

Leggi di Forza

(1)

$$\vec{F} = m \vec{a}$$

non è utile se non conosco una Legge di forza che specifica la forza in dipendenza da parametri che descrivono l'interazione tra il corpo di massa m e l'ambiente (o sistema) circostante

- Se nota $\vec{F} \Rightarrow$ Eq. del moto e soluzione
- Se osservo $\vec{a} \Rightarrow$ Posso trovare la forma di $\vec{F}$ per via empirica

Leggi di Forza:

1) Fondamentali: riconducibili a proprietà indivisibili della materia

- * Gravità
- * F. elettrica
- * F. debole
- * F. Forte

2) Empiriche: riconducibili a forze fondamentali, ma in configurazioni troppo complesse per essere specificate a partire da esse in modo analitico

(2)

le leggi empiriche sono comunque espresse in forma analitica, ricavata per via empirica, in dipendenza da parametri ~~dati~~ che descrivono l'interazione corpo - ambiente - Esempi:

- Attrito
- F elastica

(in ultimi analisi dipendono da forze elettriche)

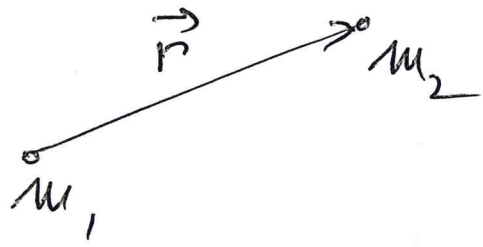
3) Reazioni vincolari: non specificano la forza in modo completo, ma non possono essere ignorate poiché influenzano le condizioni dinamiche e statiche di un corpo - Esempi

- Forza Normale
- ~~Forza~~ Tensione dei fili
-

Esempio di Forza Fondamentale: Gravitazione

(3)

$$\vec{F} = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}$$



Espressione ricavata a partire dall'osservazione dei moti (accelerazioni) dei pianeti -

Sulla superficie terrestre: Forza peso (empirica)

- Osservazione (empirica): tutti i corpi cadono (verso il basso) lungo la direzione "verticale" con la medesima accelerazione $g = 9.8 \text{ m/s}^2$
- Da $\vec{F} = m\vec{a}$ inferita l'espressione empirica per la forza peso:

$$\vec{F}_p = -mg \hat{u}_y$$

$\hat{u}_y$ = direzione verticale

Nota: la direzione "verticale" è definita dalla direzione della forza peso (= direzione del filo a Pb)

La verticale non è una direzione fissa, ma dipende dal punto in cui ci si trova sul globo terrestre

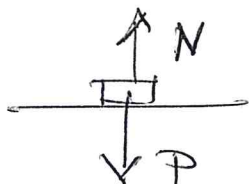
Reazioni vincolari (esempi)

4

1) Forza normale

* Forza di contatto esercitata da una superficie piana (o più in generale da un vincolo) che impedisce il moto in una direzione -

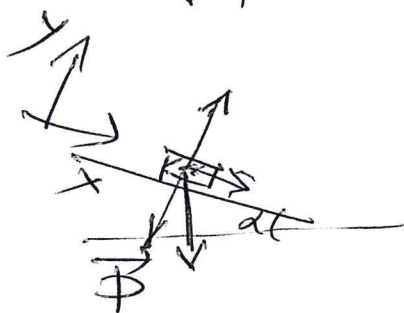
Es. 1



$$\vec{N} = -\vec{P}$$

per un piano orizzontale

Es. 2



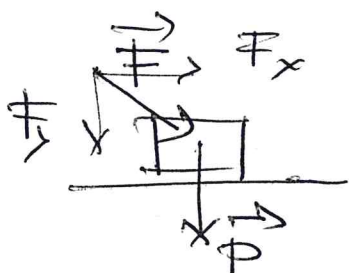
$$\vec{N} = P \cos \alpha \hat{u}_y$$

$$P \sin \alpha = m a_x$$

Il vincolo impedisce il moto $\perp$ al piano, ma non il moto tangente al piano (o via dal piano, se ci poniamo fuori)

