

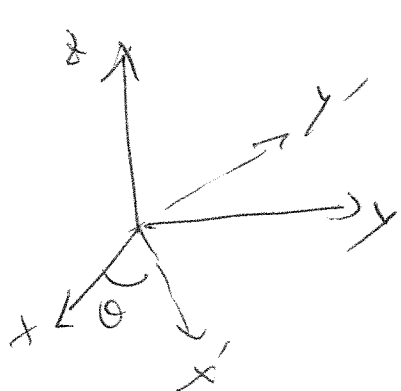
Quadrivettori e invarianti relativistici

C1

~~Nella meccanica newtoniana la posizione~~

In meccanica classica la posizione di un punto è descritta nello spazio 3D delle coordinate (x, y, z) ad un tempo t

Per un diff. osservatore, con assi rotati attorno a z



$$\begin{cases} x' = x \cos \theta + y \sin \theta \\ y' = -x \sin \theta + y \cos \theta \\ z' = z \end{cases}$$

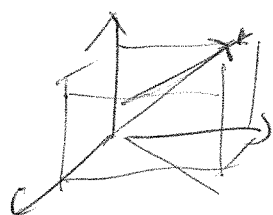
le coordinate x e y sono "mescolate".

La natura dell'oggetto tuttavia è invariante e il nostro cervello è "abituato" a percepire come il movimento, oggetti visti da posizioni diverse (x, y misurate), ve' diamo a x e y significato differente (profondità e larghezza sono misurate con le stesse unità di misura)

~~Le transf. di Lorentz~~ Nello spazio ordinario (2

$\Delta l = (\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2)^{1/2}$ e' invariante
per rotazioni (e separatamente Δt e' inv.)

Possiamo individuare in (x, y, z) le componenti
di un vettore -



Abbiamo definito vettori
gandessimo formule con proprietà
di base delle componenti
identiche a quelle di (x, y, z)

→ Proprietà di vet. relativi e modulo inv.

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{b} &= a b \cos \theta \quad \leftarrow \text{inv.} \\ \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}} &= \sqrt{a^2} = |\vec{a}| \quad \leftarrow \text{inv.} \end{aligned}$$

Le trasformazioni di Lorentz sono analoghe
a 1 :

$$\left\{ \begin{array}{l} t' = \gamma \left(t - \frac{\beta x}{c} \right) \\ x' = \gamma (x - \beta c t) \end{array} \right. \quad \left. \begin{array}{l} \text{Mischiamoci} \\ \text{di } x \text{ e } t \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} y' = y \\ z' = z \end{array} \right.$$

Perché non abbiamo "esp. comune" di fenomeni
relativistici, il nostro cervello non è abituato

per percepire il modo immediato il mescolamento
di x e t , ma possiamo evidentemente interpretare

Le trasformazioni di Lorentz sono una "pseudo-rotazione" in 4D

(non è una rotazione di assi a rigore: la trasf. non coinvolge angoli, ma una relazione algebrica) - $\frac{x \text{ e } ct}{\text{"grandezza"}}$ sono la stessa

Possiamo rendere ancora più evidente l'om. con la trasf. scritta come

$$x' = \gamma(x - vt) \longrightarrow \begin{cases} x' = \gamma x - \gamma\beta ct \\ t' = \gamma t - \gamma\beta x \end{cases}$$

$$t' = \gamma t - \gamma\beta x \longrightarrow ct' = \gamma(ct) - \gamma\beta x$$

~~$$\begin{bmatrix} t' \\ x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$~~

omogenee in x, y, z
 ma non t

Per semplicità è naturale porre $c=1$

rendendo t e x grandezze omogenee (differenziale nel movimento di x e y , non ci possiamo unire fattore di scala $\rightarrow$ spiega perché)

Se misurassimo x in piedi
 y in angoli

in quel sistema avremmo le complicazioni di mantenere le unità di misura

Nel 4D, Δt e Δx non sono inv. di Lorentz -

$$\begin{aligned} (dt')^2 - (dx')^2 &= \\ &= (\gamma dt - \gamma \beta dx)^2 - (\gamma dx - \gamma \beta dt)^2 \\ &= \gamma^2 (1 - \beta^2) dt^2 - \gamma^2 (1 - \beta^2) dx^2 + \cancel{\text{doppo}} - \cancel{\text{doppo}} \\ &= dt^2 - dx^2 \end{aligned}$$

