GRANDEZZE MECCANICHE DERIVATE

× q.tà di moto
× Lavoro e energia

→ Consentono di ricavare informazioni dinamiche sul sistema senza necessità di risolvere il moto in modo completo
→ Semplificazione notevole di alcuni problemi

Q.tà di moto ; $\vec{p} = m\vec{v}$

Per pto materiale $m =$ costante

$$\vec{F} = m\vec{a} \iff \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

- Qs forma della seconda legge della dinamica ha validità più generale ed è soddisfatta anche per sistemi a massa variabile
- Per $\vec{F} = 0$ $\quad \frac{d\vec{p}}{dt} = 0 \quad \vec{p} = \text{cost}$, cioè

LA QUANTITÀ DI MOTO È CONSERVATA

Se è ~~costan~~ $\vec F = \vec F(t)$ può essere comodo usare la forma integrale della II legge della dinamica:

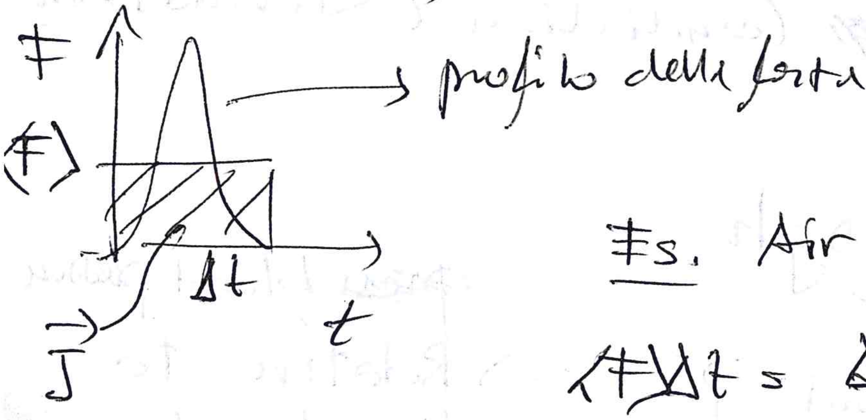
$$\vec F dt = d\vec p \longrightarrow \int_0^t \vec F(t)\,dt = \Delta \vec p \quad (*)$$

La q.tà $\vec J = \int_0^t \vec F(t)\,dt$ è detta <u>impulso</u> della forza.

<u>TEOREMA DELL'IMPULSO</u>: $\vec J = \Delta \vec p$ La variazione della quantità di moto è uguale all'impulso

Utile nell'analisi di situazioni in cui la forza non è completam. nota.

Esempio: $\langle F \rangle \Delta t = \Delta p$ ~~—~~ <u>Forza impulsiva</u> su punto materiale (colpo di mazza, calcio, etc.)



Es. Air bag / vetro

$$\langle F \rangle \Delta t = \Delta p \longrightarrow \langle F \rangle \div \frac{1}{\Delta t}$$

Lavoro e energia

- Nel quotidiano – energia ≡ abilità a compiere lavoro – In fisica la definizione è simile, ma procede come al solito tramite una precisa definizione operativa

- Supponiamo di avere un pb. dinamico in cui è assegnata $\vec{F} = \vec{F}(\vec{x})$
  - Forza nota in funzione delle coordinate [molti casi di esempi di forze elencati nelle lezioni precedenti hanno questa caratteristica: la forza è nota in funzione delle coordinate del punto su cui agisce: f. elastica, f. peso, f. gravità]

- In analogia al ~~teo~~ teorema dell'impulso (*) possiamo cercare di risolvere il problema dinamico ~~[illegible]~~ integrando la dip. di $\vec{F}$ sul percorso del punto durante il moto –

In termini funzionali:

$$F = F(t) \longrightarrow \int_0^{t_1} F(t)\,dt = \vec{J} \quad \text{impulso}$$

$$F = F(x) \longrightarrow \int_0^{x} F(x)\,dx \quad \text{(caso mono dim.)}$$

Qual è il significato di questo integrale?

