LEZIONE 1 2G

GRANDEZZE SCALARI E VETTORIALI

Grandezza scalare è completamente caratterizzata da una "scala" (valore) in rapporto ad un'unità di misura —
Questa definizione corrisponde alle grandezze fisiche (= grandezze misurabili) dinamiche, fino ad ora.
Alcune grandezze fisiche ~~(o elementi~~ ~~fisici~~ matematici ~~ottenuti~~ ~~dalla d~~) richiedono ulteriori elementi per una caratterizzazione completa. Esempio:

Spostamento —
non è sufficiente (in generale) dire mi sono spostato di 1 m e poi di un altro metro, per sapere dove sono finito

Bisogna indicare una

× direzione
× verso
× punto di applicazione

Il punto di applicazione non è un elemento necessario nella definizione del vettore come ente matematico, ma occorre per il vettore fisico
Es. Forza applicata a maniglia o centro porta

Algebra vettoriale

① Prodotto per uno scalare

$$\vec b = m\,\vec a$$

$$\begin{cases} |\vec b| = m\,|\vec a| \\ \text{direzione identica} \\ \text{verso concorde/discorde a seconda del segno di } m \end{cases}$$

$\vec b = m\vec a$ $\quad \vec a \quad$ $m = -0.5$

② Vettore opposto

$$\vec b = -\vec a$$

(prodotto scalare -1)

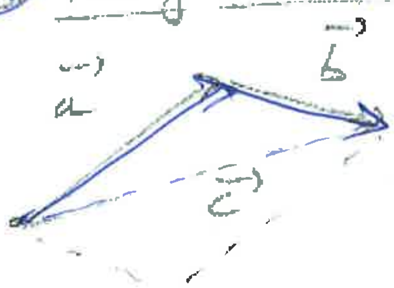
③ Versore

$$\vec a = a\,\vec u$$

$$\begin{cases} a = |\vec a| & \text{con segno legato al verso} \\ \vec u & \text{direzione } \cancel{\text{e verso}} \\ |\vec u| = 1 \end{cases}$$

Rapp. in tabelle

④ Regola di somma



$$\vec c = \vec a + \vec b$$
$$\vec c = \vec b + \vec a$$

commutativa

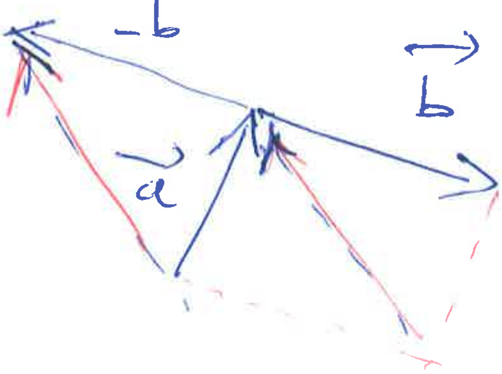
Completa la definizione di vettore:

- caratterizzato da modulo, direzione e verso
- risponde alla regola di somma descritta

[devo poter definire delle operazioni]

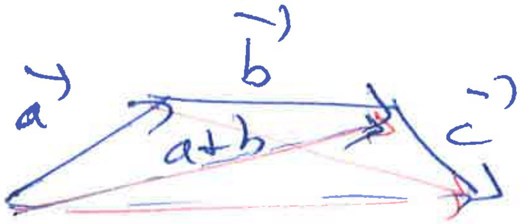
(5) Differenza tra vettori

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + \underbrace{-1(\vec{b})}_{\text{vettore opposto}}$$



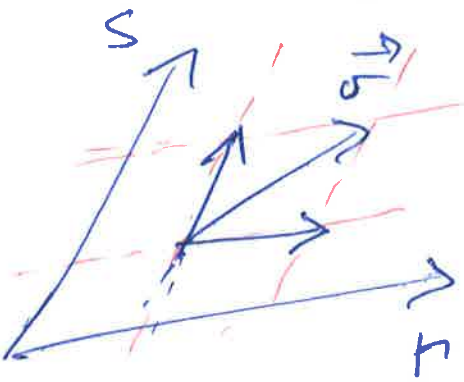
oppure parallelogramma con diagonale "sbagliata" e punta "girata"