$\Rightarrow$ L'intensità di $\vec{N}$ dipende dalla configurazione

Es. 3



$$N = F_y + P > P$$

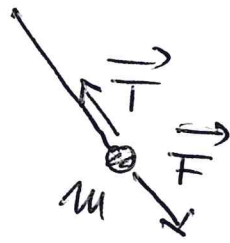
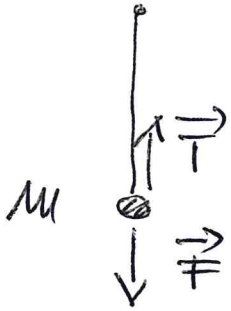
$$F_x = m a_x$$

$\Rightarrow$ L'intensità dipende da F e P ossia dalla RISULTANTE delle FORZE NORMALI

(5)

Tensione del filo

Oss. empirica: Si realizzano condizioni statiche ($\vec{a} = 0$) sotto l'azione di $\vec{F}$ esterni con il filo teso nella direzione di $\vec{F}$

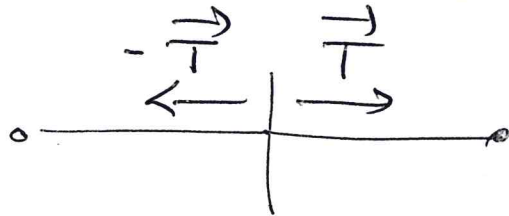


$\Rightarrow$ Reazione vincolare del filo che equilibra $\vec{F}$
 $\vec{T} = -\vec{F}$

Filo ideale: i) inestensibile, ii) massa nulla (trascurabile)

- In equilibrio ($\vec{a} = 0$) in ogni punto del filo deve essere

$$\vec{T} = -\vec{T}$$



$\exists \vec{T} \neq 0$ lungo il filo, perché se viene tagliato gli estremi accelerano

- Alle estremità del filo $|\vec{T}| = |\vec{F}|$ con $\vec{F}$ forza esterna

- In condizioni statiche $\vec{F} = -\vec{F}$ ai due estremi

FILLO IN MOVIMENTO : $\vec{a} \neq 0$

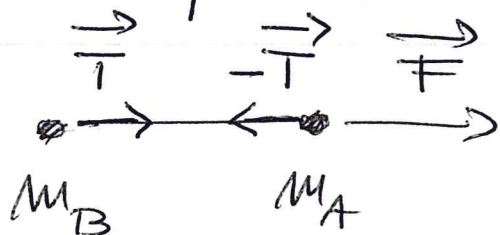
(6)

- Poiché $m=0$ (filo ideale), in ogni pto del filo $\sum \vec{F} = 0$, ossia $\vec{T} = -\vec{T}$

$\Rightarrow$ Filo teso con tensione identica in tutti i punti anche per $\vec{a} \neq 0$

- Però $\vec{T}$ non è uguale alle forze esterne in questo caso, ma il suo valore dipende dalla situazione dinamica

Esempio



- $\vec{F}$ esterna applicata a m_A

- m_A e m_B legate da filo inestensibile

$\rightarrow$ Stesse accelerazioni

Eq. dinamica (lungo l'asse di $\vec{F}$ e $\vec{T}$) :