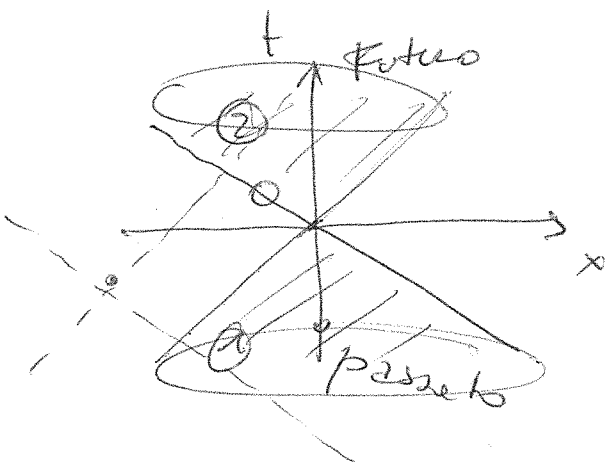
Intervallo ds e' invariante relativistica ;
questa qta' e' equivalente al dl della geom. archim.
~~spazio~~ Totale nella geom. spatio-tempo
e ds puo' essere positivo e negativo :

$ds < 0$ intervallo di tipo spazio

Esiste con $dt = 0$
in punti diff., ma
~~non esiste~~ per nessun SRI
 $ds = 0$ anche -

$ds > 0$
Possiamo avere evi. nello stesso
punto $ds = 0$, ma per
nessun SRI $dt = 0$

Rapp. grafica:



Per un evento $O = O(x, y, t, t)$ lo spatio-tempo è diviso in tre regioni dal cono di luce che delimita la regione tipo tempo ($ds < 0$) da quella tipo spazio

- ~~Da quei~~ I punti sull'asse t , rapp. eventi passati ~~e futuri~~ ($dt < 0$) e futuro ($dt > 0$)
- Eventi nel cono $dt < 0$, possono det. (aver det.) effetti che influenzano il presente di O
- O può det. eff. di punti nel cono futuro
- La regione esterna al cono non può aver influenzato O , poiché richiederebbe $v > c$. Può inf. nel futuro (esempio a - cattedra)
- Eventi "simultanei" $dt = 0$ sono separati spazialmente da O ($dx > 0$ e $ds < 0$) e non possono influenzare O

Quadri vettori.

L'insieme delle coordinate di un evento nello spazio-tempo può essere visto come le componenti di un 4-vettore nello spazio 4D

$$x_\mu = (ct; x, y, z)$$

~~Modulo di quadrivettore~~ $s^2 = ct^2 - x^2 - y^2 - z^2$
~~Definisco prodotto scalare~~

Di ~~quadrivettore~~ modulo quadrato: $s^2 = ct^2 - x^2 - y^2 - z^2$
 che è Lorentz-invariante

Rappresenta l'intervallo tra x_μ e $(0,0,0,0)$

* In analogia a 3D, si definiscono quadri-vettore degli sistemi di quattro grandezze

$$A_\mu = (A_0, A_1, A_2, A_3)$$

che si trasforma come x_μ sotto trasformazioni di Lorentz -

- Possiamo def. prod. scalari

$$A_\mu \cdot B_\mu = A_0 B_0 - A_1 B_1 - A_2 B_2 - A_3 B_3$$

da cui

$$|A_\mu|^2 = A_\mu A_\mu = A_0^2 - A_1^2 - A_2^2 - A_3^2 \quad \text{) modulo}$$

Poiché A_μ si trasforma come x_μ , prod. scalari e modulo sono invarianti di Lorentz

Il quadrivettore Energia-momento (quadriv.) (7)

$$P_\mu = (\frac{E}{c}, p_x, p_y, p_z)$$

si trasforma come x_μ - $\oplus$
Dim. (teniamo $c=1$) :

$$E = \frac{m_0}{\sqrt{1-v^2}}$$

$$\vec{p} = \frac{m_0}{\sqrt{1-v^2}} \vec{v}$$

scopriamo che S' con velocità relativa
 $\vec{v} \parallel \vec{w}$ ed equiversa ~~e calcoliamo~~
~~le espressioni di E' e p' a partire~~
da E e p . Per la scelta di S' , non
dobbiamo occuparci delle comp. trasverse
che sono ovviamente invarianti ~~che~~

