Revisione leggi dinamica:

1) Leggi consistenti con trasf. di Lorentz e richiesta di universalità (invarianza in forma) delle leggi fisiche

2) Per $v \ll c$ consistenza con dinamica classica.

Nota: accelerazioni non sono invarianti relativistici — non le ricavo, ma concettualmente i passaggi sono semplici

$$a_x = \frac{d v_x}{dx} \longrightarrow a_x' = \frac{d v_x'}{dt'} \quad \ldots$$

Massa e q.tà di moto:

In analogia al caso classico definiamo

$$\vec{p} = a(v) \cdot m_0 \vec{v} \qquad m_0 = \text{massa classica}$$

dovrà essere $a(v) \rightarrow 1$ per $v \ll c$
per ritrovare il limite classico

Per semplicità di notazione scriviamo

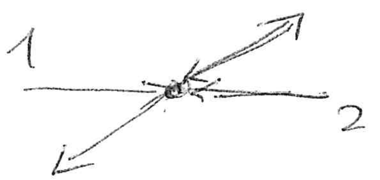
$m_v = a(v)\, m_0$

Abbiamo fatto l'ipotesi che $\vec{p}$ sia // a $\vec{v}$

Facciamo l'ipotesi che q.tà di moto e energia meccanica ~~siano~~ conservate in SRI, cioè che le relazioni che esprimono le leggi di conservazione siano inv. in forma

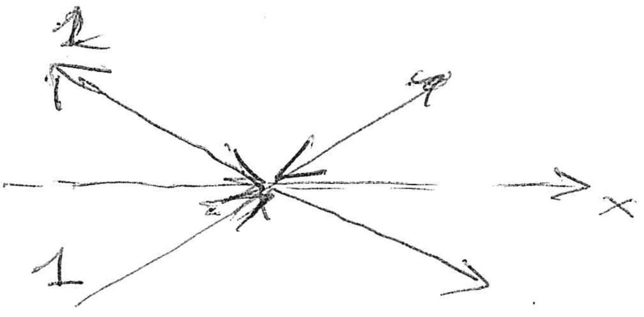
[Nella meccanica abbiamo derivato qs. relazioni come conseguenza delle leggi di Newton, che ora vogliamo modificare per renderle consistenti con la relatività ristretta. Troviamo le modifiche assumendo il principio di relatività per le leggi di conservazione]

Consideriamo una collisione ~~inel~~ elastica nel c.d.m. tra due pti materiali di massa identica m e di $v_1 = -v_2 = v$



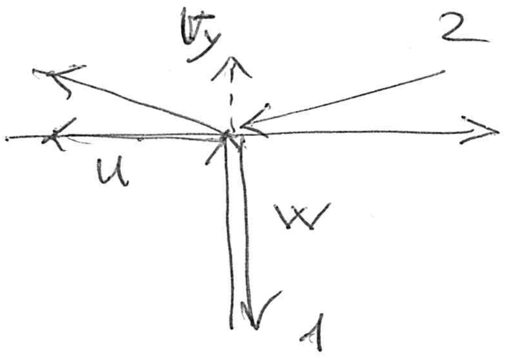
Si osserva un urto come in figura: simmetrico in angoli e direzioni

Si può descrivere l'urto nel sistema con assi scelti come in figura, con x bisettrice delle velocità nel cdm.



Scegliamo rdf S' solidale con la ~~particella 1~~ componente x della part. ①

La collisione appare come in figura, a S'

