Moto curvilineo : DESCRIZIONE GENERALE

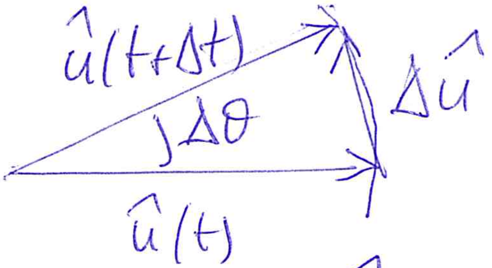
tramite rappresentaz. vettoriale intrinseca

Sia $\vec{a} = a\,\hat{u}_{\parallel}$ un generico vettore.

Possiamo scrivere per la derivata:

$$\frac{d\vec{a}}{dt} = \underbrace{\frac{da}{dt}\,\hat{u}_{\parallel}}_{\text{Componente parallela ad } a} + \underbrace{a\,\frac{d\hat{u}_{\parallel}}{dt}}_{\text{comp. ortogonale}}$$

$$\frac{d\hat{u}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \hat{u}}{\Delta t}$$

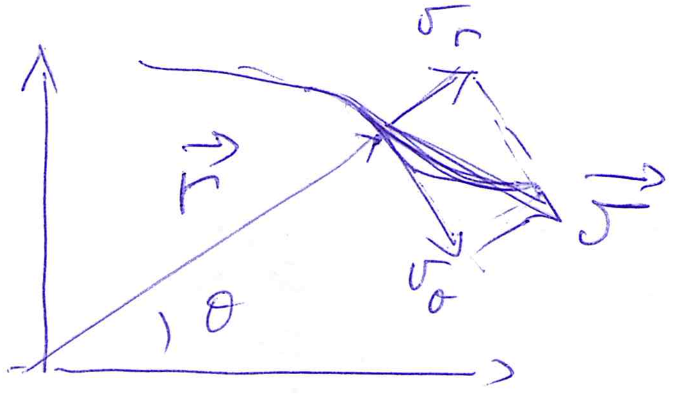


= direzione $\Delta\hat{u}$ ortogonale a $\hat{u}$ nel limite $\Delta t \to 0$ ($\hat{u}(t)$ e $\hat{u}(t+\Delta t)$ paralleli)

= $|\Delta\hat{u}| = \Delta\theta$ — Arco di circonf. di raggio unitario ($|\hat{u}| = 1$)

Dunque $\dfrac{d\hat{u}}{dt} = \dfrac{d\theta}{dt}\,\hat{u}_{\perp}$

Moto curvilineo :



$$\vec{r} = \begin{cases} x(t) \\ y(t) \end{cases} = \begin{cases} R(t) \\ \theta(t) \end{cases}$$

$$\vec{r} = R\,\hat{u}_r$$

$$\vec{v} = \underbrace{\frac{dr}{dt}\hat{u}_r}_{\text{velocità radiale}} + \underbrace{r\frac{d\theta}{dt}\hat{u}_\theta}_{\text{Velocità polare}}$$

La combinazione delle velocità radiale e polare è ~~tg~~ alla traiettoria

* Se $\frac{dr}{dt} = 0$ $\quad r = cost \equiv R$

- MOTO CIRCOLARE

$$\vec{v} = \underline{\omega R}\,\hat{u}_\theta \qquad \text{con } \omega = \frac{d\theta}{dt}$$

<u>velocità angolare</u>

MOTO CIRCOLARE

- $\frac{dr}{dt} = 0 \longrightarrow$ comp. radiale di v è nulla
- comp polare è anche tangente alla traiettoria

Legge oraria (o eq. del moto):

$$\omega = \frac{d\vartheta}{dt} \Longrightarrow \vartheta(t) = \int_0^t \omega\, dt + \vartheta_0$$

MOTO CIRCOLARE UNIFORME:

Si ottiene per $\omega = \text{cost} \equiv \omega_0$

$$\begin{cases} \vartheta(t) = \vartheta_0 + \omega_0 t \\ r(t) = R \end{cases}$$