corpo A : $\int F - T = m_A a$

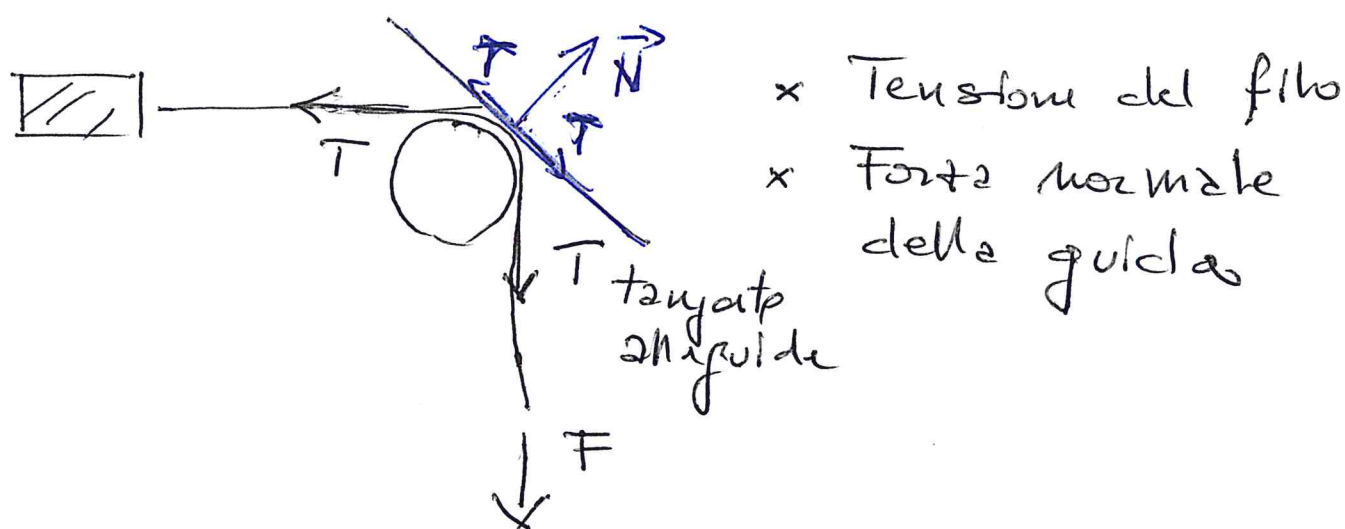
corpo B : $T = m_B a$

$\Rightarrow a = F / (m_A + m_B) \equiv F / m_{\text{tot}}$

$T = \frac{m_B}{m_A + m_B} F < F$ Tensione inferiore a F

Fili e guide (pura di attrito)

(7)



Per $M_{\text{filo}} = 0$, risultante delle forze in ogni punto del filo nulla

Localmente (nel punto), la tensione è diretta lungo la tangente alla guida e $\vec{T} = -\vec{T}$

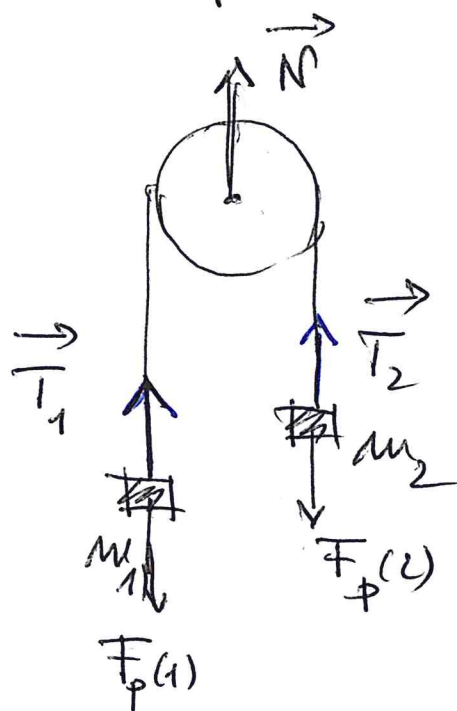
→ $\vec{T}$ si trasmette lungo il filo

- il modulo è costante
- la direzione è lungo il filo

Per trovare il valore di T e N bisogna risolvere il problema dinamico, caso per caso

Nota: Per limitare l'attrito le guide sono spesso equipaggiate mobili (carucole)

Esempio : Macchina di Atwood



$$\vec{T}_1 = \vec{T}_2 = \vec{T}$$

stessa
direzione
e modulo

• Filo inestensibile

→ stessa accelerazione verso
~~direzioni opposte~~

$$\vec{F}_p(1) = m_1 \vec{g}$$

$$\vec{F}_p(2) = m_2 \vec{g}$$

• N sostiene l'equipaggio
ma non agisce su m_1 e m_2

Eq. del moto per m_1 e m_2 (diret. verticale)

$$\begin{cases} m_1 a = m_1 g - T \\ -m_2 a = m_2 g - T \end{cases} \quad (\text{acc. con segno opposto})$$

