Lezione 7

Sistemi di riferimento non inerziali: non riconoscono il principio di inerzia, cioe' vedono ~~ano~~ oggetti non soggetti a forze esterne muoversi di moto accelerato.

Es. 1 → moto di un oggetto in auto durante una frenata

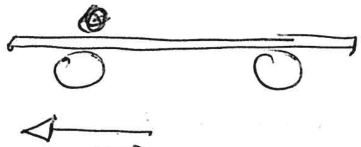
Es. 2 → traiettorie degli oggetti al suolo rispetto ad una persona su una giostra.

Anche il II principio ha limiti di validità e non è riconosciuto da oss. non inerziali, che vedono moti unif. accelerati in assenza di forze esterne.

Es. 1 → moto di una biglia su un treno in frenata (cambio di modulo di $\vec{a}$)

Es. 2 → moto di una biglia su una nave in virata (cambio di direzione di $\vec{a}$)

E' possibile "salvare" le apparenze (e utile o semplice nella descrizione dei moti) descrivendo il moto tramite l'introduzione di forze apparenti



$\vec{a}_{NI}$ = acc. del treno risp. (oss. N.I) all'osservatore a terra (osservatore inerziale)

$-\vec{a}_{NI}$ = acc. della biglia (libera e ferma) rispetto all'osservatore solidale con il treno (osservatore mobile o non inerziale)

$\vec{F}_{app} = -m\vec{a}_{NI}$ forza apparente agente sulla ~~biglia~~ "vista" dell'oss. ~~inerziale~~ N.I.

Se la biglia è soggetta ad una forza $\vec{F}$ (risultante di forze) reale nel sist. inerziale

Per l'oss. NI vale:

$$\vec{F} + \vec{F}_{app} = m\vec{a}'$$

L'acc. di un ~~oggetto~~ punto materiale in un sist. di riferimento NI ~~è~~ soddisfa la II legge di Newton, perché la forza risultante include le forze apparenti

$$\vec{F}_{app} = -m\vec{a}_{NI}$$

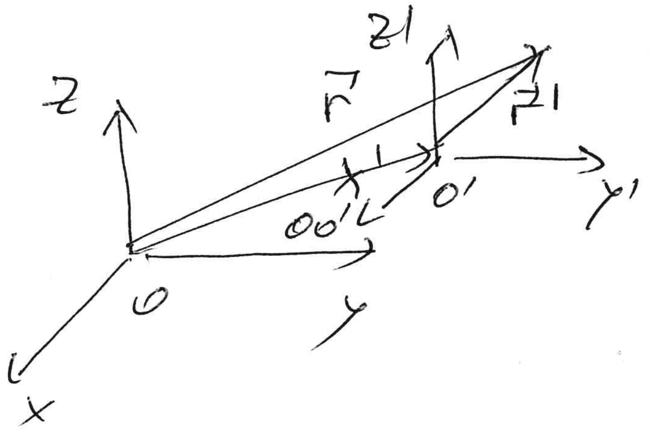
- Se siamo in grado di calcolare $\vec{a}_{NI}$ rispetto ad un oss. inerziale, possiamo conoscere la dinamica in un sistema non inerziale (via $\vec{F}_{app}$

- Nota $\vec{F}_{app}$ è uno stratagemma ~~e non~~ e di calcolo. Che non sia una forza reale è evidente dal fatto che <u>NON SODDISFA</u> IL TERZO PRINCIPIO DELLA DINAMICA

Es. $\vec{F}_{app} = -m\vec{a}_{NI}$

Non esiste una reazione

- Per calcolare a_{NI} dobbiamo affrontare in modo generale il calcolo delle <u>velocità</u> e <u>accelerazioni relative</u> in un sistema fisso e uno mobile



$$\vec{r} = \vec{r}' + \vec{OO'}$$

$$\vec{v} = \vec{v}' + \frac{d\vec{OO'}}{dt}$$

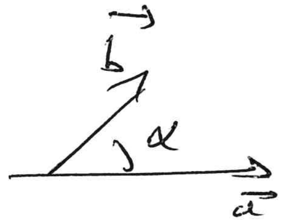
$$\vec{a} = \frac{d}{dt}\left(\vec{v}' + \frac{d\vec{OO'}}{dt}\right)$$

Nel caso generale OO' si muove e gli assi ruotano. La derivata di ~~OO~~ $\vec{v}'$ deve includere termini di rotazione.

