Revisione leggi della dinamica (1)

— Richiami

1) $\vec{p} = \gamma m_0 \vec{v}$ $\qquad \gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$

2) $E_k = m_0 c^2 (\gamma - 1)$

Abbiamo visto che è possibile interp. il risultato in termini $\vec{F}$ — non dà $\vec{a}$, ma aumenta massa — $m = \dfrac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$

$$m \simeq m_0 + \frac{1}{2} m_0 \frac{v^2}{c^2} + \dots$$

Con $\Delta m\, c^2 = \underbrace{\frac{1}{2} m v^2 + \dots}$

Energia cinetica: aumento della massa × $c^2$ → grandezza omogenea all'energia

In questi termini massa equiv. en. e possiamo scrivere 2) come

$$\underbrace{\gamma m_0 c^2}_{\text{En. totale}} = m_0 c^2 + E_k$$

En. di ... En. cinetica

Perché se $v=0$, $\gamma=1$

$$E_0 = m_0 c^2 \qquad E_K = 0$$

- L'energia di un corpo non è nulla per $v=0$, ma esiste un'energia di massa

- Nota: $E, p$ dip. dall'osservatore

Nel riferimento solidale con la particella o corpo (sist. rif. COMOVENTE) $v=0$

$$\left.\begin{array}{l} E = m_0 c^2 \\ \vec{p} = 0 \end{array}\right\} S$$

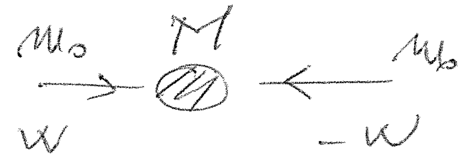
Se un osservatore si muove con vel $v$ risp. a part., allora $v$ $(-\vec{v})$ è la velocità della part. nel sist $\underline{S'}$ trasf. di Lorentz

$\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$ $\rightsquigarrow$ stesso $\gamma$ di $E, p$

$$\left.\begin{array}{l} E = \gamma m_0 c^2 \\ p = \gamma m_0 \vec{v} \end{array}\right. \rightsquigarrow \boxed{\gamma = \frac{E}{mc^2}}$$

termini della trasf. di Lorentz $\boxed{\beta = \dfrac{pc}{E}}$

<u>Lezione prec.</u>: Urto anelastico → conversione di energia in massa:




Si è dimostrato che $M = 2m_w = 2m_0/\sqrt{1-w^2/c^2}$

o in altri termini $Mc^2 = 2m_0c^2 + E_k(1) + E_k(2)$

Si hanno anche processi (spontanei) con conversione di massa in energia

<u>Esempio: Decadimento $\alpha$</u>

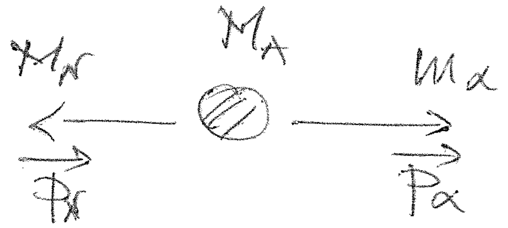
Conversione di un nucleo $(A, Z)$ di massa $M_A$ in un nucleo $(A-4, Z-2)$ di massa $M_N$ e una particella $\alpha$ (nucleo di $^4_2He$).

Calcoliamo le relazioni tra energia, massa e q.tà di moto scegliendo <u>SRI in cui $M_A$ è fermo</u>

[Tutti SRI sono equivalenti, scegliamo q.s. perché rende il processo semplice da analizzare]

Poiché $M_A$ è fermo $\vec{P}_A = 0$. Per conservazione della q.tà di moto $\vec{P}_{tot}$ nello stato finale è nullo

→




$$\vec{p}_N + \vec{p}_\alpha = 0$$

$$p_N = -p_\alpha$$

Conservazione dell'energia:

$$\underbrace{M_A c^2}_{\text{en. di massa}} = \underbrace{E_N + E_\alpha}_{\text{energie totali}} \qquad (*)$$

en. di massa poichè $E_K = 0$ nel riferimento in cui A è fermo

$$E_N = m_N c^2 + E_K(N)$$
$$E_\alpha = m_\alpha c^2 + E_\alpha(N)$$

Sostituendo in (*)

$$E_K(N) + E_K(\alpha) = \underbrace{(M_A - m_N - m_\alpha)c^2}_{\text{Eccesso di massa} = \Delta M c^2}$$