* Quando l'azione di una forza ~~sposta~~ ($\vec{F}$) sposta un punto di un tratto $d\vec{s}$ diciamo che $\vec{F}$ ha compiuto lavoro (è la def. quotidiana → esempi)

Def. meccanica Lavoro della forza

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

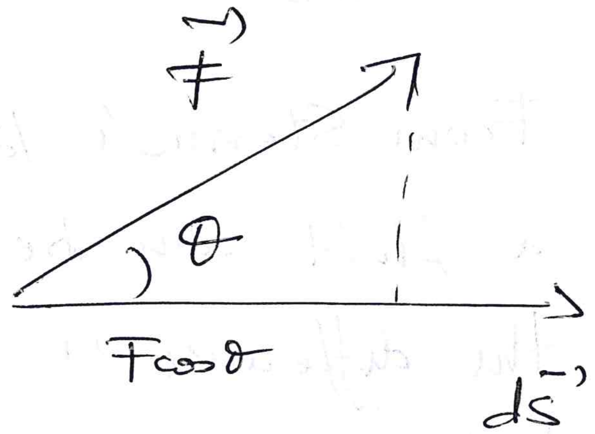
Prodotto scalare dei vettori $\vec{F}$ (costante sul tratto infinitesimo $d\vec{s}$) e $d\vec{s}$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = ab\cos\theta \quad \begin{cases} \max & \theta = 0 \\ 0 & \theta = 90° \\ \min & \theta = 180° \ (<0) \end{cases}$$

- commutativo
- distributivo
- $\hat{i} \cdot \hat{i} = \hat{j} \cdot \hat{j} = \hat{k} \cdot \hat{k} = 1 \qquad \hat{i} \cdot \hat{j} = 0$ etc.

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

$$= F\,ds \cos\theta$$



$F\cos\theta$ = proiezione di F lungo ds

- La componente // a $d\vec{s}$ ~~lavora~~ compie lavoro
- La componente ortogonale a $d\vec{s}$ non compie lavoro

* Il lavoro della componente // può essere motore ($\cos\theta > 0$) o resistente ($\cos\theta < 1$)

Nel secondo caso lo spostamento non è determinato dalla forza in esame - ~~Le~~ ci sono altre forze -
- Con il calcolo del lavoro siamo interessati al lavoro di questa forza

Più in generale –
$\vec{F} = \vec{F}(\vec{x})$ e spostamento finito

A partire dalla def. infinitesima:

$$W_{TOT} = \sum_i \delta W_i = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i\, d\vec{s}_i$$

$$W_{TOT} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{s} \qquad \text{integrale curvilineo}$$

– Tralasciando le sottigliezze matematiche, per noi il significato fisico è chiaro: somma di tanti lavori infinitesimi $\delta W = \vec{F} d\vec{s}$

– Se agisce più di una forza:

$$W_{TOT} = W_1 + W_2 + \dots =$$
$$= \vec{F}_1 \cdot d\vec{s} + \vec{F}_2 d\vec{s} + \dots$$
$$= (\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots)\, d\vec{s} = \vec{F}_{TOT} \cdot d\vec{s}$$

Esempio: lavoro $F = 1\,N$, $ds = 10\,m$
$F = 2\,N$, $ds = 10\,m$

$W = 1\,N \cdot 10\,m = 10\,J$

$W = 2\,N \cdot 10\,m = 20\,J$ joule

Potenza (istantanea) : rapidità di erogazione del lavoro

$$P \underset{def}{=} \frac{dW}{dt} = \left\{ \vec{F} \cdot \frac{d\vec{s}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v} \right.$$

espressione per P istantanea

($\vec{F}$ = cost su tratto infinitesimo, quindi la potenza istantanea può essere espressa come $\vec{F}\vec{v}$)

$\rightarrow 1\,W = 1\,J/s$

— Definizione molto restrittiva di lavoro :

1) $\vec{F} \perp \Delta\vec{s} \rightarrow$ lavoro nullo

$F_{centripeta}$ $\quad \vec{F} \perp \vec{v} \quad W = 0$

2) $\Delta\vec{s} = 0 \rightarrow$ lavoro nullo

F. Normale | $\rightarrow$ non compiono
Tensione fili | lavoro

Tuttavia sostenere un peso in posizione statica costa "fatica" o "energia"

ma energia sembra avere un significato più ampio di lavoro, ancorché associato

Riprendiamo un esempio -

$F = 10\,N \qquad \Delta L = 10\,m \qquad W = 100\,J$

$F = 10\,N \qquad \Delta L = 100\,m \qquad W = 1000\,J$

<u>stessa</u> forza dà <u>più lavoro</u>, agendo su un percorso più lungo (poiché F identica vuol dire che agisce per un tempo maggiore)

- Se F cessa di agire dopo ΔL dove è finito il lavoro? È perso? o il lavoro ha avuto un esito?

- Poiché $F \overset{= cost}{}$ ha agito più a lungo, mi aspetto che il corpo sia stato accelerato di più - Cioè v sia diversa nei due casi -

- Il lavoro si è tradotto in moto con v differenti? - Posso trovare una relazione quantitativa che collega W e le grandezze cinematiche che descrivono il moto?