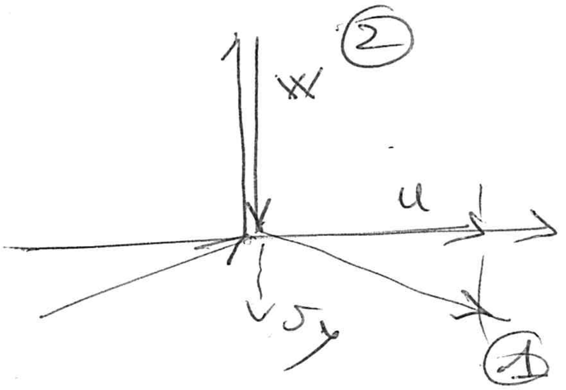


① ha solo comp. verticale ~~della~~ della velocità, che indicheremo con w

② ha una comp orizz lungo x, u, e una verticale v_y

Ora descriviamo il fenomeno in S'' in moto rispetto a S' con velocità relativa tale da annullare la componente x di ②

Cioè S'' ~~si~~ si muove con vel $-u$ e osserva qs. collisione, con w, u, e v_y come in S', ma ~~per pr~~ con particelle scambiate



Le trasf. di velocità ~~dicono~~ da S' a S'' danno:

$$v_y^{*} = \frac{w}{\gamma\left(1+\frac{w_x u}{c^2}\right)} \Rightarrow v_y = \frac{w}{\gamma} = w\sqrt{1-u^2/c^2}$$

Cons. qtà di moto

Nella collisione per tutti i SRif. la comp x del momento è conservata ($v = 0$ per una particella, v medesimo prima e dopo l'urto per l'altra) –

Componente y in S': $\Delta p_1 = 2 m_w W$

$$\Delta p_2 = 2 m_v W \sqrt{1 - u^2/c^2}$$

il pedice v indica che ② si muove a velocità $v = \sqrt{u^2 + v_y^2}$

Affinché sia conservata la qtà di moto

$$\Delta p_{tot} = 0 \implies \Delta p_1 = \Delta p_2$$

$$\frac{m_w}{m_v} = \sqrt{1 - u^2/c^2}$$

Consideriamo il limite in cui $W \longrightarrow 0$, che implica $v \longrightarrow u$: si ottiene

$$\boxed{m_u = \frac{m_0}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}} \longrightarrow m_0 \text{ per } u/c \ll 1$$

MASSA A RIPOSO

La massa di un corpo in movimento aumenta di un fattore γ: $m_u = \gamma m_0$

Energia cinetica (relativistica)

In dinamica relativistica, la legge di Newton è

$$(1)\quad \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt}$$

sist. a massa variabile

con $\vec{p} = m\vec{v} = \gamma m_0 \vec{v}$

Da (1) e richiedendo invarianza del teorema dell'energia cinetica, si ricava l'espressione di E_k relativistica:

$$(*)\quad dE_k = \delta L = \vec{F}\cdot d\vec{r}$$

$$= \frac{d\vec{p}}{dt}\, d\vec{r} = d\vec{p}\cdot\vec{v} = \cancel{d\vec{p}\,\vec{v}}$$

$$= d\vec{p}\cdot\frac{\vec{p}}{m_0\gamma} = \frac{dp^2}{2m_0\gamma}$$

L'espressione della q.tà di moto relativistica può essere manipolata:

$$\vec{p} = \gamma m_0 \vec{v} \longrightarrow p^2 = (\gamma m_0 v)^2$$

$$p^2 - (\gamma m_0 c)^2 = \gamma^2 m_0^2 (v^2 - c^2)$$

$$p^2 - (\gamma m_0 c)^2 = -\gamma m_0^2 c^2 (1 - \beta^2)$$

$$p^2 - (\gamma m_0 c)^2 = \underbrace{-\, m_0^2 c^2}_{\text{costante}} \qquad (\pi)$$

Differenziando qs. relazione si ottiene:

$$dp^2 = 2\gamma d\gamma\, m_0^2 c^2$$

Sostituendo in (*):

$$dE_K = \frac{\cancel{2}\cancel{\gamma} d\gamma\, m_0^{\cancel{2}} c^2}{\cancel{2}\cancel{m_0}\cancel{\gamma}} = m_0 c^2 d\gamma$$