Se $\Delta M c^2$ (detto Q-valore della transizione) è $\Delta M c^2 > 0$ $\longrightarrow$ decadimento spontaneo con conversione di massa in energia cinetica

Per i decadimenti $\alpha$:

$$\left.\begin{array}{l} Q \simeq 10\ \text{MeV}/c^2 \\ m_\alpha \simeq 4\ \text{GeV}/c^2 \\ m_N \simeq 100\text{-}200\ \text{GeV}/c^2 \end{array}\right. \Longrightarrow \gamma = \frac{mc^2 + E_K}{mc^2} \simeq 1$$

Dunque i prodotti di decadimento hanno $v \ll c$ ($\beta \ll 1$) e possono essere trattati (in qu. caso) nel limite non relativistico:

$$E_K = \frac{1}{2} m_0 v^2 = \frac{1}{2} \frac{p^2}{m_0}$$

D'altronde $p_N = -p_\alpha$, e quindi

$$E_K(N) + E_K(\alpha) = \Delta M c^2$$

$$\frac{1}{2}\frac{p_\alpha^2}{m_N} + \frac{1}{2}\frac{p_\alpha^2}{m_\alpha} = \Delta M c^2$$

Da cui si ricava $p_\alpha$ —

Si può anche notare che poiché $m_N \gg m_\alpha$ $E_K(\alpha) \gg E_K(N)$ e cioè, in qu. esempio, $E_K(\alpha) \simeq \Delta M c^2$ e $E_K(N) \simeq 0$

* Nel caso generale non si può ricorrere al limite non relativistico per i prodotti di una collisione o di un decadimento. Occorre stabilire una relazione generale (relativistica) tra $E$, $p$ e $m_0$.

→ ~~RELAZIONE DI DISPERSIONE~~:

Manipoliamo $\vec{p} = \gamma m_0 \vec{v}$

$$p^2 = \gamma^2 m_0^2 v^2$$

$$p^2 - \gamma^2 m_0^2 c^2 = \gamma^2 m_0^2 v^2 - \gamma^2 m_0^2 c^2$$

$$p^2 - \gamma^2 m_0^2 c^2 = \cancel{-\gamma^2 m_0^2 c^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}$$

$$p^2 + m_0^2 c^2 = \gamma^2 m_0^2 c^2$$

Moltiplicando tutti i termini per $c^2$:

$$(pc)^2 + (m_0 c^2)^2 = (\gamma m_0 c^2)^2$$

E cioè:

$$\boxed{E^2 = (pc)^2 + (m_0 c^2)^2} \quad (**)$$

Possiamo scrivere per l'energia totale

$$E = \sqrt{(pc)^2 + (m_0c^2)^2}$$

oltre alla relazione già trovata

$$E = m_0c^2 + E_K \qquad (E_K \text{ è funzione di } p)$$

Dalla relazione trovata, valida in qualunque SRI, possiamo anche derivare:

$$(m_0c^2)^2 = E^2 - (pc)^2$$

Poiché $m_0$ è una ~~gran~~ proprietà intrinseca di un corpo (la sua massa a riposo), $m_0$ non cambia al cambiare del sistema di riferimento: cioè è un invariante di Lorentz.

Ne consegue che la differenza $E^2 - (pc)^2$ è un invariante di Lorentz..

Cioè $E$ e $p$ singolarmente dipendono dal SRI, ma la loro diff. al quadrato è invariante

Dimostreremo nelle prossime lezioni in modo formale che qs. risultato è vero non solo per un oggetto fisico di massa $m_0$ definita, ma in generale <u>per qualsiasi sistema</u> con energia totale $E$ e quantità di moto totale $\vec{P}$. Si può scrivere cioè:

$$m^* c^2 = \sqrt{E_{tot}^2 - (P_{tot}c)^2} \qquad (**)$$

$m^*$ è detta massa invariante del sistema e può corrispondere o meno ~~ad una~~ massa ~~massa~~ di un oggetto fisico.

