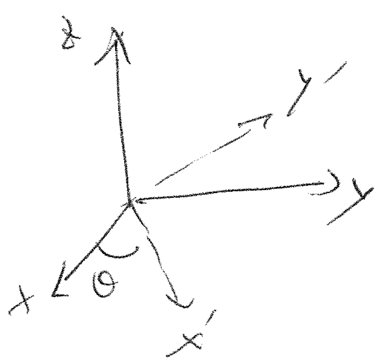
Quadrivettori e invarianti relativistici

~~Nella notazione vettoriale la posizione~~

In meccanica classica la posizione di un punto è descritta nello spazio 3D dalle coordinate (x, y, z) ad un tempo t

Per un diff. osservatore, con assi ruotati attorno a z



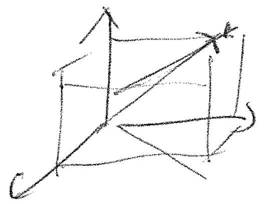
$$\begin{cases} x' = x\cos\theta + y\sin\theta \\ y' = -x\sin\theta + y\cos\theta \\ z' = z \end{cases}$$

le coordinate x e y sono "mescolate".
La natura dell'oggetto tuttavia è invariata e il nostro cervello è "abituato" a percepire come il medesimo oggetto visti da posizioni diverse (x, y mescolati). Né diamo a x e y significato differente (profondità e larghezza sono misurate con le stesse unità di misura)

~~Le trasf. di Lo~~ Nello spazio ordinario

$\Delta l = (\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2)^{1/2}$ è invariante per rotazioni (e seguentemente Δt è inv.)

Possiamo individuare in (x, y, z) le <u>compon.</u> di un raggio vettore —



Abbiamo definito vettori grandezze fisiche con proprietà di trasf delle componenti identiche a quelle di (x, y, z)

→ Proprietà direz. relative e modulo <u>inv.</u>

$\vec{a} \cdot \vec{b} = a\, b \cos\theta$ ← inv.

$\sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}} = \sqrt{a^2} = |\vec{a}|$ ← inv.

Le trasformazioni di Lorentz sono analoghe a l :

$$\begin{cases} t' = \gamma\left(t - \dfrac{\beta x}{c}\right) \\ x' = \gamma(x - v t) \end{cases} \Bigg\} \text{ mescolamento di } x \text{ e } t$$

$$\begin{cases} y' = y' \\ z' = z' \end{cases}$$

Poiché non abbiamo "esp. comune" di fenomeni relativistici, il nostro cervello non è strutturato per percepire i modo immediato il mescolamento di x e t, ma possiamo evidentemente interpretare

Le trasformazioni di Lorentz come una "pseudorotazione" in 4D

(non è una rotazione di assi a rigore: ~~le~~ la trasf. non coinvolge angoli, ma una relazione algebrica) — x e ct sono la stessa "grandezza"

Possiamo rendere ancora più evidente l'om. con la ~~trasf.~~ scritte come

$$x' = \gamma(x - vt) \longrightarrow \begin{cases} x' = \gamma x - \gamma\beta\, ct \\ ct' = \gamma(ct) - \gamma\beta\, x \end{cases}$$

$$t' = \gamma t - \frac{\gamma\beta}{c} x$$

omogenea a x, y, z

$$\begin{bmatrix} t' \\ x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

ma non serve

Per semplicità è naturale porre $c = 1$ rendendo t e x grandezze omogenee (d'altronde nel misuramento di x e y, non vi poniamo un fattore di scala → ~~spiego piedi~~

se misurassimo x in piedi
y in miglia

in quei rotazioni avremmo la complicazione di riottenere le unità di misura

Nel 4D, $\Delta \ell$ e Δt non sono inv. di Lorentz.

$$(ds')^2 = (dt')^2 - (dx')^2 =$$

$$= (\gamma dt - \gamma\beta dx)^2 - (\gamma dx - \gamma\beta dt)^2 =$$

$$= \gamma^2(1-\beta^2)dt^2 - \gamma^2(1-\beta^2)dx^2 + \cancel{\text{doppio}} - \cancel{\text{doppio}}$$