Acc. nel moto curvilineo e circolare

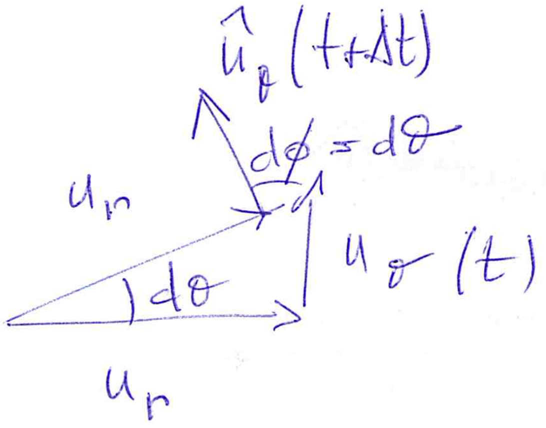
$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \underbrace{\frac{dv}{dt}\hat{u}_v}_{\substack{\text{Parallelo a } v \\ \text{(tang. traiettoria)}}} + \underbrace{v\frac{d\hat{u}_v}{dt}}_{\substack{\text{ortogonale a } v \\ \text{(ortogonale alla} \\ \text{traiettoria}}}$$

$$= \frac{dv}{dt}\hat{u}_v + v\frac{d\phi}{dt}\hat{u}_\perp$$

Nel moto circolare con $R = \text{cost.}$, la velocità è diretta come $\hat{u}_\theta$

$$\vec{a} = \underbrace{\frac{dv}{dt}\hat{u}_\theta}_{\text{TANGENZIALE}} - \underbrace{v\frac{d\theta}{dt}\hat{u}_r}_{\text{Acc. centripeta}}$$

In qs. caso $d\phi = d\theta$



$$\frac{d\hat{u}_\theta}{dt} = -\frac{d\theta}{dt}\hat{u}_r = -\omega\hat{u}_r$$

Dunque, per $R = \text{cost}$

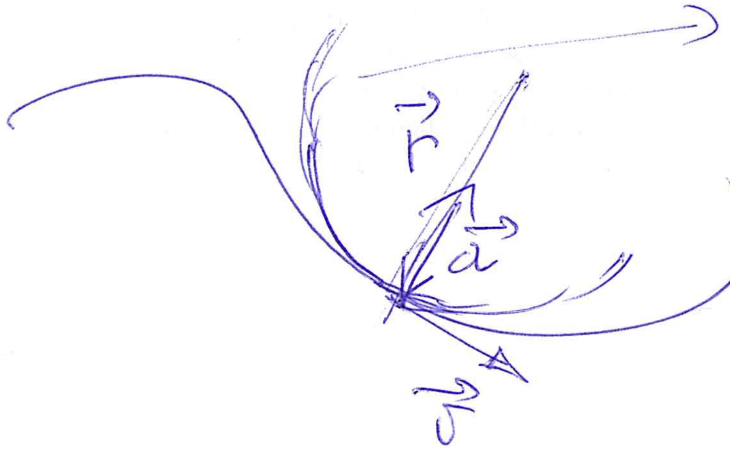
$$\cancel{\vec{a} = \frac{d}{dt}(\omega R)}$$

$$\vec{a} = R\frac{d\omega}{dt}\hat{u}_\theta - \omega R^2\hat{u}_r$$

→ acc. angolare $\frac{d\omega}{dt} = 0$ CIRC. UNIFORME

→ Modulo dell'accelerazione centripeta

Nel caso generale:



Acc. centripeta diretta verso il centro della circonf. osculatrice (tang. alla traiettoria)

- Rapp. del moto circolare in coord. cartesiane

$$\begin{cases} x(t) = R\cos(\omega t + \varphi) \\ y(t) = R\sin(\omega t + \varphi) \end{cases} \qquad \vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j}$$

$$\longrightarrow \vec{v} = \frac{dx}{dt}\hat{i} + \frac{dy}{dt}\hat{j}$$

$$\begin{cases} v_x = -\omega R\sin(\omega t + \varphi) \\ v_y = \omega R\cos(\omega t + \varphi) \end{cases} \qquad v = \left[v_x^2 + v_y^2\right]^{1/2} = \omega R$$

$$\begin{cases} a_x = -\omega^2 R\cos(\omega t + \varphi) \\ a_y = -\omega^2 R\sin(\omega t + \varphi) \end{cases} \qquad a = \omega^2 R$$

