DERIVAZIONE DELLE TRASF. DI LORENTZ

- Trasf. delle coordinate spazio-tempo per osservatori in SRI, compatibili con il principio di relatività e le Hp di Einstein:

  1) Reciprocità del moto
  2) costanza di c in tutti i SRI

[2) sostituisce ipotesi di tempo assoluto, 1) è come nella meccanica classica]

Per moto relativo rettilineo uniforme, le trasf. più generale ha la forma:

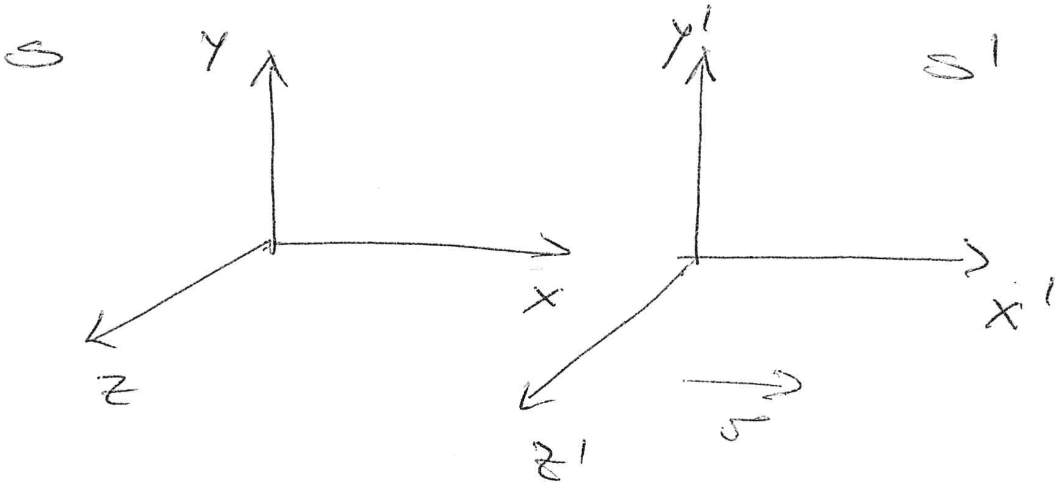
$$\begin{cases} x' = \boxed{a_{11} x + a_{12} y + a_{13} z} + \boxed{a_{14} t} \\ y' = a_{21} x + a_{22} y + a_{23} z + a_{24} t \\ z' = a_{31} x + a_{32} y + a_{33} z + a_{34} t \\ t' = \boxed{a_{41} x + a_{42} y + a_{43} z + a_{44} t} \end{cases}$$

* Rappresenta rotazione degli assi ; a_{ij} = coseni direttori (rotazione lascia invariato $|\vec{r}|$)

* Rappresenta traslazione dip. del tempo. (v = cost)

* Generalizza le trasf. di Galileo ($a_{44} = 1$ e $a_{4i} = 0$) ad una ~~xxxx~~ rotazione 4D nello spazio-tempo (se vogliamo figurarcela ~~g~~ in termini geometrici)

Per semplificare il problema assumiamo:



1) Assi orientati con $x \parallel x'$ e allineati alla direzione del moto relativo che avviene con velocità v

2) $y' \parallel y$ e $z' \parallel z$ ed equiversi

Poiché i due riferimenti non sono ruotati e la direzione di moto è lungo x:

$$a_{12} = a_{21} = 0$$
$$a_{23} = a_{32} = 0$$
$$a_{13} = a_{31} = 0$$

y', z' non dip da x e z, y (non c'è rotazione)

$$a_{24} = a_{34} = 0$$

y', z' non dipendono da t

Si ha per y' e z':

$$y' = a_{22}\, y$$
$$z' = a_{33}\, z$$

Abbiamo osservato, nelle lezioni precedenti, che le lunghezze nelle direzioni ortogonali al moto rimangono invariate $\Rightarrow a_{22} = a_{33} = 1$

In modo più formale, assumiamo che i coefficienti possano dipendere da v

$$a_{22} = a_{33} = \lambda(v)$$

sono uguali tra di loro poiché y' e z' ($e\, y\, e\, z$) possono ~~essere~~ essere scelti in modo completamente arbitrario nel piano ortogonale a $X \parallel x'$.