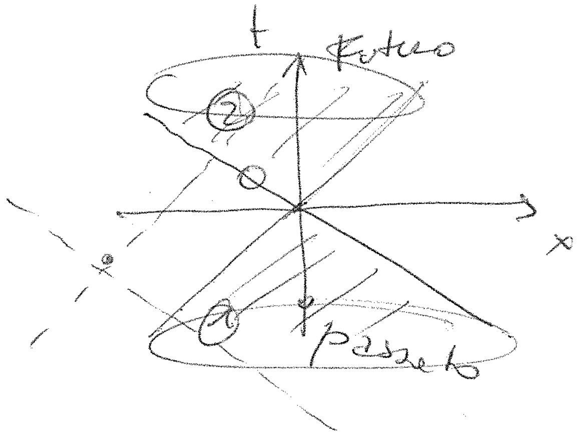
$$= dt^2 - dx^2$$

Intervallo ds e' invariante relativistico; questa q.tà e' equivalente al $d\ell$ della geom. euclidea ~~ispaz~~ Tuttavia nella geom. spazio-tempo e ds^2 puo' essere positivo e negativo:

$ds^2 < 0$ Intervallo di tipo spazio
Evt con $dt = 0$
in punti diff., ma ~~mai eventi~~ per nessun SRI
$ds = 0$ ~~anals~~ —

$ds^2 > 0$ Possono avere evt nello stesso pto $ds = 0$, ma per nessun SRI $dt = 0$

Rapp. grafica:



Per un evento $O = O(x, y, z, t)$ lo spazio-tempo è diviso in tre regioni dal <u>cono di luce</u> che delimita la regione tipo tempo ($ds < 0$) da quelle tipo spazio

- ~~Un pu~~ I punti sull'asse t, rapp. eventi passati ~~e futuro~~ ($dt < 0$) e futuri ($dt > 0$)

- Eventi nel cono $\Delta t < 0$, possono det. (avere det.) effetti che influenzano il presente di O
- O può det. eff. su punti nel cono futuro

- La regione esterna al cono non può aver influenzato <u>O</u>, poiché richiederebbe $v > c$. Può inf. nel futuro (esempio a-centauri)

- Eventi "simultanei" $dt = 0$ sono separati spazialmente da O ($dl > 0$ e $ds < 0$) e non possono influenzare O

Quadrivettori.

L'insieme delle coordinate di un evento nello spazio-tempo può essere visto come le componenti di un "raggio vettore" nello spazio 4D

$$x_\mu = (ct;\, x, y, z)$$

~~Kappa di modulo $s^2 = ct^2 - x^2 - y^2 - z^2$~~
~~Definisco prodotto scalare~~

~~x_μ~~ ha
Di modulo quadro $s^2 = ct^2 - x^2 - y^2 - z^2$

che è Lorentz-invariante
(rappresenta l'intervallo tra x_μ e $(0;0,0,0)$)

* In analogia a 3D, si definisce quadri-vettore ogni insieme di quattro grandezze

$$A_\mu = (A_0, A_1, A_2, A_3)$$

che si trasforma come x_μ sotto trasf. di Lorentz.

- Possiamo def. prod. scalare

$$A_\mu \cdot B_\mu = A_0 B_0 - A_1 B_2 - A_2 B_2 - A_3 B_3$$

da cui

$$|A_\mu| = A_\mu A_\mu = A_0^2 - A_1^2 - A_2^2 - A_3^2 \quad \Big\} \text{ modulo}$$

Poiché A_μ si trasf. come x_μ, prod. scalare e modulo sono inv. di Lorentz

Il quadrivettore Energia - momento (quadrivelocità)

$$p_\mu = \left(\frac{E}{c}, p_x, p_y, p_z\right)$$

si trasforma come x_μ -

Dim. (teniamo $c = 1$):

$$E = \frac{m_0}{\sqrt{1 - w^2}}$$

$$\vec{p} = \frac{m_0}{\sqrt{1 - w^2}} \vec{w}$$

scegliamo rif S' con velocità relativa $\vec{v} \parallel \vec{w}$ ed equiversa ~~e calcoliamo le espressioni di E' e p'~~ a partire da E e p. Per la scelta di S', non dobbiamo occuparci delle comp. trasverse che sono ovviamente invarianti

Calcolo di E' (mantengo $c = 1$)

$$E' = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v'^2}}$$

con $v' = \frac{w - v}{1 - wv}$.