Prodotti tra vettori

1) Prodotto scalare:

$\vec{a} \cdot \vec{b} = ab \cos\alpha$



per componenti $\vec{i} \cdot \vec{i} = \vec{j} \cdot \vec{j} = \vec{k} \cdot \vec{k} = 1$

$\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{j} \cdot \vec{k} = \vec{k} \cdot \vec{i} = 0$

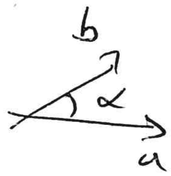
$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$

① commuta

② è invariante per roto-traslazioni del sistema di riferimento (è una grandezza scalare)

2) Prodotto vettoriale

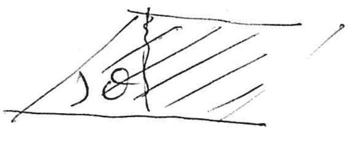
def. $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c}$



$|\vec{c}| = ab \sin\alpha$

direzione $\perp \pi(\vec{a}, \vec{b})$

verso $\sim$ regola destrorsa



← modulo è l'area del parallelogramma di lati a, b

per la regola della mano dx è evidente

- che il prodotto vettoriale anticommuta
- Non è associativo $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} \neq \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$
- è distributivo

Nel riferimento cartesiano:

$$\begin{cases} c_x = a_y b_z - a_z b_y \\ c_y = a_z b_x - a_x b_z \\ c_z = a_x b_y - a_y b_x \end{cases}$$

discendono applicando la proprietà <u>distributiva</u>

a $\vec{c} = (a_x \hat{i} + a_y \hat{j} + a_z \hat{k}) \times (b_x \hat{i} + b_y \hat{j} + b_z \hat{k})$

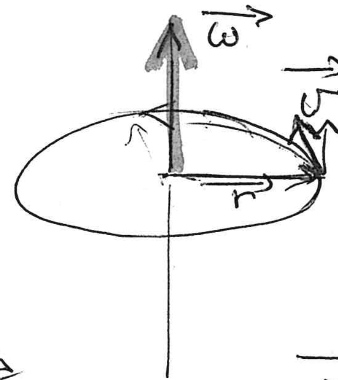
e ricordando dalle regole della mano dx

che

$$\hat{i} \times \hat{i} = \hat{j} \times \hat{j} = \hat{k} \times \hat{k} = 0$$

$$\begin{cases} \hat{i} \times \hat{j} = \hat{k} = -\hat{j} \times \hat{i} \\ \hat{j} \times \hat{k} = \hat{i} = -\hat{k} \times \hat{j} \\ \hat{k} \times \hat{i} = \hat{j} = -\hat{i} \times \hat{k} \end{cases}$$

(*) Per poter derivare le forme generali della velocità e acc. relative occorre esprimere la velocità angolare in forma vettoriale



$\vec{v} = \omega r \hat{u}_\theta$

Posso scrivere

$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$

$\cancel{\boxed{\vec{\omega} = \vec{r} \times \vec{v}}}$

Antiorario per ω rivolta a noi

$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$ dove ω è una velocità angolare e il vettore è def con il prodotto del

prodotto vettoriale

Se assegnamo $\vec{\omega}$ individuiamo l'asse di rotazione del moto. Possiamo definire l'accelerazione angolare in forma vettoriale

Sia $\vec{\alpha} \overset{def}{=} \frac{d\vec{\omega}}{dt}$ = acc. angolare

$= \frac{d\omega}{dt}\,\hat{u}_\omega$ stessa ~~verso~~ direzione di $\vec{\omega}$ poiché ω è fisso nel moto circolare

$\equiv \frac{d^2\theta}{dt^2}\,\hat{u}_\omega$

~~Nota $\vec{\omega}$ in base alla def.~~

Acc. del moto circolare:

$$\vec{a} = \frac{d}{dt}(\vec{\omega}\times\vec{r}) =$$

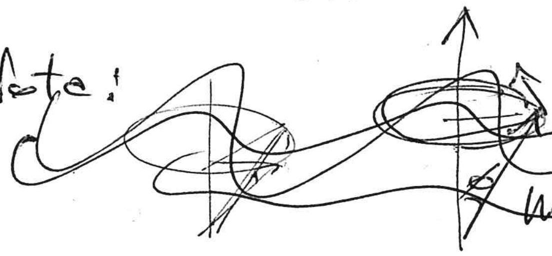
$$= \frac{d\vec{\omega}}{dt}\times\vec{r} + \vec{\omega}\times\frac{d\vec{r}}{dt}$$

$$= \underbrace{\vec{\alpha}\times\vec{r}}_{\text{diretta come } \vec{v} \text{ = tangente}} + \underbrace{\vec{\omega}\times\vec{v}}_{\text{diretta come } r \text{ = radiale (normale)}}$$