Si ha, per la reciprocità del moto:

$y' = \lambda(v)y$ e $y = \lambda(-v)y'$

$$y' = \lambda(v)\lambda(-v)y'$$

scambiando il verso di x (la scelta del verso è arbitraria) ~~o~~ otteniamo relazioni identiche, ma con v al posto di $-v$ (cambiando verso a x, cambia il verso di v):

$$y' = \lambda(-v)\lambda(v)y'$$

Da cui $\lambda(-v) = \lambda(v)$ e $\lambda^2 = 1 \Rightarrow \lambda = \pm 1$

Avendo assunto y' e y equiversi è $\lambda = 1$

$\Rightarrow$ Le coordinate trasverse sono invarianti!

Per la coordinata x, osserviamo che i punti solidali con S' hanno $x' = \text{cost}$.
Detti punti si muovono rispetto a x, con la velocità di S', quindi $x - vt = \text{cost}$

Dunque $x' = a_{11} x + a_{14} t$ deve avere la forma (con $\gamma(v)$ da determinare):

$$x' = \gamma(v)\,(x - vt) \qquad (*)$$

Usando la reciprocità del moto, si ha:

$$x = \gamma(-v)\,(x' + vt') \qquad (**)$$

E, analogamente alla discussione per y' e z',

$$\gamma(v) = \gamma(-v)$$

[D'altronde per il principio di relatività e i risultati sulla contrazione delle lunghezze, non devono esserci differenze scambiando S e S' e mandando v in $-v$]

Possiamo risolvere (**) rispetto a t':

$$t' = \frac{1}{v}\left[\frac{x}{\gamma(v)} - x'\right]$$

Eliminando, per comodità di scrittura, la dip. da v in γ, e sostituendo a x' l'espressione (*), si ottiene

$$t' = \frac{1}{v}\left[\frac{x}{\gamma} - \gamma(x - vt)\right] = \frac{1}{v}\left(\frac{1}{\gamma} - \gamma\right)x + \gamma t$$

Troviamo quindi le equazioni:

$$\begin{cases} x' = \gamma\,[x - vt] \\ t' = \nu x + \gamma t \end{cases} \quad \text{con } \nu = \frac{1}{v}\left[\frac{1}{\gamma} - \gamma\right]$$

Si noti che imponendo $t = t'$ (Hp tempo assoluto), ~~le equazioni trovate~~ si avrebbe $\nu = 0$ e $\gamma = 1$. Si otterrebbero quindi le trasformazioni di Galileo, recuperando simultaneità e spazio assoluto

Il procedimento adottato è dunque generale, vogliamo però ora imporre la condizione di Einstein $c = \text{cost}$ in ogni SRI

Ricorriamo dal postulato di Einstein:

$c =$ costante in tutte le direzioni per ogni osservatore inerziale

Dunque sia in S e in S' vale la condizione

$$x^2+y^2+z^2-c^2t^2=0 \qquad (\times)$$

$$x'^2+y'^2+z'^2-c^2t'^2=0 \qquad (\square)$$

che lega le coordinate (x,y,z) e (x',y',t') raggiunte da un segnale luminoso in un tempo t e t', partito dall'origine del rispettivo sist. di riferim.

Per essere contemporaneamente valide $(\times)$ e $(\square)$ devono essere uguali a meno delle trasf. cercate:

$$x'^2+y'^2+z'^2-c^2t'^2 =$$

$$\gamma^2(x-vt)^2+y^2+z^2-c^2(\nu x+\gamma t)^2 =$$

$$(\gamma^2-\nu^2c^2)x^2+y^2+z^2-\gamma^2(c^2-v^2)t^2-2\gamma(\gamma v+\nu c^2)xt =$$

$$x^2+y^2+z^2-c^2t^2$$

Da queste relazioni seguono:

$$\begin{cases} \gamma^2-\nu^2c^2=1 \\ \gamma^2(c^2-v^2)=c^2 \\ \gamma v+\nu c^2=0 \end{cases} \Longrightarrow \gamma=\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad \beta=\frac{v}{c}$$

