

Forza Elastica

$$\vec{F} = -kx\hat{i}$$

$$W_{AB} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{s} = -k \int_A^B dx = -\frac{1}{2}k(x_B^2 - x_A^2)$$

→ Lavoro indep. dalla traiettoria

• Se $|x_A| > |x_B|$ $W_{AB} > 0$

- Forza elastica esercita lavoro motore verso il centro della forza ($x=0$)

$\Delta E_K > 0$ → aumenta l'en. cinetica

• Se $|x_A| < |x_B|$ $W_{AB} < 0$

- Lavoro resistente della forza elastica allontanandosi dal punto di equilibrio

$$\Delta E_K < 0$$

Il moto, in q. caso, avviene o per effetto di un'altra forza o a spese dell'energia cinetica

(18)

Lavoro della forza di attrito radente

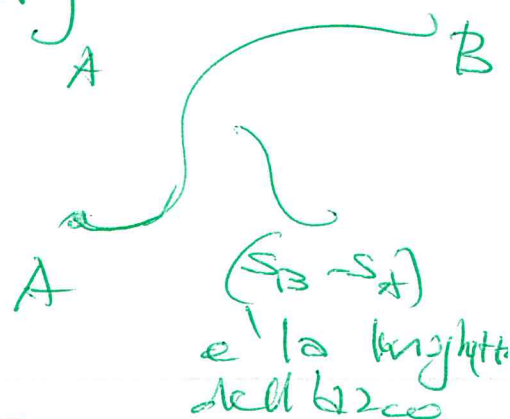
$$\vec{F}_d = -\mu_d N \hat{u}_s$$

← opposto allo
spostamento
→ $\cancel{W} < 0$

$$\cancel{W}_{AB} = \int_A^B \vec{F}_d \cdot d\vec{s} =$$

$$= -\mu_d N \int_A^B \hat{u}_s \cdot d\vec{s} = -\mu_d N \int_A^B ds$$

$$= -\mu_d N (s_B - s_A)$$



Lavoro DIPENDE dal percorso: $s_B - s_A$ e' la lunghezza dello spostamento lungo la traiettoria -

$(s_B - s_A) > 0$ su ogni traiettoria

$\cancel{W}_{AB} < 0$: il lavoro di $\vec{F}_d$ e' sempre negativo

$\Delta E_k < 0$ $\leadsto$ perdita di velocita' (energia cinetica)

Esempio. Lavoro di una forza
frenante costante

• Schematica rappresentazione della
frenata di un'auto da v_i e $v_f = 0$

$$W_{AB} \div \Delta s = \frac{1}{2} m v_f^2 - \frac{1}{2} m v_i^2$$

$$= -\frac{1}{2} m v_i^2 < 0$$

Da cui:

$$\boxed{\Delta s \div v_i^2}$$

Lo spazio di frenata è proporzionale
alla velocità al quadrato

Ricapitolazione

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

$$W = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

→ prod. scalare definito in modo da ~~avere una rappresentazione~~ ~~da descrivere l'interazione~~

$\left(\frac{dW}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v} \right)$ soddisfacente dei fenomeni

- Teor. En. cinetica $(E_K = \frac{1}{2}mv^2)$

$$W_{AB} = \Delta E_K$$

← vale in generale per qualsiasi forza

- Calcolo esplicito del lavoro, richiede legge di forza

A) Forte per cui W_{AB} è indep dalla traiettoria

B) Forte per cui W_{AB} è dip dalla traiettoria

A) Non è il caso generale, ma è molto utile poiché consente di esprimere il lavoro tramite una funzione scalare delle coordinate del punto

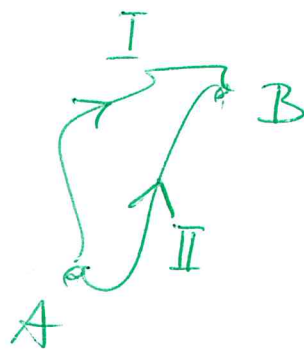
Forza conservativa

(21)