Calcolo di E' (mantengo $c=1$)

$$E' = \frac{m_0}{\sqrt{1-v'^2}}$$

$$\text{con } v' = \frac{w - v}{1 - vw}$$

$$\text{Da cui } v'^2 = \frac{w^2 - 2vw + v^2}{1 - 2vw + (vw)^2}$$

(D)

$$1 - v^2 = \frac{1 - 2wv + (wv)^2 - v^2 - w^2 + 2wv}{(1 - wv)^2} =$$

$$= \frac{(1 - v^2)(1 - w^2)}{(1 - wv)^2}$$

$$E' = \frac{m_0}{\sqrt{1 - w^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2}} \left(\frac{m_0}{\sqrt{1 - w^2}} - \frac{m_0 w v}{\sqrt{1 - w^2}} \right)$$

$$= \gamma (E - v p_x)$$

calcolo di p'_x :

$$p'_x = p' = \frac{m_0 v'}{\sqrt{1 - v'^2}} = E' v'$$

$$= \frac{m_0 v' = m_0}{\sqrt{1 - w^2}} \frac{(1 - v w)}{\sqrt{1 - v^2} \sqrt{1 - w^2}} = \frac{w - v}{(1 - v w)}$$

$$= \gamma (p_x - v E)$$

⇒ Energy e ~~momentum~~ p_x si trasformano risp. come t e x sotto Ref di Lorentz

⇒ Possiamo identificare

$$p_\mu = (E, p_x, p_y, p_z)$$

Affidarsi una relazione tra quadivettori
sia soddisfatte, devono essere soddisfatte con
le relazioni per tutte le camp.

Cons. di energia e momento $\Rightarrow$ cons. del
quadimomento. In relatività le conservano
associate poiché x e t sono misurate
di Lorentz.

Modulo del quadimomento è invariante di Lorentz

$$p_\mu^2 = E^2 - p^2 \quad (*)$$

Poiché (*) vale in tutti i SRI, nel caso
di corpo (particella) di massa m_0 vale
anche nel sist. comovante con la particella
(cioè $v=0$). Invi $p=0$, $E=m_0$, $E=m_0$.

Si ricava:

$$E^2 - p^2 = m_0^2 \quad \leftarrow \text{massa della particella}$$

In interazioni (collisioni / disintegrazione)

Si deve conservare p_μ del sistema

$$\sum_i p_{\mu,i} = \sum_f p_{\mu,f}$$

$$P_\mu^{\text{tot}} = \left(\sum_i E_i, \sum_i \vec{p}_{i,1}, \dots \right) \quad \text{quadivettore totale}$$

$$p_{\mu}^{\text{Tot}} = p_{\mu}^1 + p_{\mu}^2 + \dots$$

$$= (E_1 + E_2 + E_3 + \dots, p_{x1} + p_{x2} + p_{x3} + \dots, \dots)$$

È ancora un quadrivettore, quindi la quantità

$$\left(\sum_j E_j \right)^2 - \left(\sum_j \vec{p}_j \right)^2 = m^{*2}$$

detta massa invariante di un sistema
è un invariante di Lorentz.

m^* può coincidere o meno con
la massa di una ~~stato~~ particella reale

Qs. relazione dimostra il risultato
ottenuto per "attenzione analogica" da

$$E^2 - p^2 = m_0^2$$

~~derivato~~ derivato nella lezione precedente
da $p^2 = (\gamma m v)^2$ con qualche
manipolazione

Trasf. Lorentz utili per calcolo

(11)

distrib. di energia e mom. in processi
di collisione e decadimento di particelle

$$\left\{ \begin{array}{l} E' = \gamma E - \gamma \beta p_{\parallel} \\ p'_{\parallel} = \gamma p_{\parallel} - \gamma \beta E \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} E = \gamma E' + \gamma \beta p'_{\parallel} \\ p_{\parallel} = \gamma p'_{\parallel} + \gamma \beta E' \end{array} \right.$$
$$\left\{ \begin{array}{l} p'_{\perp} = p_{\perp} \\ p_{\perp} = p_{\perp} \end{array} \right.$$