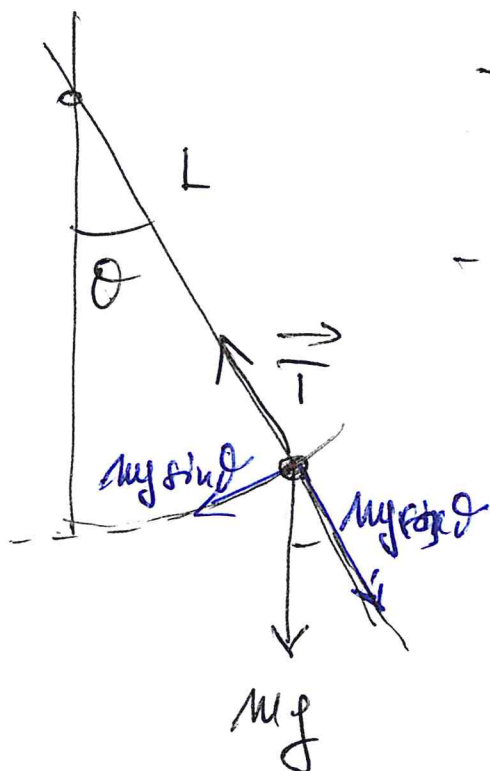
$$\begin{cases} a = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} g \\ T = \frac{2 m_1 m_2}{m_1 + m_2} g \end{cases}$$

- verso l'alto m_2
se $m_1 > m_2$
- verso l'alto m_1
se $m_2 > m_1$

Per $m_1 \simeq m_2$ $a \ll g$, metodo
per misurare a con precisione non limitata
dalla precisione del cronometro (critica nel paragrafo)

Pendolo Semplice

(9)



- Moto circolare con $R=L$
 - filo inestensibile

$$v_T = \frac{d\theta}{dt} L = \omega L$$

$$\vec{v} = \frac{d\theta}{dt} L \hat{u}_\theta$$

$$\vec{a} = \frac{d^2\theta}{dt^2} L \hat{u}_\theta + \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 L \hat{u}_r$$

Acc. TANGENZIALE Acc. RADIALE
 CENTRIFUGA

Forze agenti su m : Tensione + peso del filo

Eq. del moto :

Radiale :

$$\begin{cases} T - mg \cos \theta = m \omega^2 L \end{cases} \quad (*)$$

Tangenziale:

$$\begin{cases} mg \sin \theta = - m L \frac{d^2\theta}{dt^2} \end{cases} \quad (**)$$

(*) Segno dell'acce. centripeta concorde a T

(**) Segno discordi perché la direzione della forza è discorde ~~alla stessa~~ al segno di θ (angoli positivi verso dx)

Risolve (**), che non contiene T (ignota a priori) : (10)

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{L} \sin\theta$$

- Eq. differenziale che lega $\theta = \theta(t)$ alla sua accelerazione. Situazione differente da quelle incontrate nelle analisi dei moti dove abbiamo trovato $x = x(t)$ a partire da $v = v(t)$ o $a = a(t)$ o $v = v(x)$
- Soluzione generale delle eq. diff. $\rightarrow$ Analisi II
- Per ora, conosciamo già le soluzioni di (**) nel limite di θ piccolo ($\theta < 13^\circ$)
 $\rightarrow \sin\theta \approx \theta$ e l'eq. diventa

$$(C.A.S.) \quad \frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{L} \theta$$

- Eq. diff. del moto armonico
- θ prop. alla sua accelerazione

Moto ARMONICO SEMPLICE $\theta = A \cos(\omega_0 t + \varphi)$

(ω_0 = pulsazione $\neq \omega$)

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -A\omega^2 \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

(11)

Sostituendo in (O.A.S):

$$-A \omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi) = -\frac{g}{L} A \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

Valore per ogni fase φ e ogni tempo t se

$$\omega_0^2 = \frac{g}{L}$$

* Frequenza angolare $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{L}}$ (indip. dalla massa)

* Periodo $T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}$

- Freq. angolare e periodo sono definiti dalle condizioni dinamiche e dalla geometria