* F detta conservativa se

$$W_{AB} = \int_{A, I}^B \vec{F} \cdot d\vec{s} =$$

$$= \int_{A, II}^B \vec{F} \cdot d\vec{s} \quad \forall II$$



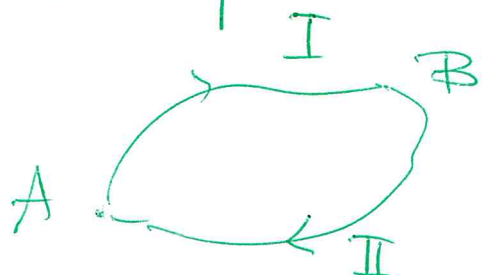
Cioè se il lavoro è indep. dalla traiettoria

* Equivalente a $W_{AA} = \oint \vec{F} \cdot d\vec{s} = 0$
(lavoro nullo su linea chiusa)

$$- \text{ se } W_{AA} = 0 \rightarrow \Delta E_K = 0$$

En. cinetica conservata su linea chiusa (forza conservativa)

Dim. equivalente:



$$W_{AA} = \int_{A, I}^B \vec{F} \cdot d\vec{s} + \int_{B, II}^A \vec{F} \cdot d\vec{s} = 0$$

Per ~~forza conservativa~~



Siano i due percorsi arbitrari

Per forze indipendenti dallo stato di moto, $\vec{F}$ non cambia segno, né valore cambiando localmente il percorso.

In particolare, invertendo $d\vec{s} \rightarrow -d\vec{s}$ non cambia $\vec{F}$ nel punto. Dunque

$$\int_B^A \vec{F} \cdot d\vec{s} = - \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{s} \quad \begin{array}{l} \text{cambio} \\ \text{senso di} \\ \text{percorrenza} \\ (d\vec{s} \Rightarrow -d\vec{s}) \end{array}$$

Sostituendo in (1)

$$W_{AA} = \int_{A, I}^B \vec{F} \cdot d\vec{s} - \int_{A, II}^B \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

- Se vale indep. del percorso $W_{AA} = 0$
- Se $W_{AA} = 0$, allora vale indep. del percorso (percorsi scelti in modo arbitrario) -

Energia potenziale

Se F conservativa, W_{AB} indep. del percorso si può definire funzioni SCALARI del posto (dip. dalle coordinate) t.

$$\int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{s} = E_p(A) - E_p(B) \\ = -\Delta E_p$$

• $E_p = E_p(\vec{x})$ è omogenea al lavoro
 $\rightarrow$ energia potenziale

• è definita operativamente (misurata) dal lavoro

• la sua espressione dipende dalla ~~modo~~ espressione della forza (a differenza di E_k la cui espressione ha validità generale)

- La definizione data è buona a meno di una costante arbitraria - Cerco funzioni

Definizione di $\Phi_P = \Phi_P(\vec{x})$

- * Scelgo un riferimento (arbitrario) O
- * definisco per ogni punto P di coordinate $\vec{x}$ la funzione scalare:

$$\Phi_P(P) = W_{P_0} + \Phi_P(O)$$

$$(\text{Equiv. a } W_{P_0} = \Phi_P(P) - \Phi_P(O))$$

$$\Phi_P(P) = \int_{\underbrace{P}_O}^O \vec{F} \cdot d\vec{s} + \Phi_P(O)$$

lavoro per portare il pto materiale da P al riferimento in O

$\Phi_P(O)$ è costante (arbitraria) che posso scegliere in modo da semplificare l'espressione della funzione energia potenziale

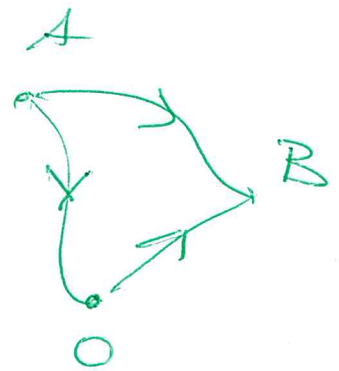
Dalla definizione, e delle proprietà delle forze conservative;

$$W_{AB} = W_{AO} + W_{BO} =$$

$$= \int W_{AO} - W_{BO}$$

$$= E_p(A) - E_p(O) - (E_p(B) - E_p(O))$$

$$= E_p(A) - E_p(B)$$



Il lavoro è indipendente dalla scelta del riferimento (come si voleva)

• la relazione $\boxed{W_{AB} = -\Delta E_p}$

non ha carattere generale, ma vale solo per F_c conservative (a diff.)