Possiamo ricavare ν dalla sua definizione

[occhio: se la si ricava dalle eq. precedenti, bisogna prendere le soluzioni con segno giusto, perché sono relazioni quadratiche.
Verificare per esercizio che le 3 condizioni sono soddisfatte per la soluzione trovata]

$$\nu = \frac{1}{v}\left[\frac{1}{\gamma} - \gamma\right] =$$

$$= \frac{\gamma}{v}\left[\frac{1}{\gamma^2} - 1\right] = \frac{\gamma}{v}\left[1-\beta^2-1\right] = -\frac{\gamma\beta}{c}$$

Sostituendo nelle trasformazioni:

$$\begin{cases} x' = \gamma(x - vt) \\ t' = \gamma\left(t - \beta\frac{x}{c}\right) \end{cases}$$

TRASF. DI LORENTZ

E per le reciproche:

$$\begin{cases} x = \gamma(x' + vt') \\ t = \gamma\left(t' + \frac{\beta x'}{c}\right) \end{cases}$$

× Trovate da Lorentz in modo empirico come trasformazioni che rendono invarianti le ~~[illegible]~~ eq. di Maxwell dell'elettromagnetismo

× Derivate da Einstein a partire dai postulati di relatività speciale

Le trasformazioni di Lorentz si possono scrivere in una forma facile da ricordare:

$$\begin{cases} x' = \gamma(x - vt) \\ t' = \gamma t - \frac{\gamma\beta}{c} x \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x' = \gamma x - \gamma\beta\, ct \\ ct' = \gamma ct - \gamma\beta x \end{cases}$$

In forma matriciale:

$$\begin{pmatrix} x' \\ ct' \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma & -\gamma\beta \\ -\gamma\beta & \gamma \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ ct \end{pmatrix} \quad \text{da } O \text{ a } O'$$

$$\begin{pmatrix} x \\ ct \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma & \gamma\beta \\ \gamma\beta & \gamma \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ ct' \end{pmatrix} \quad \text{da } O' \text{ a } O$$

In forma estesa alle 4 coordinate:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ ct' \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\gamma\beta \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\gamma\beta & 0 & 0 & \gamma \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ ct \end{pmatrix}$$

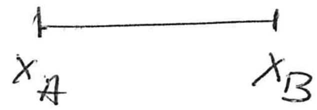
Nota: per $v \ll c$ $\gamma = 1$ e ~~quindi~~ le trasformazioni di Lorentz si riducono alle trasf. di Galileo

I risultati sulla dilatazione del tempo e la contrazione degli intervalli sono deducibili dalle trasf. di Lorentz

Es. <u>Lunghezza di un regolo</u>

Con trasformazione di Lorentz

Un osservatore solidale con un regolo misura una lunghezza $l_{AB} = x_B - x_A$



Un osservatore in moto con velocità v passa davanti al regolo e al tempo t' ~~...~~, segna le posizioni degli estremi su un proprio regolo ottenendo:

$$x_B = \gamma x_B' + \gamma \beta t'$$
$$x_A = \gamma x_A' + \gamma \beta t'$$

si noti che S è in moto relativo a S' con velocità $-v$ da cui le trasf. indicate

La lunghezza del regolo ~~...~~ in S' è

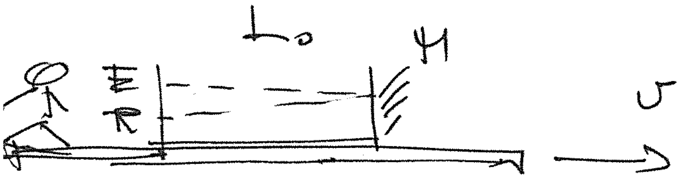
$$l' = x_B' - x_A' = \frac{x_B - x_A}{\gamma} = l/\gamma = l\sqrt{1-\beta^2}$$

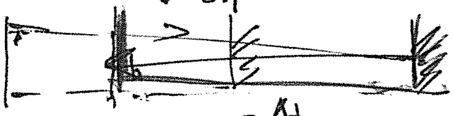
Il sistema S' vede il regolo di S, contratto rispetto a come lo vede l'osservatore ~~solo~~ S solidale con il regolo stesso

CONTRAZIONE LUNGHEZZE

Con orologio di Einstein

Stesso apparato usato per Δt, ma con il moto nella direzione dell'app.