- l'ampiezza dell'oscillazione A , e la fase iniziale φ dipendono dalle condizioni iniziali del moto

Tensione del filo da E_f (*)

(12)

$$T(\theta) = mg \cos \theta + m v^2 / L$$
$$= mg \cos \theta + m \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 L$$

ove $\theta = \theta(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi)$

$$\frac{d\theta}{dt} = -A \omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi)$$

La soluzione analitica è complicata

$$T(\theta) = mg \cos(\theta(t)) + mA^2 \omega_0^2 L \sin^2(\omega_0 t + \varphi)$$

In termini qualitativi —

$$\omega \text{ è max quando } \theta = 0$$
$$\omega = 0 \text{ quando } \theta = \theta_{\max}$$

perché $\theta = 0 \rightarrow \cos \theta = 1$ è il max
anche per il primo termine — La tensione
del filo è max a $\theta = 0$ e min a $\theta = \theta_{\max}$

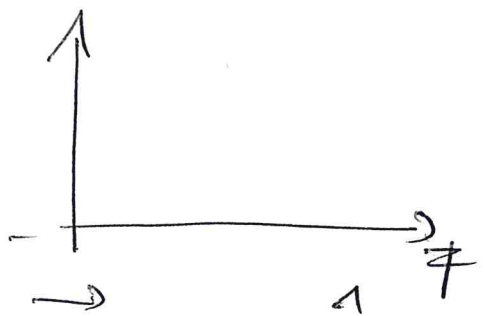
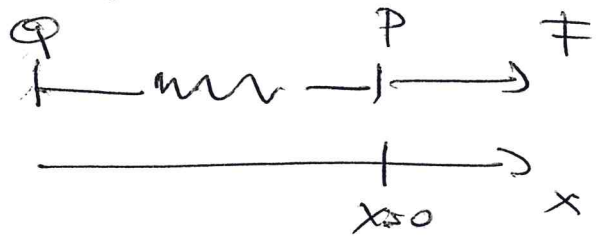
F. Elastica - Empirica

- * Descrive resistenza dei materiali all'azione di forze di trazione e compressione
- * Dovuta alle forze elettriche di coesione interna dei materiali
- * Rappresentazione schematica: molla che si allunga/accorcia sotto l'azione esterna e riprende la propria forma iniziale (configurazione di equilibrio) quando l'azione cessa.
 - Qs proprietà, entro un certo intervallo di intensità della forza, e' comune a tutti i materiali
- * Oss. empirica: relazione tra deformazione Δx e forza F .

* Situazione statica: due forze si due estremi



* Situazione statica semplificata Q = punto fisso (bloccato dell'azione di qualche forza), si studia l'allungamento di P -



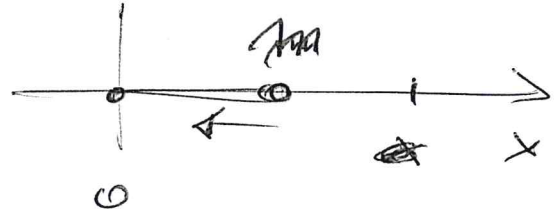
Equilibrium a x con legge $\vec{F}_{ext} = -F_{el}$ in equilibrio $k = \text{costante elastica}$

Moto della molla e del punto materiale (14)
 sotto l'azione della forza elastica (cioè della
 forza di richiamo della molla) -

$$\vec{F} = -kx \hat{u}_x$$

$$m a_x = -kx$$

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx \quad (1)$$



* ~~Nella soluzione~~ Nell'analisi dei moti abbiamo
 trovato $x = x(t)$ e partire da $v = v(t)$ o da $a(t)$
 per integrazione. Oppure da $v = v(x)$.