Rimandando la dimostrazione di qs. risultato vediamo alcune conseguenze importanti delle relazioni (**) in alcuni esempi

Pensiamo a un processo in cui una <u>particella</u> si disintegra in $n$ particelle:

**Qualunque SRI**

**STATO INIZIALE:**

(1) $$m_0 c^2 = \sqrt{E^2 - (pc)^2}$$

**STATO FINALE:**

Cons. Energia:

$$E = \sum_{f=1}^{N} E_f$$

Cons. momento

$$\vec{p} = \sum \vec{p}_f$$

Dunque:

$$m_0 c^2 = \sqrt{\left(\sum E_f\right)^2 - \left(\sum \vec{p}_f\right)^2 c^2}$$

Relazione vettoriale con $\vec{p}^{\,2}$ è ok.

Nota che la relazione è valida in qualunque SRI:

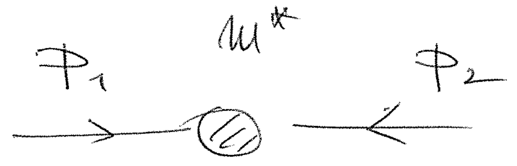
$$\left(\sum E_i\right)^2 - \left(\sum \vec{p}_i\right)^2 c^2 = \underline{M}^{*2} c^{\cancel{4}}$$

) massa invariante

GRANDEZZA INVARIANTE

può coincidere
massa della [illegible]

Alternativamente, in un urto




massa (invariante) dell'oggetto prodotto nell'urto:

$$m^* c^2 = \sqrt{\left(\sum_i E_i\right)^2 - \left(\sum_i \vec{p}_i\right)^2 c^2}$$

Somma delle energie — Somma (vett.) delle q.tà di moto

delle particelle nello stato iniziale

Lo "stato" (oggetto reale di massa $m_0 = m^*$ oppure sistema di massa $m^*$) può poi disintegrarsi in n-particelle secondo

$$m^* c^2 = \sqrt{\left(\sum_f E_f\right)^2 - \left(\sum_f \vec{p}_f\right)^2 c^2}$$

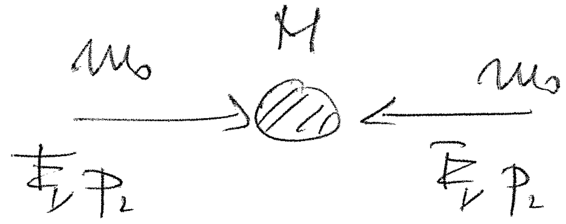
In ultima analisi $\sum_i E_i = \sum_f E_f$

$$\sum_i \vec{p}_i = \sum_f \vec{p}_f$$

Poichè $m^*$ è un invariante relativistico, possiamo scegliere a piacimento il SRI in cui calcolare $E_i$ e $\vec{p}_i$, e $E_f$ e $\vec{p}_f$.

# Esempio

1) Collisione nel centro di massa di due oggetti di massa identica $m_0$ (con il formalismo appena introdotto)




$\vec{p}_1 = -\vec{p}_2$ nel CdM

e dunque $E_1 = E_2$ poiché $m_0$ è la stessa

$$Mc^2 = \sqrt{(E_1+E_2)^2 - \underbrace{(\vec{p}_1+\vec{p}_2)^2}_{=0 \text{ nel CdM}} c^2}$$

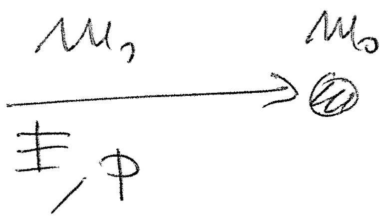
$$= \sqrt{(2E)^2} \qquad (E \equiv E_1 = E_2)$$

$$= 2E = 2m_0 + E_{k_1} + E_{k_2}$$

consistente con il risultato già trovato –

---

**Esempio 2**: Collisione su bersaglio fisso (nel lab)




$\longrightarrow$ Qual è la massa dell'oggetto che si può formare?