(6) Proprietà associativa



$$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$$

(7) Scomposizione su assi



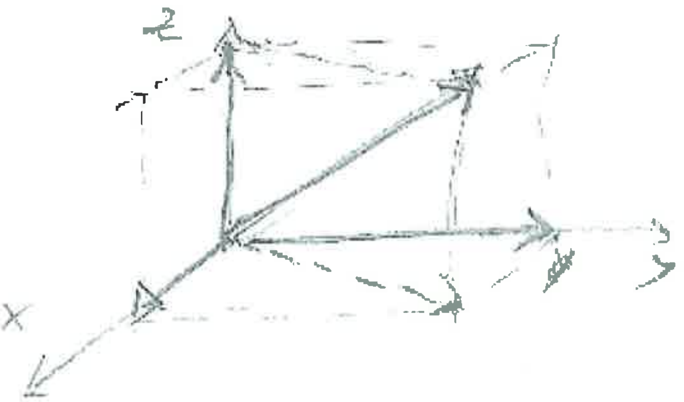
Per la regola di somma

$$\vec{v} = v_r \hat{u}_r + v_s \hat{u}_s$$

Più in generale la scomp. può essere su tre assi (nello spazio)

Caso più freq. → scomp in assi cartesiani —

8 Scomposizione in assi cartesiani



$$\vec{v} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k}$$

i, j, k = versori degli assi cartesiani

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$$
$$\vec{b} = b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}$$

$$\vec{a} + \vec{b} = a_x \vec{i} + \dots \quad b_z \vec{k} =$$

$$= (a_x + b_x)\vec{i} + (a_y + b_y)\vec{j} + (a_z + b_z)\vec{k}$$

Le componenti si sommano (o si sottraggono) per uno scalare
Le componenti "scalano" nel caso di prodotto

La ~~scomposizione~~ dipende dalla scelta del sistema di riferimento. Vi sono proprietà invarianti?

→ è arbitraria e posso sceglierlo con comodo

La rappresentazione di un vettore non richiede un sistema di riferimento (disegnare un segmento orientato non richiede ~~un riferimento~~ il supporto di un sistema di riferimento)

Modulo e direzione rispetto agli assi

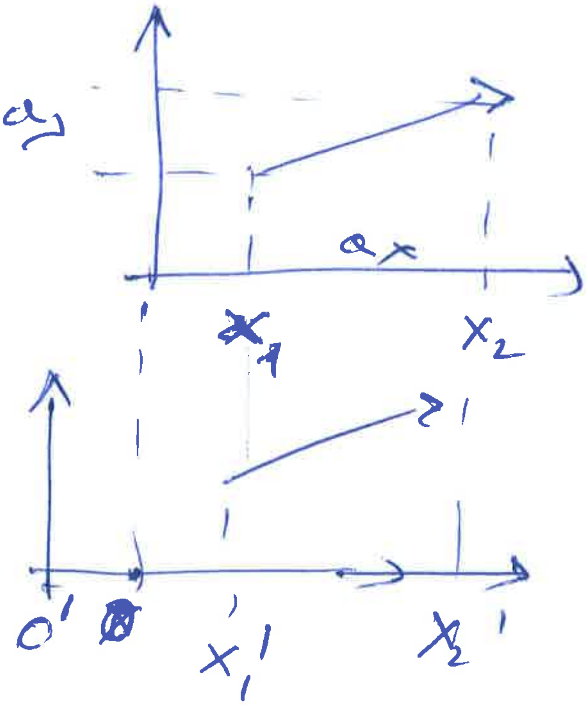
$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

$$\begin{cases} v_x = v \cos \vartheta \\ v_y = v \sin \vartheta \end{cases} \qquad \operatorname{tg} \vartheta = \frac{v_y}{v_x}$$

- Le relazioni vettoriali hanno validità indip. del sist. di rif., anche se un vettore si esplicita nelle sue comp.

1) L'op. di collegare un punto a un altro non richiede il supporto di un sist. di rif.
2) Le operazioni definite sono invarianti
3) Il modulo (comp. scalare) e le direzioni relative sono invarianti