Integrando e ponendo $E_K = 0$, per $v = 0$

$$\boxed{E_K = m_0 c^2(\gamma - 1)} \qquad (**)$$

~~Nel~~ Limite classico: $\beta \to 0$

$$E_K = m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1 \right)$$

$$\simeq m_0 c^2 \left(1 + \frac{1}{2}\beta^2 - 1 + \dots \right)$$

$$\simeq \frac{1}{2} m_0 v^2$$ coincide con l'espressione classica di E_K

Limite ultrarelativistico: $\gamma >> 1$

$$E_K = \gamma m_0 c^2 \qquad (m_0 c^2 \text{ trascurabile})$$

Ma qual e' il significato dei termini?

Possiamo ottenere il risultato da un'altra prospettiva

$$\vec{F} = \frac{d\vec{q}}{dt} \quad e \quad \vec{q} = \frac{m_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \vec{v}$$

dicono che l'azione di una forza non determina solo un aumento di $\vec{v}$ (accelerazione), ma anche un aumento della massa.

Possiamo esprimere l'aumento di massa tramite

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \simeq m_0 + \frac{1}{2} m_0 \frac{v^2}{c^2} + \dots$$

L'aumento di massa è legato a $\Delta m = \frac{\Delta E_K}{c^2}$, ossia $\Delta E_K = (m - m_0) c^2$

Poiché per $v = 0$ $E_K = 0$ e $m = m_0$, l'espressione per l'energia cinetica ~~si~~ può scrivere

(**) $$\boxed{E_K = m_0 c^2 (\gamma - 1)}$$ con $m = \gamma m_0$

L'espressione implica che $E_0 = m_0 c^2$ e $E = \gamma m_0 c^2$ sono grandezze omogenee all'energia

En. totale, en. a riposo e massa:

L'espressione (**) può essere riscritta

$$m_0 \gamma c^2 = m_0 c^2 + E_K$$

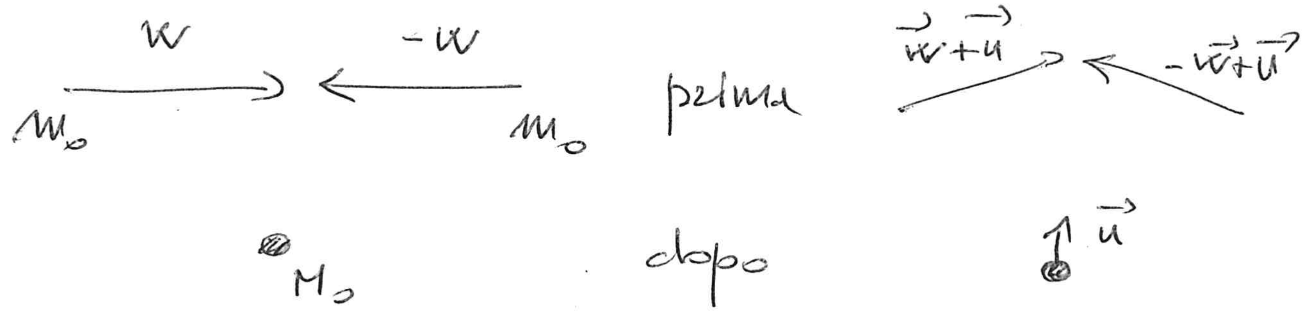
$$\boxed{m c^2 = m_0 c^2 + E_k}$$

In relatività $\boxed{E = mc^2}$ rappresenta l'energia totale e include, l'energia (di massa) a riposo: $\boxed{E_0 = m_0 c^2}$ e l'energia cinetica

Le relazioni definiscono la cosiddetta "equivalenza di massa e energia". Se si tiene conto che l'energia cinetica si può trasformare in altre forme di energia, risulta spontaneo generalizzare il risultato dicendo che ad un'energia totale E, in qualunque forma si manifesti, corrisponde una massa secondo $E = mc^2$. A variazioni di massa di un sistema corrispondono variazioni di energia $\Delta m c^2 = \Delta E$: $1g \rightarrow 9 \cdot 10^{13}$ joule