- metodo complicato: - trovo il CdM
  - ricavo $E'$, $p'$ nel CdM per i due oggetti
  - Applico il risultato di 1)

- metodo semplice: <u>sfrutto l'invarianza di $m^*$</u>

$$m^* c^2 = \sqrt{(E_1 + E_2)^2 - (\vec{p}_1 + \vec{p}_2)^2 c^2}$$

in qs. caso, nel rif. del Lab. in cui un oggetto è fermo:

$$E_1 = E \qquad E^2 = p^2 + m_0 c^2$$

$$E_2 = m_0 c^2$$

$$p_1 = p$$

$$p_2 = 0$$

$$= (m_0 c^2)^2$$

$$m^* c^2 = \sqrt{E^2 + 2 m_0 c^2 E + (m_0 c^2)^2 - p^2 c^2}$$

$$= \sqrt{2 m_0 c^2 E + 2 (m_0 c^2)^2}$$

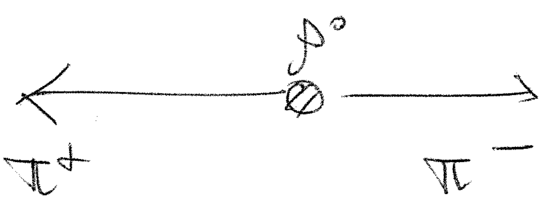
La massa delle particelle che si può produrre nell'urto cresce con $\sqrt{E}$, mentre nell'urto frontale tra due particelle cresce con $E$ —
È il motivo per cui si realizzano <u>Collider</u> con fasci collidenti

## Es. 3

Disintegrazione della particella $\rho^0$ in due mesoni $\pi^\pm$ : $\rho^0 \to \pi^+ \pi^-$

Nel sistema di riposo della $\rho^0$, i due pioni hanno $\beta = 0.932$ – Trovare $m_\rho$, conoscendo $m_\pi$ –

Soluzione: Come per il dec $\alpha$, ma si osservi la relazione relativistica tra $E$, $p$ e $m$




$$\vec{P}_{\pi^+} = -\vec{P}_{\pi^-}$$

$\Sigma \vec{p} = 0$ Nel CdM (riposo della $\rho$)

$$m_\rho c^2 = \sqrt{\underbrace{(E_+ + E_-)^2}_{\text{En. totale}} - \underbrace{(\vec{P}_{\pi^+} + \vec{P}_{\pi^-})}_{=0}} = \sqrt{(2E_\pi)^2}$$

$$= 2E_\pi = 2\gamma m_\pi c^2 = \frac{2 m_\pi}{\sqrt{1-\beta^2}} c^2$$

fine

Particelle di <u>massa nulla</u> :

Per $m_0 = 0$ : $E^2 = (pc)^2 + \cancel{(m_0 c^2)^2}$

$$\Rightarrow E = pc$$

Ne consegue : $\beta = \frac{pc}{E} = 1$

$$\gamma = \frac{E}{m_0 c^2} = \infty$$

- Le particelle di massa nulla hanno sempre velocità pari alla velocità della luce ($\beta = 1$).
- Non si può scrivere una trasf. di Lorentz che porti in un ~~sist.~~ SRI in cui la particella è a riposo (richiederebbe $\gamma = \infty$)

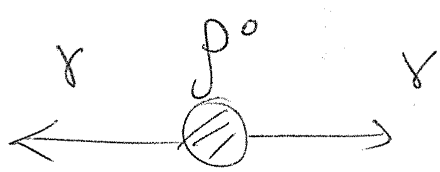
Si noti che $E = m_0 c^2 \gamma$ rimane <u>finito</u> poiché $\gamma = \infty$, ma $m_0 = 0$ e analogamente $\vec{p} = m_0 \gamma \vec{v}$ (con $\vec{v} = \vec{c}$).

I fotoni (quanti della radiazione elettromagnetica) sono particelle di massa nulla.

Processi che coinvolgono corpi di massa nulla non richiedono un formalismo differente da quello già introdotto. Si deve solo ricordare che per questi corpi

$E = pc$ (hanno solo en. cinetica e non en. di massa)

Es. Decadimento della $\rho^0$ in due fotoni




Poiché $m_\gamma = 0$ $\quad E_\gamma = p_\gamma c$

inoltre nel riferimento in cui la $\rho^0$ è a riposo,

$\vec{p}_\gamma(1) = -\vec{p}_\gamma(2)$, ossia $\sum_i \vec{p}_i(\gamma) = 0$

Cons. di energia e mom. (formulazione invariante)

$$m_\rho c^2 = \sqrt{\left(E_\gamma(1) + E_\gamma(2)\right)^2 - \underbrace{\left(\vec{p}_\gamma(1) + \vec{p}_\gamma(2)\right)^2}_{=0} c^2}$$