di $W_{AB} = \Delta E_k$ che vale sempre

Lavoro della forza conservativa :

(26)

$$W_{AB} = - \Delta E_p$$

~~Plan~~

$$\text{Se } W_{AB} > 0, \quad \Delta E_p < 0$$

cioè per la definizione data (conversione di segno) il lavoro motore di una

forza conservativa avviene a scapito dell'energia potenziale : l'energia potenziale diminuisce quando la forza compie un lavoro positivo -

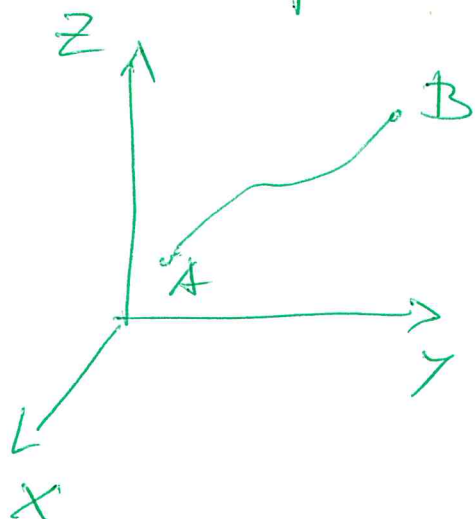
E s., la molla che si rilassa compie lavoro positivo - Il corpo che cade...

Per caricare la molla si deve lavorare CONTRO la forza cons.

$$W_{AB}(\text{contro } F_{\text{cons}}) = \Delta E_p$$

La variazione di en. potenziale ~~suppl.~~ ΔE_p ~~è dato da~~ il lavoro contro $F_{\text{conservativa}}$

Es. Lavoro della Forza Peso e
Espressione dell'energia potenziale



$$\vec{F}_P = -mg \hat{k}$$

$$W_{AB} = \int_A^B \vec{F}_P \cdot d\vec{s}$$

$$= -mg(z_B - z_A) = -\Delta E_P$$

Possiamo definire

$$E_P(z) = mgz + \text{cost}$$

È comodo scegliere $\text{cost} = 0$ alla quota di riferimento dell'asse verticale $z = 0$ (e disporre l'asse con l'origine nel punto opportuno)

* Se pto materiale cade: $z_A > z_B$

$$\bullet z_A > z_B ; \Delta E_P < 0 ; W_{AB} > 0$$

Elapsa lavoro

* Se pto materiale sale (o viene fatto salire)

$$\bullet z_B < z_A ; \Delta E_P > 0 ; W_{AB} < 0$$

Assorbe lavoro

Es. En. potenziale della Elastica

$$W_{AB} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{s} = - \int_A^B kx \hat{i} \cdot d\vec{s}$$

$$= -k \int_A^B x dx = -\frac{1}{2}k(x_B^2 - x_A^2) = -\Delta E_p$$

$$E_p(x) = \frac{1}{2}kx^2 + \text{cost}$$

Scego $\text{cost} = 0$, per $x = 0$, cioè
 $E_p = 0$ nella condizione di "molta
 rilassata" (in equilibrio)

• Per spostarsi da equilibrio

$\Delta E_p > 0$; $W_{AB} < 0$ Fornire lavoro

• Per tornare vs. equilibrio

$\Delta E_p < 0$; $W_{AB} > 0$ Ego lavoro

Cons. Energia meccanica

1) F. generica $W_{AB} = E_k(B) - E_k(A)$

2) F. conservativa $W_{AB} = E_p(A) - E_p(B)$

1)+2) : $E_k(B) - E_k(A) = E_p(A) - E_p(B)$

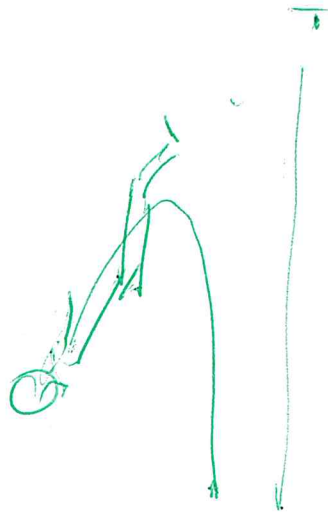
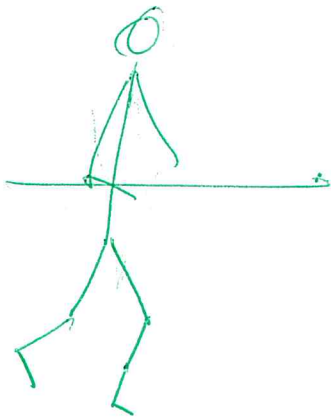
da cui $\boxed{E_k(B) + E_p(B) = E_k(A) + E_p(A)}$