ESEMPIO: URTO INELASTICO

Discutiamo, come esempio, un urto completamente anelastico: due corpi di masse m_0 e velocità opposte w si fondono in un corpo di massa M_0:



Immaginiamo, per ~~semplicità~~ comodità, che l'urto avvenga con una piccola componente di velocità trasversa $\vec{u}$. La conservazione di q.tà moto nell'asse verticale richiede:

$$p = 2 m_w u = p' = M_u u$$

cioè $2 m_w = M_0$ $\quad$ ($M_u = M_0$ per u piccolo)

L'oggetto che si forma ha massa pari al doppio delle masse degli oggetti ~~incidenti~~ collidenti, però $m_w = \dfrac{m_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}} > m_0$

La massa $M_0 > 2m_0$ è maggiore della somma delle masse (a riposo) degli oggetti collidenti; l'energia totale si conserva, l'energia cinetica dei corpi incidenti si trasforma in energia di massa

Scriviamo le masse in termini di energia cinetica:

$$M_0 c^2 = 2 m_{w} c^2 =$$

$$= \frac{2\, m_0 c^2}{\sqrt{1 - w^2/c^2}} = 2 m_0 c^2 \left(1 + \frac{1}{2}\frac{w^2}{c^2}\right) =$$

$$= 2 m_0 c^2 + \frac{1}{2} m_0 v_A^2 + \frac{1}{2} m_0 v_B^2$$

$$= 2 m_0 + K_A + K_B$$

essendo $\vec{v}_A = \vec{w}$
$\vec{v}_B = -\vec{w}$

nel sist. del c.d.m.

Qs. trasformazione è peculiare della cinematica relativistica. In un urto anelastico classico: $M_0 = 2m_0$ ~~sempre~~ e sarebb $2m_0$ indip. dall'energia cinetica delle particelle entranti

- In relatività $M = 2m_\gamma$:
  la massa dell'oggetto che si forma dipende dall'energia della collisione

  → se si fanno urtare due protoni a fermi $M = 2m_p$

  → se si fanno urtare due protoni con $2m_\gamma = M_H$ → si può produrre il bosone di Higgs

Poichè E_K può trasformarsi in altre forme di Energia, è naturale ~~generalizzare~~ ~~nozione anche te~~ al caso in cui l'energia immessa non è cinetica, ma potenziale o di altra forma. Il ~~fatto con cui si immette~~ l'energia immessa si traduce in massa: $\Delta E = \Delta m c^2$

- Al contrario se un oggetto di massa M si disintegra in oggetti di massa m_0 (a riposo) l'energia liberata è $Q = (M - 2m_0)c^2$
- Si può misurare (calorimetro) Es. DECAD. ALFA

Oggetto composito in cui le particelle non sono ferme (nucleo):

$$M = m_p + m_n + \text{Eccesso di massa}$$
dovuto all'energia cinetica

$$M = m_p + m_n + \text{difetto di massa}$$
dovuto all'energia potenziale
(< 0 per sistemi legati) stabili

Non sempre gli oggetti sono compositi, e tuttavia possono disintegrarsi — $E_{TOT} = E_0 + E_k$, con $E_0 = m_0 c^2 \leftarrow$ disponibile in una disint.

Esempio $\quad e^+ e^- \longrightarrow \gamma\gamma$

non hanno massa
$m_\gamma = 0$ e riposo
solo energia

Per analizzare un paio di casi emblematici troviamo ~~tutti~~ alcune relazioni tra E, m_0 e p

Relazione tra energia e q.tà di moto

Riutilizziamo la relazione (□) di pag. 5, ridefinendo ~~interpretand~~ i termini secondo l'interpretazione di energia totale e energia di massa:

$$p^2 - (\gamma m_0 c)^2 = -m_0^2 c^2$$

$$p^2 c^2 - \cancel{\gamma m_0} (m c^2)^2 = -m_0^2 c^4$$

$$\Longrightarrow E^2 = m_0^2 c^4 + p^2 c^2$$

$$m_0^2 c^4 = E^2 - p^2 c^2$$

E' comodo scegliere un sistema di unità con $c = 1$, in cui il campione per il metro è $l = ct$