↳ Sembra esserci dell'<u>energia associata al moto</u> - Se voglio fermare il corpo [illegible]

Relazioni tra lavoro (infinitesimo) e grandezze cinematiche:

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{s} =$$

$$= m\vec{a} \cdot \vec{v}\, dt =$$

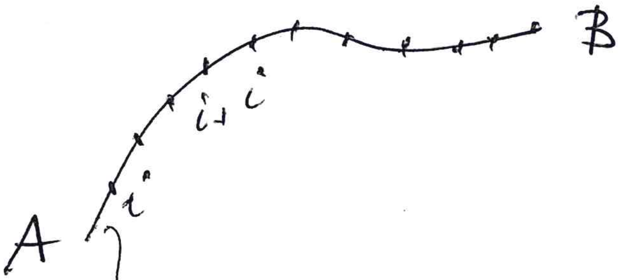
$$= m\left[\frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v}\right] dt$$

$$= m\, \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\vec{v} \cdot \vec{v})\, dt$$

$$= \frac{1}{2} m\, d(v^2) = d\left(\frac{1}{2} m v^2\right)$$

- Lavoro infinitesimo dW è uguale alla diff. lungo lo spostamento di $\frac{1}{2} m v^2$

- Spostamento finito



$$W = \int_A^B d\left(\frac{1}{2} m v^2\right) = \frac{1}{2} m v_B^2 - \frac{1}{2} m v_A^2$$

$$= \Delta\left(\frac{1}{2} m v^2\right)$$

$$\sum \left(\cancel{\frac{1}{2} m_i v_i^2} - \frac{1}{2} m_i v_{i-1}^2\right) + \frac{1}{2} m v_{i+1}^2 - \cancel{\frac{1}{2} m v_i^2}$$

nella somma complessiva rimangono solo il primo e l'ultimo termine, per quanto complicata sia la traiettoria curva

Si definisce

$$\underline{E_k = \frac{1}{2} m v^2} \qquad = \underline{\text{energia cinetica}}$$

grandezza omogenea al lavoro, che permette di calcolare il lavoro di una forza lungo una traiettoria da grandezze cinematiche

$$\boxed{W_{AB} = E_k(B) - E_k(A)} \qquad (**)$$

(**) TEOREMA DELL'ENERGIA CINETICA

- discende da $\vec{F} = m\vec{a}$
- ha validità generale
- Collega quantità scalari (utile nella soluzione di problemi in cui la geom. o direzione delle forze non è decisiva)
  → semplifica l'analisi

A rigore E_k è definita a meno di una costante ($W_{AB} = \Delta E_k$) - E' naturale, in meccanica classica, porre $E_k = 0$ per $v = 0$

Validità del Teor. En cinetica (TEK)

* Il lavoro è invariante rispetto al cambio di sist. di rif. traslati / ruotati
$\vec{F}$ identica $d\vec{s}$ invariante, ma non è invariante rispetto al cambio di osservatore.

* SRI : $\vec{r} = \vec{r}\,' + \vec{r}_{oo'}$

$\vec{v} = \vec{v}\,' + \vec{v}_{oo'}$

se $\vec{v}_{oo'} \neq 0$ $\quad E_K' \neq E_K$

$$v^2 = \vec{v}\cdot\vec{v} = (\vec{v}\,' + \vec{v}_{oo'})(\vec{v}\,' + \vec{v}_{oo'})$$
$$= v'^2 + 2\vec{v}\,'\cdot\vec{v}_{oo'} + v_{oo'}^{\,2}$$

$$\Delta E_K = \Delta E_K' + \frac{1}{2} m(\vec{v}\,'_B - \vec{v}\,'_A)\cdot\vec{v}_{oo'}$$

cioè $\Delta E_K \neq \Delta E_K'$

~~Pertanto~~ $\vec{F} = \vec{F}'$ per SRI

ma $d\vec{s} \neq d\vec{s}\,'$ $\quad$ (per $\vec{v}_{oo'}\,dt$)

Tuttavia poiché TEK discende da $\vec{F} = m\vec{a}$, TEK è riconosciuto da tutti i SRI