Def. $E_m = E_k + E_p$ energia meccanica

→ PER F. CONSERVATIVE L'EN. MECCANICA
È CONSERVATA DURANTE IL MOTO

• La somma di $E_k + E_p$ è costante,
ma E_k e E_p variano durante il moto

SALTO CON L'ASTA (CONSERVATIVO)



Fine lancio $E_K + E_p(\text{molla}) + E_p(\text{perso}) = \text{cost}$

Fine lancio:

$$\times E_K = \frac{1}{2} m v^2 ; E_p(\text{molla}) = 0$$

$$E_p(\text{perso}) = 0$$

~~Max salto~~

$$\times E_K = 0 ; E_p(\text{molla}) = 0$$

$$E_p(\text{perso}) = mgh$$

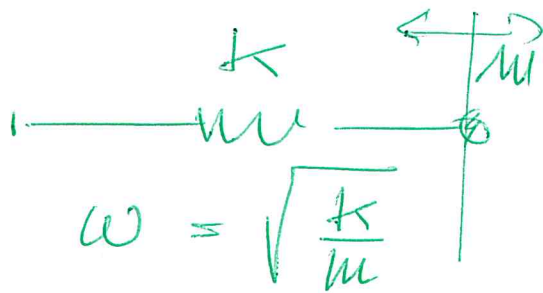
$$mgh = \frac{1}{2} m v^2 \rightarrow h = \frac{v^2}{2g}$$

$$v = 10 \text{ m/s} \Rightarrow h \approx 5 \text{ m}$$

$$g = 9.8 \text{ m/s}^2$$

Oscillatore armonico semplice

(39)



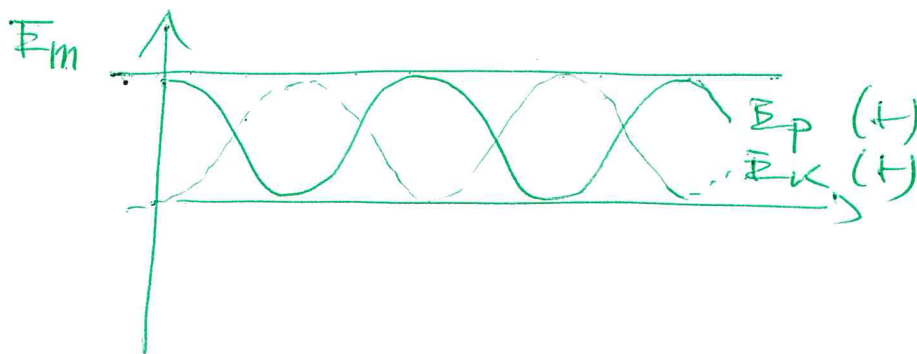
$$x(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$$

$$v(t) = -A\omega \sin(\omega t + \varphi)$$

$$E_k(t) = \frac{1}{2} m \omega^2 A^2 \sin^2(\omega t + \varphi)$$

$$E_p(t) = \frac{1}{2} k A^2 \cos^2(\omega t + \varphi)$$

$$E_k(t) = \frac{1}{2} k A^2 \sin^2(\omega t + \varphi)$$

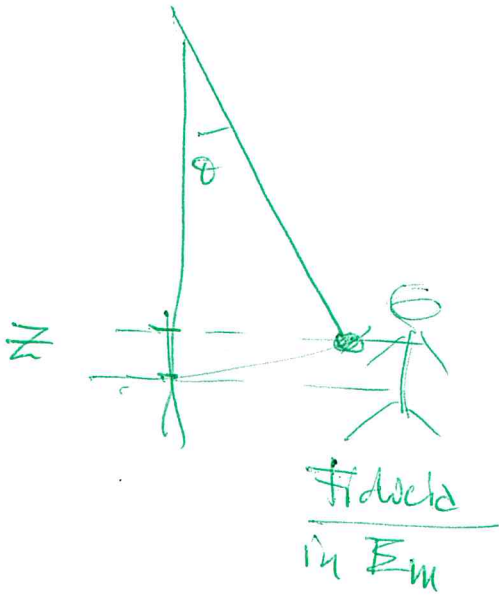


$$E_m = \frac{1}{2} k A^2 \quad \text{energia meccanica costante}$$

Continuo scambio di energia cinetica e potenziale
(con max e minimi coinc.)