* ~~qui~~ situazioni differenti:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + kx = 0$$

Eq. differenziale

Legge la variazione di
 $x(t)$ a $x(t)$ -

* Soluzioni generali Analisi II. Alcuni casi
 semplici in questo corso. ~~Per~~ Il risultato
 è chiaro: $\frac{d^2 x}{dt^2} = \text{accelerazione}$
 $x = \text{spostamento}$

Nella (1) acc. $\propto$ spostamento -

Consideriamo più la soluzione: ~~ma~~

Eq. diff. moto armonico semplice

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{k}{m} x = 0$$

$$x = A \cos(\omega t + \varphi)$$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -A\omega^2 \cos(\omega t + \varphi)$$

$$-A\omega^2 \cos(\omega t + \varphi) + A \frac{k}{m} \cos(\omega t + \varphi) = 0$$

$$\Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \text{freq. angolare del moto}$$

$$T = \frac{1}{\omega} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{m}{k}} \quad \text{periodo di oscillazione}$$

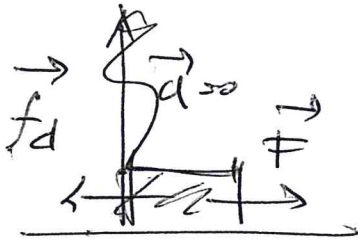
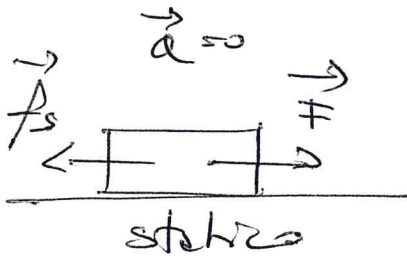
* A e φ sono definiti dalle condizioni iniziali del moto

* ω è definito dalla struttura dinamica

F. Attrito RADENTE

Empirica

(16)



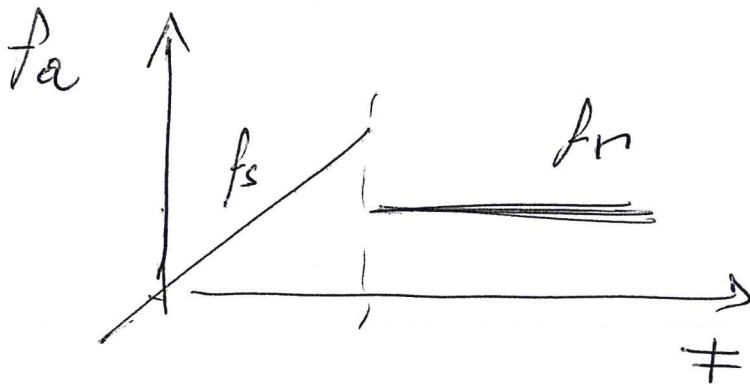
- Aspetti, caratteristiche
superfici

- forza opposta al

SCORRIMENTO DELLE SUPERF

(attenzione non è in generale
opposta al moto)

Relaz. empirica



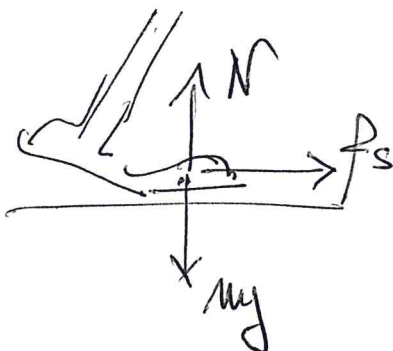
$$1) f_s \leq \mu_s N$$

$$2) f_r = \mu_r N$$

$$(\mu_s \text{ e } \mu_r \leq 1)$$

N = forza normale (attenzione dipende dalla
situazione, non è necessariamente mg)

f_s .



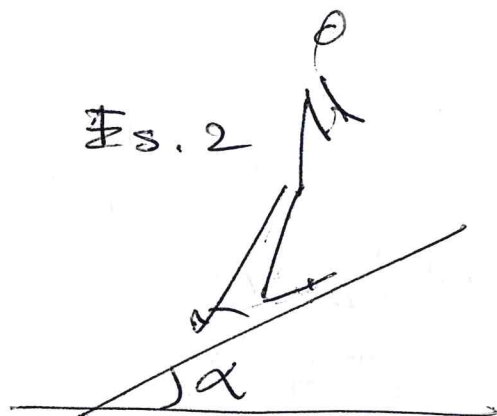
- moto per camminare
dovuto a f_s

- max accelerazione?