~~cioè~~ $W' = \Delta E_K'$ e $W = \Delta E_K$

anche se $W' \neq W$ e $\Delta E_K' \neq \Delta E_K$

Esempi

1) Getto del peso : $D = \frac{v^2}{g} \div E_k$ Gittata

- Tradizionale : spinta del braccio da fermo (1m)

$$\Delta E_k = \frac{1}{2} m v^2 - \frac{1}{2} m v_i^2 = W_b$$

con $v_i = 0$ e $W_b = \langle F_b \rangle \cdot 1m$

Per $D \simeq 20$ m $\rightsquigarrow$ $W_b \sim 700$ J

- Con rotazione (O'Brien) : $v_i \neq 0$ $v_i = \omega r$

$D \simeq 21$ m se E_k aumenta del 5%

Cioe' $E_k = W_b + \frac{1}{2} m v_i^2$ con

$$\frac{1}{2} m v_i^2 = 0.05\, W_b \simeq 35 \text{ J}$$

Per un peso da 7 kg $\Rightarrow v_i \sim 3$ m/s

TEK molto potente

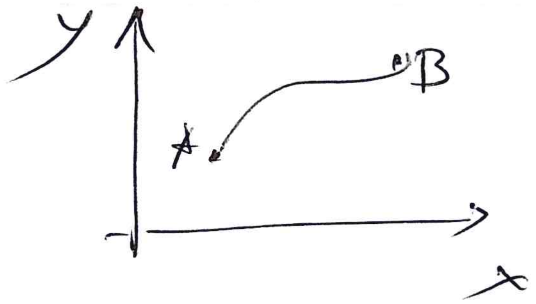
→ non serve conoscere le leggi di forza per calcolare il lavoro

→ sufficiente osservare il moto, misurare quantità cinematiche e calcolare E_K

- se leggi di forza note, si può calcolare il lavoro anche in modo esplicito a partire dalla definizione –

Esempio 1   Lavoro della forza peso

$$\vec{F}_p = -mg\hat{j}$$



$$W_{AB} = \int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{s} =$$

$$= -mg\int_A^B \hat{j}\cdot d\vec{s} = -mg\int_A^B dy = -mg(y_B - y_A)$$

Non dipende dal percorso, ma solo dalla quota di partenza e di arrivo

Tramite il TEK:

$$\frac{1}{2} m v_B^2 - \frac{1}{2} m v_A^2 = mg (y_A - y_B)$$

$$v_B = \left[v_A^2 + 2g(y_A - y_B) \right]^{1/2}$$

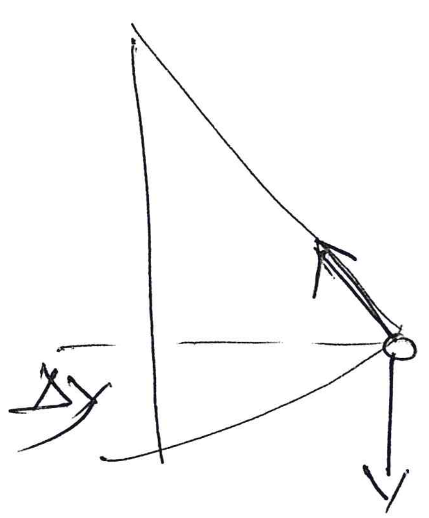
Relazione tra velocità iniziale e finale nel moto di caduta libera

- se $v_A^2 = 0$ $\quad v_B = [2g \Delta y]^{1/2}$

Relazioni trovate nelle soluzioni del moto verticale, integrando $a = a(t)$, risolvendo l'eq. di 2° grado –

Il risultato non dipende dal percorso ma solo da Δy – !

Es 2, Pendolo



$$dW = (\vec{F_p} + \vec{T}) \cdot d\vec{s}$$

$$= \vec{F_p} \cdot d\vec{s}$$

poiché $\vec{T} \perp d\vec{s}$ non lavora

Lavoro $W_{AB} = \int_A^B \vec{F}_p \cdot d\vec{s} =$

$$= -mg \int_A^B \hat{j} \cdot d\vec{s} =$$

$$= -mg \int_A^B dy = -mg\,(y_B - y_A)$$

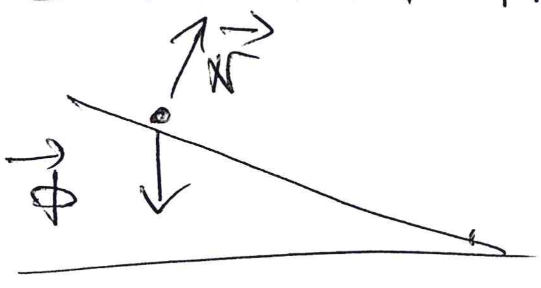
$W_{AB} = \Delta E_K$ ← Variazione di energia cinetica identica al caso del moto di caduta libera per un punto di egual massa e/per egual dislivello

→ v^2 è identico nei due casi

$\vec{v}$ è differente ← Effetto di $\vec{T}$

ΔE_K non contiene tutta inf.

similmente: Piano inclinato



$\Delta E_K = mg\,(y_A - y_B)$

$\vec{N}$ non compie lavoro

Δv^2 identico al caso caduta libera

$\Delta \vec{v}$ diff. —