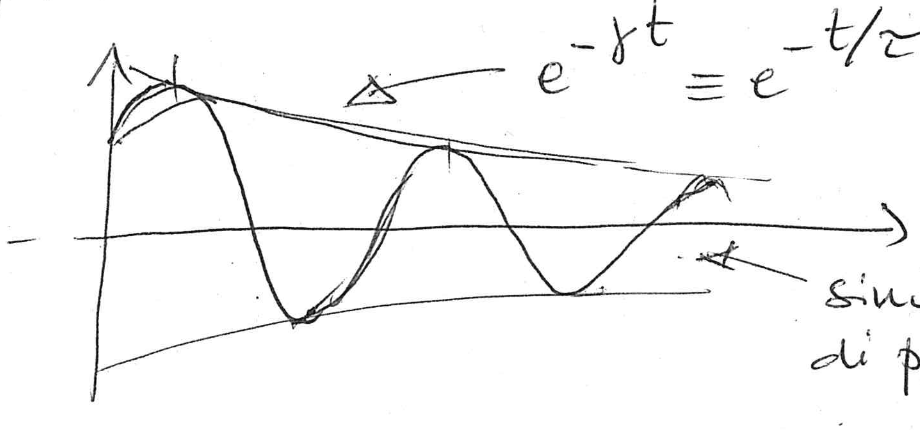
$$x_1(t) = e^{-\gamma t} \, e^{i\omega' t}$$
$$x_2(t) = e^{-\gamma t} \, e^{-i\omega' t}$$

* La soluzione generale:

$$x(t) = e^{-\gamma t}\left[A_1 e^{i\omega' t} + A_2 e^{-i\omega' t}\right]$$

formula di Eulero →
$$= e^{-\gamma t}\left[a \cos\omega' t + b \sin\omega' t\right]$$

rappresentaz. con ampiezza e fase →
$$= A e^{-\gamma t} \sin(\omega' t + \varphi)$$



Evoluzione energia meccanica

$$E_m(t) = E_p(t) + E_{k}(t)$$
$$= \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}mv^2$$

O.A. Libero: $E_m = \frac{1}{2}kA^2\left[\cos^2(\omega_0 t+\varphi) + \sin^2(\omega_0 t+\varphi)\right]$

$$\langle E_k \rangle = \langle E_p \rangle = \frac{1}{2}\langle E_m \rangle$$

O.A. Smorzato:

- Ampiezza oscillazioni diminuisce
- Energia meccanica dissipata

Espressione complicata per E_m istantanea.

$$x(t) = e^{-\gamma t}\cos(\omega' t + \varphi) \qquad \left(\omega' = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}\right)$$

$v(t) = \frac{dx}{dt} = \ldots$ complicato e non istruttiva

Analisi più istruttiva dei termini dissipativi:

$$\Delta E_m = W_{n.c.}$$ ← lavoro delle forze non conservative

Potenza dissipata dall' O.A. smorzato

$$\frac{dE_m}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}mv^2\right)$$

$$= kx\frac{dx}{dt} + mv\frac{dv}{dt}$$

$$= (kx + ma)v$$

$$= (-\eta v)v = F_A v$$

Potenza dissipata dalla forza di attrito viscoso

D'altronde $\eta = 2\gamma m$, dunque:

$$\frac{dE_m}{dt} = -2\gamma mv^2$$

doppio dell'energia cinetica

In media: $\left\langle \frac{dE_m}{dt} \right\rangle = -2\gamma \langle E_m \rangle$

Pot. dissipata prop. a $\langle E_m \rangle$ tramite il coeff. γ

Oppure: $\boxed{\frac{d\langle E_m \rangle}{\langle E_m \rangle} = -2\gamma\, dt}$ ← Perdita relativa costante sul periodo

$$\langle E_m \rangle = e^{-2\gamma t}\langle E_m(0) \rangle$$

Smorzamento esponenziale dell'energia