questa è L e non L_0, perché è la lung. per l'osservatore che vede il moto

$$c\Delta t_1 = L + v\Delta t_1 \Rightarrow \Delta t_1 = \frac{L}{c-v}$$

$$c\Delta t_2 = L - v\Delta t_2 \Rightarrow \Delta t_2 = \frac{L}{c+v}$$

~~lunghezza~~ tempo complessivo:

$$\Delta t = \Delta t_1 + \Delta t_2 = \frac{2L}{c}\frac{1}{(1-\beta^2)} \qquad (*)$$

D'altronde per la relazione sui tempi, per S' e S:

$$\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{2L_0}{c}\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad (**)$$

Combinando $(*)$ e $(**)$

$$\frac{2L}{c}\frac{1}{(1-\beta^2)} = \frac{2L_0}{c}\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$L = L_0\sqrt{1-\beta^2} \Rightarrow \boxed{L = \frac{L_0}{\gamma}}$$

Revisione dei risultati dell'esperimento di Michelson-Morley:

Secondo l'interpretazione basata sulla meccanica classica il percorso

Revisione dei risultati dell'esperimento di Michelson e Morley:

Secondo l'analisi classica, il tempo di percorrenza del braccio longitudinale e di quello trasversale rispetto alla direzione del moto relativo sono legati alla lunghezza da un fattore dipendente dal moto relativo in modo diverso nei due bracci:
Ortogonale $t_1 = (2 L_1 / c) * \mathrm{gamma}$
Longitudinale $t_2 = (2 L_2 / c) * \mathrm{gamma}^2$

Questa differenza determinerebbe uno sfasamento diverso (e dunque un passaggio di frange) a seconda di come sia orientato l'interferometro.

Secondo le trasformazioni di Lorentz, la lunghezza longitudinale risulta contratta di un fattore L_2/gamma che si elide con un fattore gamma nel risultato. Ne consegue che lo sfasamento può essere scritto come:

$$\mathrm{Delta}(t) = t_2 - t_1 = 2\,\mathrm{Delta}(L) / c * \mathrm{gamma}$$

Cioe` la differenza di tempi dipende solo dalla differenza di lunghezza dei bracci e non dal moto relativo dei bracci rispetto a c.
I bracci sono equivalenti e ruotando l'apparato (cioe` scambiando L_1 con L_2 e t_1 con t_2) non cambia il risultato.

I risultati sulla contrazione delle lunghezze e la dilatazione dei tempi sono ottenuti considerando la lunghezza di un regolo in un intervallo di tempo nullo nei due sistemi, o un intervallo di tempo nella stessa posizione. Nel caso generale, però gli intervalli di tempo e di spazio sono “accoppiati” dalle trasformazione di Lorentz.

Nel ricavare la lunghezza del regolo in S` abbiamo immaginato che S’ misuri la posizione degli estremi in un definito tempo t’. Tuttavia ciò che è simultaneo in S’ non lo è in S. La relazione generale tra intervalli di tempo e distanze nei due sistemi si ricava utilizzando la forma differenziale delle trasformazioni di Lorentz (DATA NELLA PROSSIMA PAGINA).

Solo tenendo conto in modo completo delle trasformazioni si evita di cadere in situazioni paradossali. Un esempio famoso è quello dello sciatore e della buca.

Uno sciatore con sci della medesima lunghezza L di una buca (nel medesimo SRI, entrambi fermi), si mette in moto e cerca di saltare la buca passando sopra a velocità prossime a c, con gamma=2.

Osservazioni del SRI della buca:
1) ad un “definito” istante, mentre lo sciatore e` sopra la buca, egli misura la buca e gli sci
2) secondo la misura, gli sci sono L/2 e dunque interamente nel vuoto
—> lo sciatore cade

Osservazione paradossale del SRI dello sciatore:
1) Gli sci solidali con lo sciatore sono lunghi L
2) La buca, in moto relativo rispetto allo sciatore con gamma=2, è contratta a L/2
==> Lo sciatore ha gli sci più lunghi della buca e non cade

Secondo l’ipotesi delle relatività i due SRI devono vedere le stesse leggi fisiche e gli stessi fenomeni. Chi ha ragione?