inoltre se nel Lab E, p -
nel sistema comov. (particella a riposo
 $E' = m_0$ e $p' = 0$)

$$\text{Da } E = \gamma E' + \gamma \beta p'_{\parallel} \Rightarrow m_0 = \gamma E'$$

$$\gamma = \frac{E_{\text{Lab}}}{m_0} \quad \text{e} \quad \beta = \frac{p_{\text{Lab}}}{E_{\text{Lab}}}$$

$$\text{Da } p_{\parallel} = \gamma p'_{\parallel} + \gamma \beta E'$$

$$p_{\parallel} = \gamma \beta \frac{E_{\text{Lab}}}{\gamma} \Rightarrow \beta = \frac{p_{\text{Lab}}}{E_{\text{Lab}}}$$

Esempio $\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$

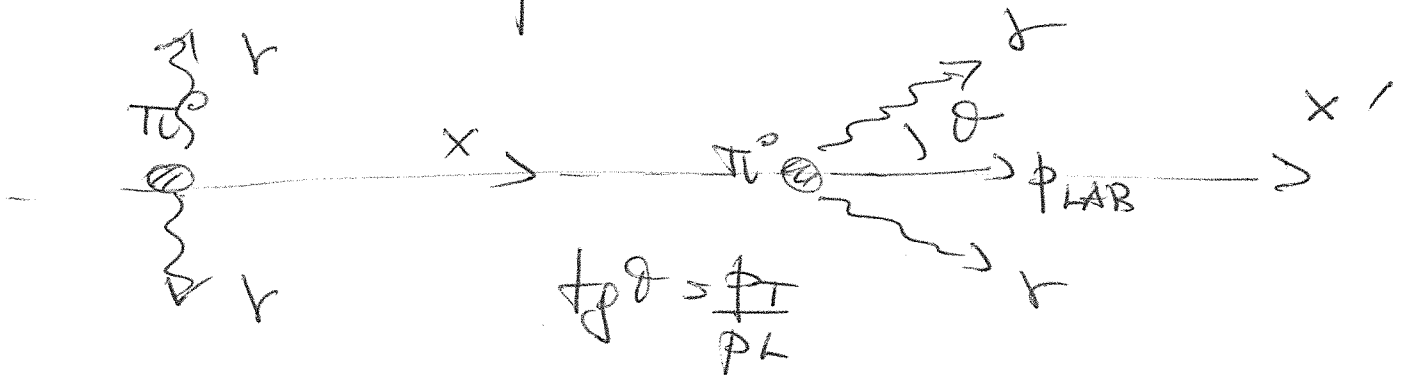
Calcolare l'angolo tra i fotoni nel Lab

Se $p_\pi(\text{LAB}) = 14 \text{ GeV}$

$m_\pi = 0.14 \text{ GeV}$

Assumendo che i fotoni siano prodotti
a 90° rispetto a $\vec{p}_\pi$

Nel sist. di riposo del π^0



Nel sist. di riposo del π^0 : $p_\gamma(1) = p_\gamma(2)$

cons. del momento $p_\perp(1) = p_\perp(2)$

$p_\parallel(1) = p_\parallel(2) = 0$

Poiché $m_\gamma = 0$ $p_\gamma = E_\gamma$

Cons. energie! $2E_\gamma = m_{\pi^0}$ ($E_K(\pi^0) = 0$)

$E_\gamma = m_{\pi^0}/2$

~~Trasf. di Lorentz (boost) $\gamma = \frac{E_\pi}{m_\pi} \approx 100$~~

$\beta \approx 1$

(13)

Nel sistema del Lab. (fisso)

$$\begin{cases} E_r' = \gamma (E_r + \beta p_{||}) \\ p_{||}' = \gamma (p_{||} + \beta E) \end{cases}$$

$$\text{con } \gamma = \frac{E_\pi}{m_\pi} = 100$$

$$\beta \approx \frac{1}{\gamma^2} \approx 1$$

$$\begin{cases} E_r' = 100 E_r & (p_{||} = 0) \\ p_{||}' = 100 E_r & \leftarrow \text{boost di Lorentz} \\ p_T' = p_T = E_r \end{cases}$$

$$\tan \theta = \frac{p_T'}{p_{||}'} = \frac{E_r}{100 E_r} = \frac{1}{100}$$