Le relazioni diventano:

$$E^2 = m_0^2 + p^2$$

$$m_0^2 = E^2 - p^2$$

1) Per particelle di massa nulla (fotoni della radiazione elettromagnetica) $E = p$ e non esistono "fotoni a riposo". Si muovono con velocità c. E' $p \neq 0$ in ogni sistema di riferimento

* Trasf. di Lorentz ~~al sist. di rif.~~ dal ~~di un~~ sist. del laboratorio al sistema di rif. di una particella con E, p, m_0 nel Lab.

Dalle definizioni:

$$\gamma = \frac{\gamma m_0 c^2}{m_0 c^2} \equiv \frac{E}{m_0 c^2} \equiv \frac{E}{m_0} \; (c=1)$$

$$\beta = \frac{v}{c} = \frac{\gamma m_0 v c}{\gamma m_0 c^2} = \frac{pc}{E} = \frac{p}{E} \; (c=1)$$

* Se particella di massa m_0 si disintegra:

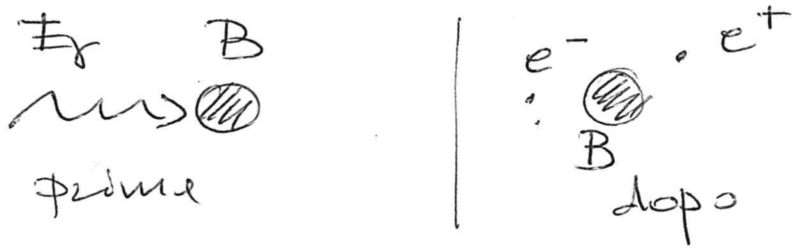
$$m_0^2 = E^2 - p^2$$
$$= \underbrace{\left(\sum_i E_i\right)^2 - \left(\sum_i p_i\right)^2}_{\cancel{\text{massa invariante}}\ \cancel{(\text{è invariante di Lorentz})}} \longleftarrow \text{cons. di energia e momento}$$

Più in generale la ~~qu~~ "MASSA INVARIANTE"

$$m^{*2} = \left(\sum_i E_i\right)^2 - \left(\sum_i p_i\right)^2$$ è inv. di Lorentz (dim. più avanti)

Materializzazione del fotone

$$\gamma + B \longrightarrow B + e^+e^-$$



Energia minima per la reazione, quando vengono create le masse di e^+ e e^-, e tutte le particelle nello stato finale sono a riposo ($E_K=0$ ~~in un SRI~~) nel SRI del c.d.m.

Stato iniziale nel Lab:

$$E_\gamma = p_\gamma$$
$$E_B = M_B \qquad \vec{p}_B = 0$$

stato finale nel c.d.m.

$$E_{e^+} = m_e \qquad E_{e^-} = m_e \qquad E_B = M_B$$
$$\vec{p}_{e^+} = \vec{p}_{e^-} = \vec{p}_B = 0$$

$$m_i^{*2} = (M_B + E_\gamma)^2 - p_\gamma^2 = M_B^2 + 2E_B E_\gamma$$
$$m_f^{*2} = (M_B + 2m_e)^2 = M_B^2 + 4m_e M_B + 4m_e^2$$

Da $m_i^{*2} = m_f^{*2} \Longrightarrow E_\gamma = 2m_e\left(1 + \frac{m_e}{M_B}\right)$

Per $M_B \gg m_e$ $\quad E_\gamma = 2m_e \longleftarrow$ consist. con osservazioni

Per $M_B = 0$ $\quad E_\gamma = \infty \longleftarrow$ non c'è bersaglio garantire cons. di $\vec{p}$