$\hookrightarrow$ discorde da $\vec{r}$: centripeta

Esercizio

Diver – piattaforma 10 m

3 rotazioni complete
durante la caduta

Acc. centripeta su testa ($R = 0.5\,m$)?

$$a_c = \omega^2 R$$

$$\langle \omega \rangle = \frac{\Delta \alpha}{\Delta t} = \frac{3 \cdot 2\pi}{t} \qquad t = \text{durata del volo}$$

$$t = \sqrt{2 \Delta h / g} \qquad \left[\frac{1}{2} g t^2 = \Delta h \right]$$

$$\cancel{a_c = \frac{3 \cdot 2\pi}{\sqrt{2 \Delta h / g}}}$$

$$t = \sqrt{2 \cdot 10\,m / 9.8\,m/s^2} \simeq 1.5\,s$$

$$\langle \omega \rangle = \frac{3 \times 2\pi}{1.5}\,s^{-1} \simeq 12\,s^{-1}$$

$$a_c = 144 \cdot 0.5\,m/s^2 = 72\,m/s^2$$

$$\frac{a_c}{g} = \frac{72\,m/s^2}{9.8\,m/s^2}\,g \simeq 7g\,!$$

(12) Salta

Acc. in coordinate polari

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dr}{dt}\hat{u}_r + r\frac{d\vartheta}{dt}\hat{u}_\vartheta\right)$$

→ termini polari (acc. polare)

$$\left[2\frac{dr}{dt}\frac{d\vartheta}{dt} + r\frac{d^2\vartheta}{dt^2}\right]\hat{u}_\vartheta =$$

$$\left[2v_r\omega + r\,\cancel{\alpha}\right]\hat{u}_\vartheta$$

→ termini radiali (acc. centripeta / centrifuga)

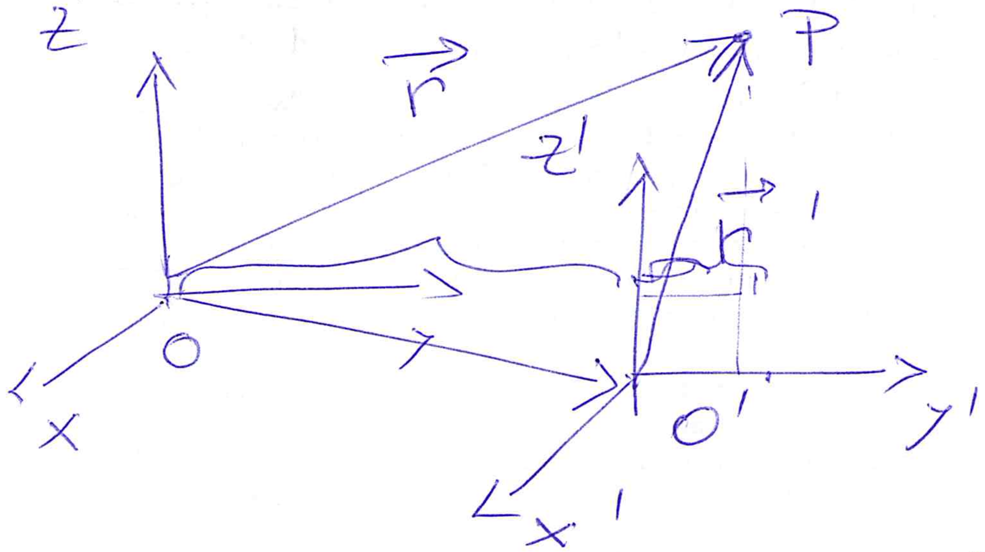
$$\left[\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2\right]\hat{u}_r =$$

$$\left[a_r - \underbrace{r\omega^2}_{\text{Acc. centripeta del moto circ. unif.}}\right]\hat{u}_r$$

Relatività galileiana e comp. delle velocità

* La descrizione del moto (legge oraria) dipende dal sist. di riferimento — Ci sono però caratt. del moto che sono indipendenti dall'osservatore (sist. di rif.), almeno per alcune classi di osservatori —