Pendulo semplice

(34)



$$z = L(1 - \cos \theta)$$

$$\begin{aligned} E_p &= m g z \\ &= m g L (1 - \cos \theta) \end{aligned}$$

$$E_k = \frac{1}{2} m v^2$$

$$E_m = m g L (1 - \cos \theta_{\max})$$

$$E_m = E_p + E_k \rightarrow \text{relazione tra } \theta \text{ e } v$$

$$\frac{1}{2} m v^2 + m g L (1 - \cos \theta) = m g L (1 - \cos \theta_{\max})$$

$$\text{Risolvo per } v = \sqrt{2 g L (\cos \theta - \cos \theta_0)}$$

— appross. :

$$E_p = m g L (1 - \cos \theta) \approx m g L \frac{\theta^2}{2} \quad (\text{per } \theta \text{ piccoli})$$

$$E_k = \frac{1}{2} m (\omega L)^2 = \frac{1}{2} m L^2 \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2$$

$$\theta = A \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{L}}$$

$$\frac{d\theta}{dt} = -A \omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi)$$

→ Situazione simile a m.e.s.

Forze non conservative

$$W_{TOT} = W_c + W_{NC}$$

$\underbrace{\quad\quad}_{\text{conserv.}} \quad \underbrace{\quad\quad}_{\text{non conservativa}}$

- Dal teorema en. cinetica (sempre vero)

$$W_{TOT} = \Delta E_K$$

- Per le forze cons. esiste energia potenziale

$$W_c = -\Delta E_P$$

- Combinando:

$$W_{NC} - \Delta E_P = \Delta E_K$$

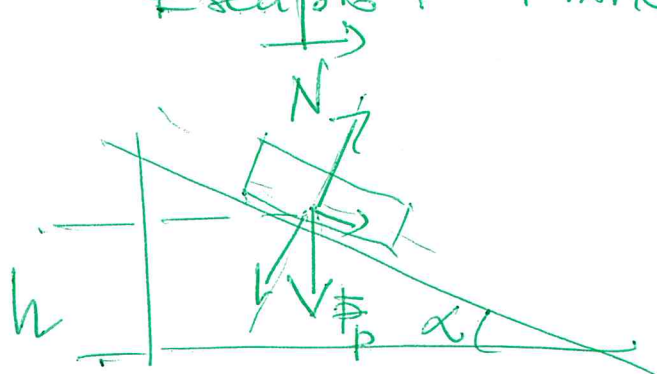
$$W_{NC} = \Delta(E_P + E_K)$$

$$\boxed{W_{NC} = \Delta E_m}$$

- Il lavoro delle F. non conservative è uguale alla variazione dell'energia meccanica E_m
- Oss. sperimentale: $\Delta E_m \leq 0$ sempre
- $\Delta E_m = 0$ se F. solo conservative

Exemplo: PLANO INCLINADO

(23)



Atrito aderente N.C.

$$f_d = \mu_d mg \cos \alpha$$

$$W_{NC} = \Delta(E_k + E_p)$$

$$\text{Se } v_i = 0 ; \Delta E_k = \frac{1}{2} m v_f^2$$

$$h_p = 0 ; \Delta E_p = mg(0 - h) \\ = -mgh$$

$$\text{Atrito : } f_d \Delta s = \mu_d mg \frac{h \cos \alpha}{\sin \alpha}$$

$$\mu mg \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \cdot h = \frac{1}{2} m v_f^2 - mgh$$

$$v_f = \left[2gh \left(1 - \mu \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \right) \right]^{1/2}$$

< 1

Sem atrito

$$v_f = [2gh]^{1/2}$$