TRASLAZIONE



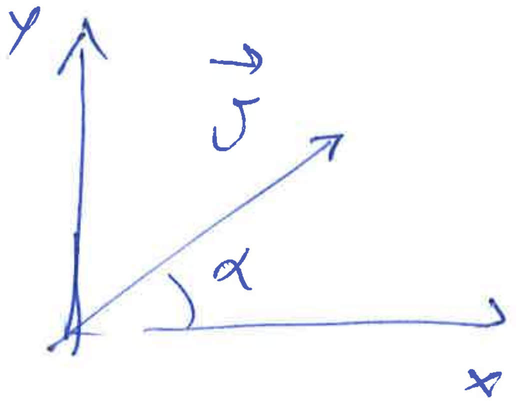
$$a_x = x_2 - x_1$$

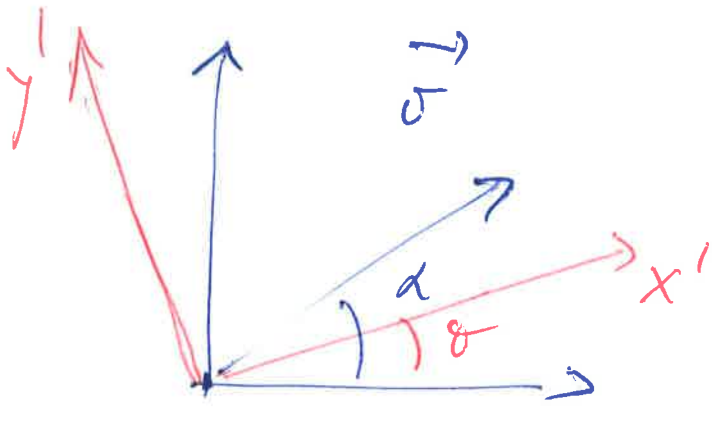
$$x_1' = x_1 + OO'$$
$$x_2' = x_2 + OO'$$
$$x_2' - x_1' = x_2 - x_1$$

E così anche per la comp. y -

- Quindi il vettore ha lo stesso modulo nei due rif. -
- Due vettori hanno la stessa direzione relativa (serve il prodotto scalare per dim.)

ROTAZIONE DI ASSI





$$v_x = v \cos\alpha$$
$$v_y = v \sin\alpha$$

$$v_x' = v \cos(\alpha - \theta)$$
$$v_y' = v \sin(\alpha - \theta)$$

$$\sigma_x' = \sigma \cos\alpha \cos\vartheta + \sigma \sin\alpha \sin\vartheta$$
$$\sigma_y' = -\sigma \cos\alpha \sin\vartheta + \sigma \sin\alpha \cos\vartheta$$

$$\sigma_x' = \sigma_x \cos\vartheta + \sigma_y \sin\vartheta$$
$$\sigma_y' = -\sigma_x \sin\vartheta + \sigma_x \cos\vartheta$$

$\longmapsto$ trasf. delle componenti di un vettore sotto rotazione

$\longrightarrow$ Dim. che il modulo è invariante (la lungh. del segmento non è cambiata)

$$\sigma' = \sqrt{\sigma_x'^2 + \sigma_y'^2} = \sqrt{(\sigma_x \cos\vartheta + \sigma_y \sin\vartheta)^2 + (-\sigma_x \sin\vartheta + \sigma_y \cos\vartheta)^2}$$

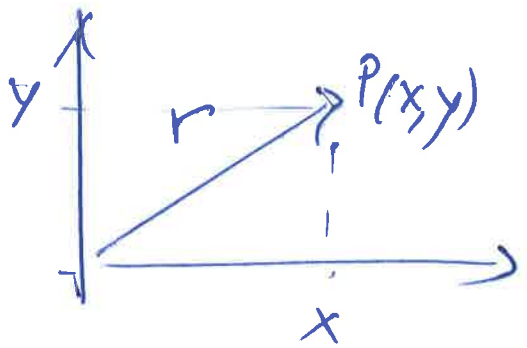
$$= \sqrt{\sigma_x^2(\cos^2\vartheta + \sin^2\vartheta) + \sigma_y^2(\cos^2\vartheta + \sin^2\vartheta)} + \text{doppi prodotti si elidono}$$

$$= \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2} = \sigma$$

$\longrightarrow$ Direzioni relative di due vettori sono anche preservate (l'angolo compreso non dip. dalla rotazione)

Nota: un raggio vettore che individua un punto di coord: (x, y) unisce l'origine con (x, y)

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j}$$



Si trasforma per rotazione di assi come un vettore qualunque - Dunque il cambio di coordinate è descritto dalle medesime ~~descrizione~~ trasformazione -

$$\begin{cases} x' = x\cos\theta + y\sin\theta \\ y' = -x\sin\theta + y\cos\theta \end{cases}$$

Le componenti dei vettori si trasformano come le coordinate nel cambio di un sistema di riferimento

$\Longrightarrow$ I vettori sono COVARIANTI