* Consideriamo il caso di osservatori O e O' traslati (ed in moto relativo)



$$\vec r = \vec{OO'} + \vec{r'} \quad \text{e} \quad \vec{r'} = \vec r - \vec{OO'}$$

$$\begin{cases} x = x_{o'} + x' \\ y = y_{o'} + y' \\ z = z_{o'} + z' \end{cases} \qquad \begin{cases} x' = x - x_{o'} \\ y' = \dots \\ z' = \dots \end{cases}$$

Nonostante le coordinate siano diverse per i due osservatori, l'invarianza delle relazioni vettoriali garantisce $\Delta\vec{r} = \Delta\vec{r}'$

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = (\vec{r}_2' + \vec{OO'}) - (\vec{r}_1' + \vec{OO'})$$
$$= \vec{r}_2' - \vec{r}_1' = \Delta\vec{r}'$$

→ spazio assoluto nella meccanica classica: le lunghezze dei segmenti non dip. dall'osservatore (e dal suo stato di moto).

<u>Caratteristiche</u> del moto:

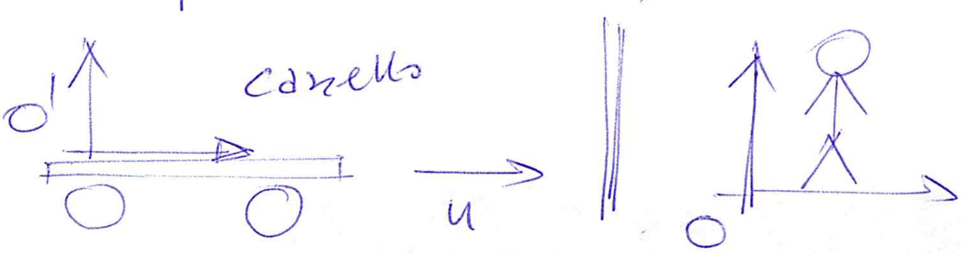
$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} =$$
$$= \frac{d}{dt}(\vec{r}' + \vec{OO'})$$
$$= \frac{d}{dt}r' + \frac{d\,\vec{OO'}}{dt}$$

Posso scrivere: $\vec{v} = \vec{v}' + \vec{v}_{OO'}$

LEGGE DI COMP. DELLA VELOCITA' DI GALILEO

Esempio (monodim)

cancello



$v_{O'} = -u$ il cancello va verso O' per O'

il carrello va verso O per O

Nota: Nella derivazione della legge di composizione delle velocita' di Galileo si e' assunto che O e O' misurino lo stesso intervallo di tempo: $dt = dt'$

→ tempo assoluto indip. dall'osservatore

Anche se osservatori diversi non misurino la stessa velocita', tutti gli osservatori con ~~veloci~~ moto relativo rettilineo uniforme ($\vec{v}_{OO'} = cost$) riconoscono la stessa caratteristica di moto ai moti rettilinei uniformi — cioe'

se $\vec{v} = cost$ per O

$\vec{v}' = cost$ per O'

La "quiete" è tale solo per un osservatore, la caratt. di moto rettilineo unif. e' condivisa da tutti gli osservatori

Caratt. del moto i accelerazione

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{v'}}{dt} + \frac{d\vec{v}_{oo'}}{dt}$$

$$\vec{a} = \vec{a'} + \vec{a}_{oo'}$$

Se gli osservatori sono in moto $\overset{\text{relativo}}{\text{rett.}}$ uniforme

$v_{oo'} = \text{cost} \qquad \frac{d\vec{v}_{oo'}}{dt} = 0$

$\Longrightarrow \vec{a} = \vec{a'} \longrightarrow$ moti accelerati ~~h~~anno la medesima caratteristica per tutti gli osservatori a $\vec{v}_{oo'} = \text{cost}$

L'acc. è una proprietà del moto condivisa da tutti gli oss. in moto relativo rett. unif.

Lo studio di un moto non consente ad un osservatore di stabilire se egli si trova in quiete o in moto rettilineo unif. rispetto al moto osservato (e alle sue cause)

$\longrightarrow$ significato prof. dell'accelerazione