$a_T = R\frac{d^2\theta}{dt^2}$

$\omega v = \omega^2 r$ acc. centripeta

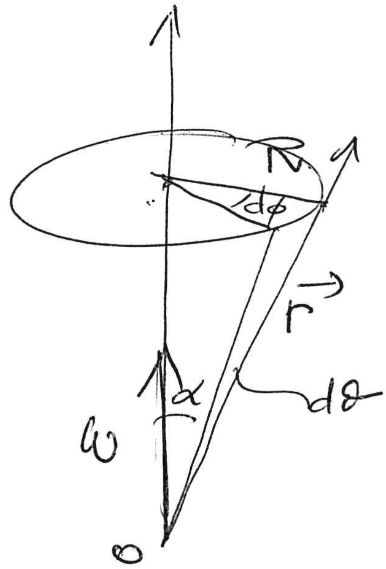
Note:



~~$\vec{\omega}\times\vec{r} = \omega r \sin\theta\,\vec{k}$~~

~~moto di precessione~~

Più in generale posso considerare il moto di precessione:



$$v = R\frac{d\phi}{dt}$$

$$= r\sin\alpha\frac{d\phi}{dt}$$

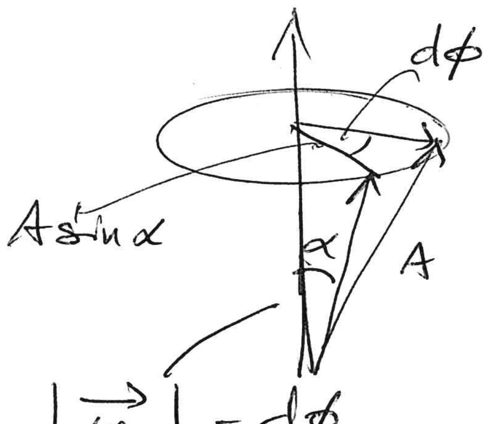
$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

$$\boxed{\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{r}}$$

- La definizione di velocità angolare è indip dalla scelta di O lungo l'asse ~~che~~ normale al moto circolare e passante per il cerchio (in casi generali in cui il moto non è circolare si deve considerare la circonf. osculatrice)

Più in generale

- Possiamo considerare una precessione generica di un vettore $\vec{A}$:

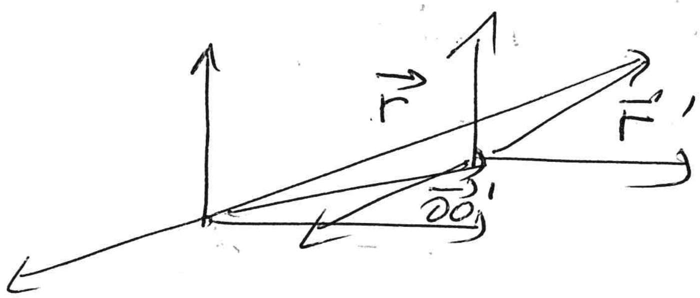


con $|\vec{\omega}| = \frac{d\phi}{dt}$

La ~~variazione tot~~ derivata ~~temp~~ temporale di $\vec{A}$ si ottiene come

$$\boxed{\frac{d\vec{A}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{A}}$$