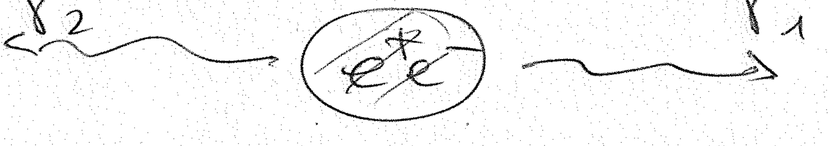
$$= \sqrt{(2E_\gamma)^2}$$

(i due fotoni hanno la stessa en. poiché hanno la stessa q.tà di moto)

$$E_\gamma = \frac{m_\rho}{2}$$

Es: Annichilazione del positronio

Positronio è un "atomo" simile all'idrogeno, formato da un elettrone e un antielettrone (particella di antimateria con carica opposta all'elettrone, e medesima massa). Materia e antimateria si annichiliscono, emettendo radiazione elettromagnetica. Nel sistema in cui il positronio è a riposo:



Conservazione della q.tà di moto richiede che l'annichilazione emetta almeno due fotoni con

$$\vec{p}_\gamma(1) + \vec{p}_\gamma(2) = 0 \qquad p_\gamma(1) = p_\gamma(2)$$

Inoltre $E_\gamma = p_\gamma c$.

Analogamente al caso della $g$:

$$M_i^* c^2 = \sqrt{\left(E_\gamma(1)+E_\gamma(2)\right)^2 - \left(\vec{p}_{(1)}+\vec{p}_{(2)}\right)} = 2E_\gamma$$

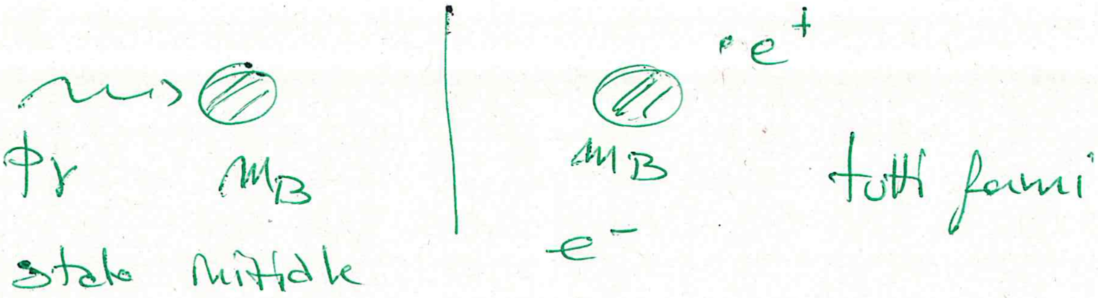
La massa invariante dello stato iniziale $M_i^*$ è

$M_i^* = 2\, m_e$, poiché $E_e = m_e c^2$, $p_e = 0$ (sono fermi)

$\longrightarrow$ ciascun fotone ha $E_\gamma = m_e c^2$

materializzazione del fotone (Attenzione ho messo $c=1$) 

$$\gamma + B \longrightarrow e^+e^- + B$$




Troviamo l'energia $E_\gamma$ minima affinché avvenga la materializzazione del fotone —

– Cons. di energia e momento e uso di invarianti relativistici

massa inv. (Nel SIST del LAB)

$$m^*_{in} = m^*_f$$

$$\sqrt{(\sum_i E_i) - (\sum \vec{p}_i)} = \sqrt{(\sum_f E_f) - \sum \vec{p}_f}$$

$$(E_\gamma + m_B)^2 - p_\gamma^2 = (m_B + m_e + m_e)^2$$

$$2E_\gamma m_B + \cancel{m_B^2} = \cancel{m_B^2} + 4m_e^2 + 4m_e m_B$$

$$E_\gamma = 2m_e\left(1 + \frac{m_e}{m_B}\right) \longrightarrow 2m_e \quad (m_B \text{ grande})$$

Per $m_B = 0$ $E_\gamma = \infty$ non c'è mat. nel vuoto

$m_B = m_e$ $E_\gamma = 4m_e$