Da cui $v'^2 = \frac{w^2 - 2vw - v}{1 - 2wv + (wv)^2}$

$$1 - v'^2 = \frac{1 - \cancel{2wv} + (wv)^2 - v^2 - w^2 + \cancel{2wv}}{(1 - wv)^2} =$$

$$= \frac{(1-v^2)(1-w^2)}{(1-wv)^2}$$

$$E' = \frac{m_0}{\sqrt{1-w'^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}\left(\frac{m_0}{\sqrt{1-w^2}} - \frac{m_0 w v}{\sqrt{1-w^2}}\right)$$

$$= \gamma (E - v p_x)$$

calcolo di p'_x :

$$p'_x \equiv p' = \frac{m_0 v'}{\sqrt{1-v'^2}} = E' v'$$

$$= \frac{m_0 v'}{\sqrt{1-w'^2}} = m_0 \frac{\cancel{(1-vw)}}{\sqrt{1-v^2}\sqrt{1-w^2}} \cdot \frac{w-v}{\cancel{(1-vw)}}$$

$$= \gamma (p_x - vE)$$

$\longrightarrow$ Energia e ~~momento~~ p_x si trasformano risp. come t e x sotto trasf. di Lorentz

$\longrightarrow$ Possiamo identificare

$$p_\mu = (E, p_x, p_y, p_z)$$

Affinché una relazione tra quadrivettori sia soddisfatta, devono essere soddisf. cont. le relazioni per tutte le comp.

Cons. di energia e momento $\Rightarrow$ cons. del quadrimomento. In relatività le conservazioni associate poiché x e t sono mescolate da Lorentz.

Modulo del quadrimom. è invariante di Lorentz

$$p_\mu^2 = E^2 - p^2 \qquad (*)$$

Poiché (*) vale in tutti i SRI, nel caso di corpo (particella) di massa m_0 vale anche nel sist. comovente con la particella (cioè $v = 0$). Ivi $p = 0$, $E_K = 0$, $E = m_0$

Si ricava:

$$E^2 - p^2 = m_0^2$$

$\leftarrow$ massa della particella

In interazioni (collisioni / disintegrazioni) si deve conservare p_μ del sistema

$$\sum_i p_{\mu,i} = \sum_f p_{\mu,f}$$

Quindi

$$p_\mu^{TOT} = \left(\sum_j E_j, \sum_j p_{x,j}, \text{---}\right)$$

quadrimom. totale

$$p_\mu^{TOT} = p_\mu^1 + p_\mu^2 + \dots$$

$$= (E_1 + E_2 + E_3 + \dots ; p_{x1} + p_{x2} + p_{x3} + \dots ; ;)$$

È ancora un quadrimomento, quindi la quantità

$$\left(\sum_j E_j\right)^2 - \left(\sum_j \vec{p}_j\right)^2 = m^{*2}$$

detta <u>massa invariante</u> di un sistema è un invariante di Lorentz.

m^* può coincidere o meno con la massa di una ~~stato~~ particella reale

— o —

Qs. relazione dimostra il risultato ottenuto per "estensione analogica" da

$$E^2 - p^2 = m_0^2$$

~~dedotto~~ derivato nella lezione precedente da $p^2 = (\gamma m v)^2$ con qualche manipolazione

Trasf. Lorentz utili per calcolo distrib. di energia e mom. in processi di collisione e decadimento di particelle

$$\begin{cases} E' = \gamma E - \gamma\beta p_{\parallel} \\ p'_{\parallel} = \gamma p_{\parallel} - \gamma\beta E \\ p'_{\perp} = p_{\perp} \end{cases} \qquad \begin{cases} E = \gamma E' + \gamma\beta p'_{\parallel} \\ p_{\parallel} = \gamma p'_{\parallel} + \gamma\beta \cancel{E'} \end{cases}$$

inoltre se nel Lab E, p — nel sistema comov. (particella a riposo $E' = m_0$ e $p' = 0$)

Da $E = \gamma E' + \gamma\beta p'_{\parallel} \implies m_0 = \gamma E'$

$$\gamma = \frac{E_{Lab}}{m_0} \qquad \cancel{e\ \gamma\beta = \frac{p_{Lab}}{E_{Lab}}}$$

Da $p_{\parallel} = \gamma p'_{\parallel} + \gamma\beta E'$

$$p_{\parallel} = \gamma\beta \frac{E_{lab}}{\gamma} \implies \beta = \frac{p_{LAB}}{E_{Lab}}$$