X Moto relativo



$$\vec{r} = \vec{OO'} + \vec{r}$$

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{OO'}}{dt} + \frac{d\vec{r}'}{dt}$$

$$\vec{v} = \vec{u} + \frac{d\vec{r}'}{dt}$$

Nel caso generale di traslazioni e rotazioni del sistema mobile r'

$$\frac{d\vec{r}'}{dt} = \frac{d}{dt}\left(x'\hat{i}' + y'\hat{j}' + z'\hat{k}'\right) =$$

$$= \frac{dx'}{dt}\hat{i}' + x'\frac{d\hat{i}'}{dt} + \dots$$

Uso $\frac{d\vec{A}}{dt} = \vec{\omega}\times\vec{A}$

$$= \vec{v}' + x'\cdot\vec{\omega}\times\hat{i}' + y'\vec{\omega}\times\hat{j}' + \dots$$

$$= \vec{v}' + \underline{\underline{\vec{\omega}}}\times\vec{r}'$$

$\longrightarrow$ velocità angolare (vettoriale) del sistema mobile

TEOREMA DELLE VELOCITÀ RELATIVE

$$\vec{v} = \vec{v}' + \underbrace{\vec{v}_0 + \vec{\omega} \times \vec{r}'}$$

* Velocità di trascinamento $= \vec{v} - \vec{v}'$ differenza di velocità vista dai due osservatori.
Significato: se $\vec{v}' = 0$ (punto solidale con il sistema mobile), la velocità del punto vista dal sistema O è data dalla velocità di trascinamento esprime la velocità vista da O di un
* Se O' non è in rotazione rispetto ad O, ($\vec{\omega} = 0$) un moto rettilineo uniforme in O è rettilineo uniforme in O'

→ sistemi inerziali secondo il I principio
→ ~~teorema delle velocità~~ legge di composizione delle velocità di Galileo

⟹ Ritroviamo il risultato di Galileo sulla composizione delle velocità come caso del teorema delle velocità relative

⟹ SIST. INERZIALI

Deriviamo il risultato per trovare l'accelerazione

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\vec{v}' + \vec{v}_{O'} + \vec{\omega}\times\vec{r}'\right)$$

$$= \underbrace{\frac{d\vec{v}'}{dt}} + \frac{d\vec{v}_{O'}}{dt} + \frac{d\vec{\omega}}{dt}\times\vec{r}' + \underbrace{\vec{\omega}\times\frac{d\vec{r}'}{dt}}$$

può cambiare in modulo e direzione

$$\frac{d\vec{v}'}{dt} = \frac{d}{dt}\left(v_x'\hat{i} + v_y'\hat{j} + v_z'\hat{k}\right) =$$

$$= \vec{a}' + v_x'\frac{d\hat{i}}{dt} + \dots$$

$$= \vec{a}' + v_x'\,\vec{\omega}\times\hat{i} + v_y'\,\vec{\omega}\times\hat{j} + \dots$$

$$= a' + \vec{\omega}\times\vec{v}'$$

$$\vec{\omega}\times\frac{d\vec{r}'}{dt} = \vec{\omega}\times\left(\vec{v}' + \vec{\omega}\times\vec{r}'\right) =$$

$$= \vec{\omega}\times\vec{v}' + \vec{\omega}\times\left(\vec{\omega}\times\vec{r}'\right)$$

TEOREMA DELLE ACC. RELATIVE

$$\boxed{\vec{a} = \vec{a}' + \underbrace{\vec{a}_{O'} + \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}') + \frac{d\vec{\omega}}{dt}\times\vec{r}'}_{\text{ACC. DI TRASCINAMENTO}} + \underbrace{2\vec{\omega}\times\vec{v}'}_{\text{ACC. DI CORIOLIS}}}$$

ACC. DI TRASCINAMENTO
$\vec{v}' = 0$, $\vec{a}' = 0$
acc. del punto solidale con il sistema mobile

ACC. DI CORIOLIS
dip da $\vec{v}'$

$\Rightarrow$ acc. vista dall'osservatore (NON INERZIALE) solidale con il sistema mobile

$$\vec{a}' = \vec{a} - \vec{a}_T - \vec{a}_C$$

$$m\vec{a}' = \vec{F} + \underbrace{\vec{F}_{\text{inerziali}} + \vec{F}_{\text{coriolis}}}_{\text{Forze apparenti}}$$

$$\vec{F} = -m\vec{a}_{NI}$$

$\rightarrow$ validità del II principio:

$$\vec{F} = m\vec{a}' \Rightarrow \begin{matrix}\vec{a}_T = 0 \\ \vec{a}_C = 0\end{matrix} \Rightarrow \begin{cases}\vec{a}_{O'} = 0 \\ \vec{\omega} = 0\end{cases}$$

La condizione non pone restrizioni su $\vec{v}_O$

ma non pone restrizioni su v_O: sistemi

sistemi in moto rettilineo uniforme (relativo) sono inerziali (se uno di essi è inerziale)