$$ma = f_s^{\max} = \mu_s mg$$

$$\boxed{a = \mu_s g}$$

$$\mu_s \leq 1$$



Condizioni per non
scivolare in salita

Trovare $\max \alpha$
per μ_s -

Non scivolare $\Rightarrow$ punto di appoggio in
equilibrio statico $\sum \vec{F} = 0$

$$\vec{N} + \vec{F}_p + \vec{f}_s = 0$$

Asse normale al piano $mg \cos \alpha = N$
Asse parallelo al piano $mg \sin \alpha = f_s$

Angolo max, quando $mg \sin \alpha_{\max} = f_s^{\max} = \mu_s N$

$$\Rightarrow mg \sin \alpha_{\max} = f_s^{\max} = \mu_s mg \cos \alpha$$

$$\mu_s = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \rightarrow \alpha = \arctan(\mu_s)$$

Nota: f_s determina l'accelerazione del camminatore
non è opposta al moto, è opposta allo scivolamento
delle superfici $\rightarrow$ Attoni e restor

Attrito viscoso

18

Legge empirica : $\vec{F}_a = -\gamma \vec{v}$

- Attrito proporzionale alla velocità
- esempio paracadutista e opposto a cui
- caratteristico della ~~ca~~ del moto di oggetti nei fluidi

Osservazioni empirica : una forza esterna $\vec{F}_T$ determina un moto asintotico (a t grande) a velocità costante (v di trascinamento)

$t = 0$ $\begin{array}{c} m \\ \circ \end{array} \xrightarrow{F_T}$ $v_0 = 0$ $a = F_T/m$

$t_1 > t_0$ $\begin{array}{c} F_a \leftarrow \circ \xrightarrow{F_T} \\ m \end{array}$ $v \neq 0$ $a = (F_T - F_a)/m$

$t_2 > t_1$ $\begin{array}{c} F_a \leftarrow \circ \xrightarrow{F_T} \end{array}$

t grande $\begin{array}{c} \xrightarrow{F_T} \\ \xrightarrow{F_a} \end{array} \quad \begin{array}{c} \xrightarrow{F_T} \\ \xrightarrow{F_T} \end{array}$ $v = v_T$ $a = 0$

Equilibrio dinamico

Eq. dinamica del moto viscoso

(19)

$$F_T - \eta v = m a$$

Poniamo $v_T = F_T / \eta$ e $\tau = m / \eta$

Sostituendo e riorganizzando:

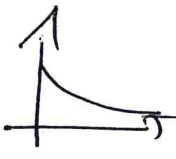
$$v - \frac{F_T}{\eta} = -\frac{m}{\eta} a$$

$$v - v_T = -\frac{dv}{k dt} \quad \text{ossia} \quad \boxed{\frac{dv}{v - v_T} = -k dt}$$

Caso A: $F_T = 0$, $v_0 \neq 0$ (moto proiettile nel benzolo)

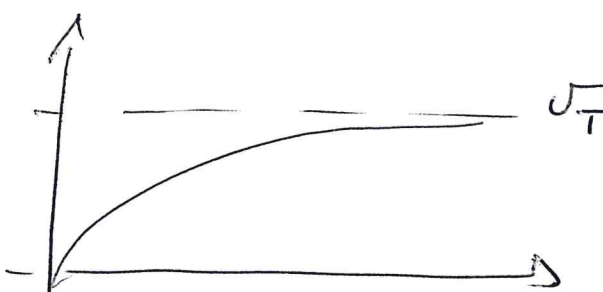
$$\frac{dv}{v} = -k dt \xRightarrow{\text{Integro}} v = v_0 e^{-k t}$$

smorzamento esponenziale



Caso B: $F_T \neq 0$, $v_0 = 0$ (moto di laminamento) (paracadute)

$$\log\left(\frac{v - v_T}{-v_T}\right) = -k t \xRightarrow{\text{Integro}} v - v_T = -v_T e^{-k t}$$

$$v(t) = v_T (1 - e^{-k t})$$


$$v_T = \frac{F_T}{\eta} \quad \text{velocità di laminamento}$$