Esempio $\pi^0 \longrightarrow \gamma\gamma$

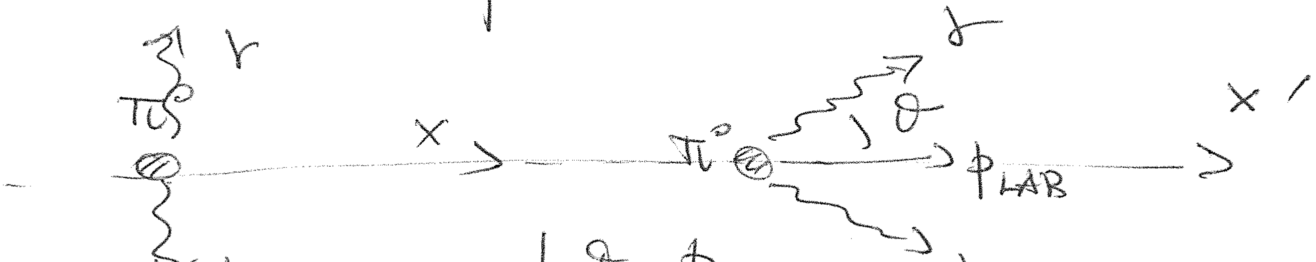
Calcolare l'angolo tra i fotoni nel Lab

se $p_\pi(LAB) = 14$ GeV

$m_\pi = 0.14$ GeV

Assumendo che i fotoni siano prodotti a 90° rispetto a $\vec{p_\pi}$

Nel sist. di riposo del π^0



$tg\,\theta = \frac{p_T}{p_L}$

Nel sist. riposo del π^0: $p_\gamma(1) = p_\gamma(2)$

cons. del momento $p_\perp(1) = p_\perp(2)$

$p_\parallel(1) = p_\parallel(2) = 0$

Poiché $m_\gamma = 0$ $p_\gamma = E_\gamma$

Cons. energia! $2E_\gamma = m_{\pi^0}$ $(E_k(\pi^0) = 0)$

$E_\gamma = m_{\pi^0}/2$

~~Trasf. di Lorentz (boost)~~ $\cancel{\gamma = \frac{E_\pi}{m_\pi} = 100}$

$\cancel{\beta \simeq 1}$

Nel sistema del Lab. (fisso)

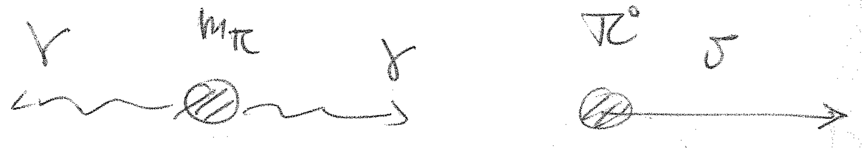
$$\begin{cases} E_\gamma' = \gamma\,(E_\gamma + \beta\, p_{\parallel}) \\ p_{\parallel}' = \gamma\,(p_{\parallel} + \beta E) \end{cases}$$

con $\gamma = \dfrac{E_\pi}{m_\pi} = 100$

$\beta = 1 - \dfrac{1}{\gamma^2} \simeq 1$

$$\begin{cases} E_\gamma' = 100\, E_\gamma & (p_{\parallel} = 0) \\ p_{\parallel}' = 100\, E_\gamma & \leftarrow \text{boost di Lorentz} \\ p_T' = p_T = E_\gamma \end{cases}$$

$$\operatorname{tg}\vartheta = \frac{p_T'}{p_L'} = \frac{E_\gamma}{100\, E_\gamma} = \frac{1}{100}$$



nel lab il pione ha velocità v

Nel rif. del π a riposo

$$E_\gamma = m_\pi/2$$

$$p_L = \pm E_\gamma/2$$ componente longitudinale

— Energia e momento dei γ nel laboratorio

$$E_\gamma^{lab} = \gamma E_\gamma \pm \gamma\beta p_L = \gamma \frac{m_\pi}{2}(1 \pm \beta) > 0$$

$$p_L^{lab} = \pm\gamma p_L \pm \gamma\beta E_\gamma = \gamma \frac{m_\pi}{2}(\beta \pm 1) \begin{cases} > 0 & \beta+1 \\ < 0 & \beta-1 \end{cases}$$

— Per qualunque valore di β, uno dei due fotoni ha sempre direzione ~~negativa~~ opposta ~~da~~ ~~rispetto~~ alla direzione di volo del π nel sist. del laboratorio

— ~~Non~~ Troviamo le velocità:

$$v_\gamma = \frac{p_L^{lab}}{E_\gamma^{lab}} = \frac{1 \pm \beta}{\beta \pm 1} = \pm 1 \quad \text{(in unità di c)}$$

Indipendentemente da quanto veloce sia il π^0 nel SRI del lab., I fotoni di massa nulla si muovono sempre a velocità c e nelle direzioni iniziali