PER CAPIRE IL SIGNIFICATO DEI TERMINI:

CASO ~~DEL MOTO~~ DI UN SISTEMA MOBILE IN MOTO CIRCOLARE UNIFORME

$$\vec{\omega} = cost \qquad \frac{d\vec{\omega}}{dt} = 0$$

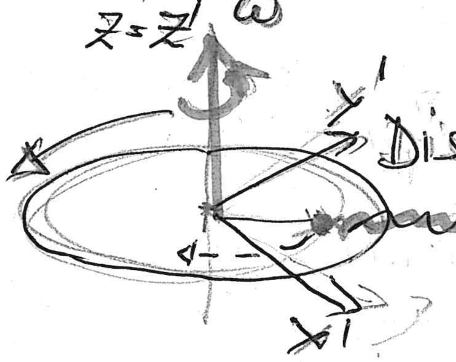
$$\vec{a}_0 = 0$$

$$\vec{a}_T = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') \qquad \text{acc centrip}$$

$$\vec{a}_C = 2\vec{\omega} \times \vec{v}' \qquad (\text{nota richiede } \vec{v}' \neq 0)$$

$$\boxed{\vec{a}'_{(Tot\,NI)} = \vec{a} - \underbrace{\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}')}_{\text{"Acc centrifuga" [SEGNO MENO]}} - \underbrace{2\vec{\omega} \times \vec{v}'}_{\text{Acc. di CORIOLIS [SEGNO MENO]}}}$$

(1)



Disco in rotazione oraria (O')

punto fermo rispetto a O (libero con il disco che gli scorre sotto i piedi)

$$\vec{v} = 0$$
$$\vec{a} = 0$$

Teor. velocità: $\vec{v}' = -(\vec{\omega} \times \vec{r}')$ velocità tang. ANTIORARIA

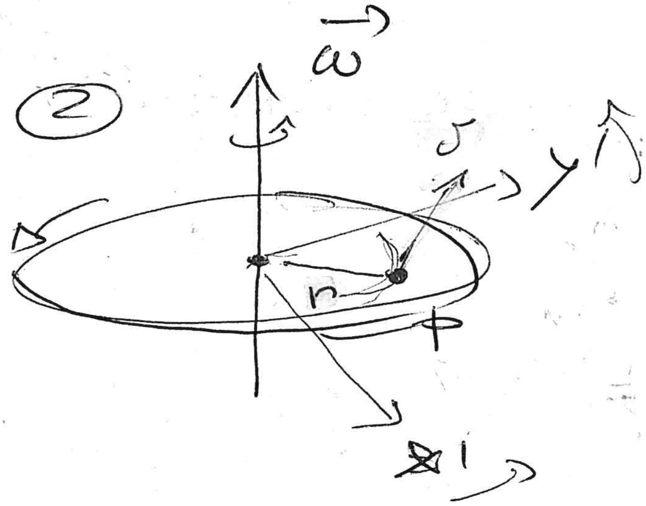
Teor. acc.:

$$\vec{a}' = -\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') - 2\vec{\omega} \times (-\vec{\omega} \times \vec{r}')$$

$$\vec{a}' = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}')$$

L'osservatore mobile vede un'accelerazione centripeta somma dei due termini. Resta per O' il problema dell'origine dell'accelerazione e delle ~~forze~~ associate

2



P sia legato all'asse da un filo e gli sia data una velocità tangenziale in O pari a $v = \omega r$