Si noti che per SRI-buca, l’osservazione è simultanea
Per SRI-sciatore gli sci sono più lunghi della buca, ma poiché anche gli intervalli di tempo si trasformano. Si può mostrare che la punta degli sci raggiunge la fine della buca dopo che la coda degli sci ha lasciato l’inizio della buca.
E lo sciatore cade.
A LEZIONE HO FATTO UN ESEMPIO DIVERSO, CON UNO STAR GATE.

COMPOSIZIONE VELOCITÀ

Ricaviamo dalle trasf. di Lorentz le relazioni differenziali per dx' e dt':

$$\begin{cases} x' = \gamma(x - v t) \\ t' = \gamma\left(t - \frac{\beta}{c} x\right) \end{cases} \Longrightarrow \begin{aligned} dx' &= \gamma(dx - v\,dt) \\ dt' &= \gamma\left(dt - \frac{\beta}{c} dx\right) \end{aligned}$$

Da qs. relazioni si ottiene:

se $v_x = v$ → $v_x' = 0$

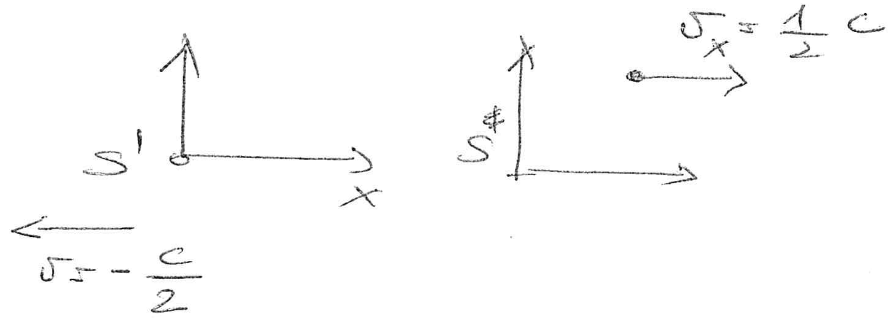
$$\begin{cases} v_x' = \dfrac{dx'}{dt'} = \dfrac{\gamma\,dt\left(\frac{dx}{dt} - v\right)}{\gamma\,dt\left(1 - \frac{v}{c^2}\frac{dx}{dt}\right)} = \dfrac{v_x - v}{1 - \frac{v v_x}{c^2}} \\[2ex] v_y' = \dfrac{dy'}{dt'} = \dfrac{dy}{\gamma\,dt\left(1 - \frac{v v_x}{c^2}\right)} = \dfrac{v_y}{\gamma\left(1 - \frac{v v_x}{c^2}\right)} \\[2ex] v_z' = \dfrac{v_z}{\gamma\left(1 - \frac{v v_x}{c}\right)} \end{cases}$$

Usando le relazioni per il moto reciproco di x rispetto a x':

$$v_x = \frac{v_x' + v}{1 + \frac{v v_x}{c^2}} \quad ; \quad v_{y,z} = \frac{v_{y,z}'}{\gamma\left(1 + \frac{v v_x}{c^2}\right)}$$

<u>NOTA</u>:
- Le relazioni riguardano le v dello stesso corpo descritte da due SRI in moto relativo
- Per due oggetti in moto relativo nello stesso SRI (descritti con medesimo t e regoli spaziali) la comp. è la somma delle v

Esempio Astronave



Secondo la meccanica classica

$$\vec{v}' = \vec{v} - \vec{v}_{S'}$$

$$= \frac{1}{2} c + \frac{1}{2} c = c$$

Secondo la mecc. relativistica:

$$v_x' = \frac{v_x - v}{1 - \frac{v_x v}{c^2}} = \frac{\frac{1}{2} c + \frac{1}{2} c}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{4}{5} c < c$$

Esempio: $v_x = c$

$$v_x' = \frac{c - u}{1 - \frac{c u}{c^2}} = c \left[\frac{c-u}{c-u} \right] = c$$

la comp. di c con una velocità qualunque dà ancora c!

<u>Le accelerazioni</u> non invarianti ~~secondo~~ sotto trasformazioni di Lorentz :

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} \neq a_x' = \frac{dv_x'}{dt'}$$

Le leggi della ~~dinamica~~ $\vec{F} = m\vec{a}$ non è invariante sotto trasf. di Lorentz.

⟶ Necessità di revisione delle leggi della dinamica