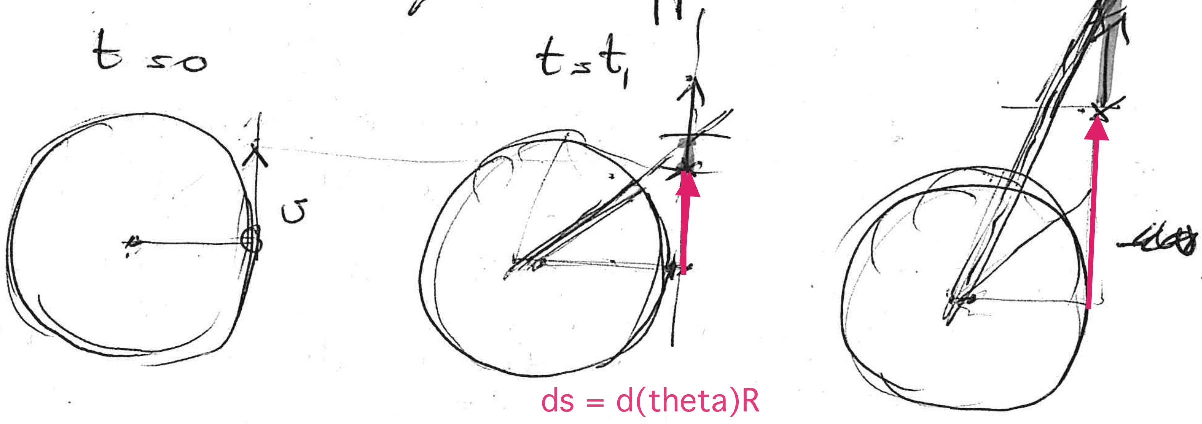
* Il moto per O è circolare uniforme con acc. centripeta $\omega^2 r$. Il filo esercita la forza centripeta tramite la tensione

* Visione di O': $\vec{v}' = 0$ (il punto P si muove solidalmente al disco) e $\vec{a}' = 0$

Interpretazione di O': il filo è teso da una <u>forza centrifuga</u> diretta radialmente
(Forza apparente)

* TAGLIA IL FILO: IL PUNTO PROSEGUE TANGENZIALMENTE ALLA TRAIETTORIA IN O e dunque si sposta a raggi maggiori (distanze maggiori dall'asse). Essendo in O il moto libero $v =$ cost. e dunque $v < \omega R$ per $R > r$. Perciò O' non vede un moto radiale: il punto rimane indietro → Evidenza di

una ulteriore forza apparente: CORIOLIS

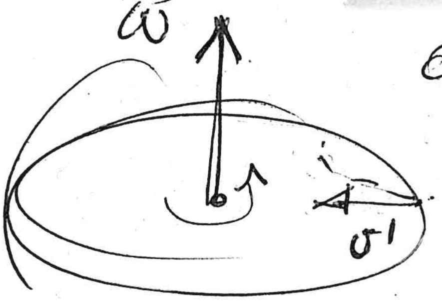


Dopo il taglio del filo:

$\vec{a} = 0$ osservatore O

$\vec{a}' = -\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}') \underbrace{-2\vec{\omega}\times\vec{v}'}_{\text{CORIOLIS}}$ oss. O'

~~ESEMPIO~~ ~~CASO~~ PIÙ CHIARO DI F - CORIOLIS



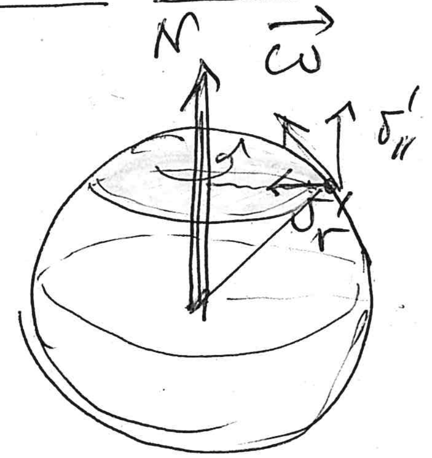
Oss. O:
- il punto ha una componente radiale $v_R = \omega R > \omega r$ per $r < R$
- il punto "anticipa" il disco a raggio r (devia in direzione del senso di rotazione)

~~Oss~~

Oss O': F_{app} di CORIOLIS ~~SPOSTA~~ MODIFICA LA TRAIETTORIA DALLA DIR. RADIALE

$a' = -2\vec{\omega}\times\vec{v}'$ deviazione come ω

Caso del lancio dei proiettili



Lancio verso Nord

$v' = \vec{v}'_{\parallel} + \vec{v}'_r$

$\vec{F}_c = -m[2\vec{\omega} \times \vec{v}'_r]$

Acc. di CORIOLIS NEL DISCO

Deviazione verso Oriente dovuta alla forza di coriolis dipende dalla latitudine

× $\vec{F}_c = 0$ all'equatore

× Deviazione vs Oriente per colpi verso Nord (Sud) nell'emisfero boreale (Australe)

× Il cambio di direzione di $F_{CORIOLIS}$ passando dall'Equatore è resp. della rotazione ciclonica / anticiclonica nei due emisferi