

DERIVAZIONE DELLE TRASF. DI LORENTZ

A

• Trasf. delle coordinate spatio-tempo pu osservatori in SRI, compatibili con il principio di relatività e le Hp di Einstein:

- 1) Reciprocità del moto
- 2) costante di c in tutti i SRI

2) sostituire ipotesi di tempo assoluto, 1) e' come nella meccanica classica]

Per moto relativo rettilineo uniforme, la trasf. più generale ha la forma:

$$\begin{cases} x' = a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_{14}t \\ y' = a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + a_{24}t \\ z' = a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + a_{34}t \\ t' = a_{41}x + a_{42}y + a_{43}z + a_{44}t \end{cases}$$

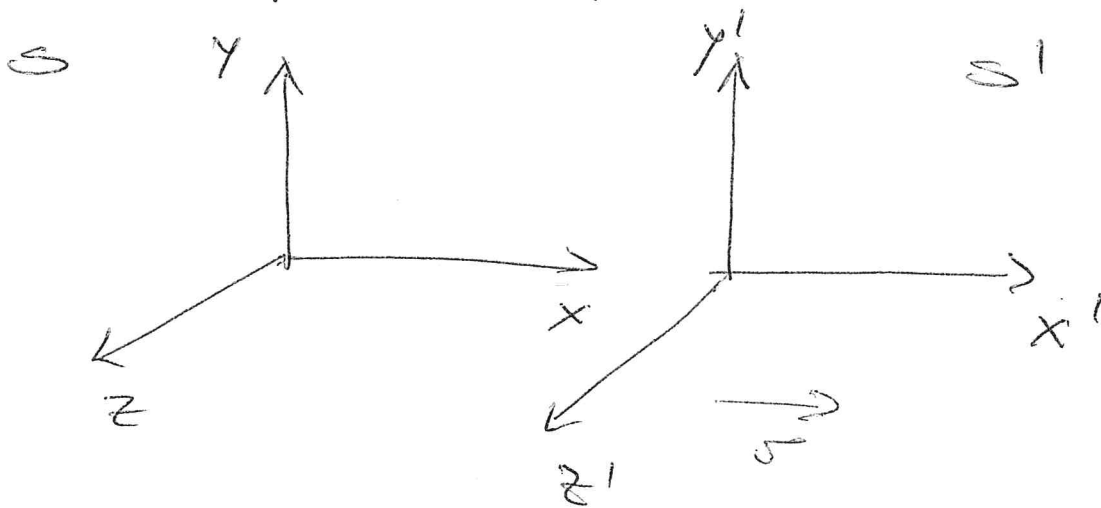
* Rappresenta rotazione degli assi; a_{ij} = coseni direttori (rotazione lascia invariato Hr^2)

* Rappresenta traslazione dip. del tempo (γ cost)

* Generalizza la trasf. di Galileo ($a_{44} = 1$ e $a_{4i} = 0$) ad una ~~trasf.~~ rotazione 4D nello spatio-tempo (se vogliamo figurarcela in termini geometrici)

(2)

Per semplificare il problema assumiamo:



- 1) ~~Assi~~ Assi orientati con $x \parallel x'$ e allineati alla direzione del moto relativo che avviene con velocità v
- 2) $y' \parallel y$ e $z' \parallel z$ ed equivalenti

Poiché i due riferimenti non sono rotati e la direzione di moto è lungo x :

$$\begin{aligned} a_{12} &= a_{21} = 0 \\ a_{13} &= a_{31} = 0 \\ a_{24} &= a_{34} = 0 \end{aligned}$$

~~y, z'~~ non dip da x e z, y
(non c'è rotazione)

y, z' non dipendono da t

Si ha per y' e z' :

$$\begin{aligned} y' &= a_{22} y \\ z' &= a_{33} z \end{aligned}$$

(3)

Abbiamo osservato, nelle lezioni precedenti, che le lunghezze nelle direzioni ortogonali al moto rimangono invariate $\Rightarrow d_{22} = d_{33} = 1$

In modo più formale, assumiamo che i coefficienti possano dipendere da σ

$$d_{22} = d_{33} = \lambda(\sigma)$$

Sono uguali tra di loro poiché y' e z' (e y e z) possono ~~essere~~ essere scelti in modo completamente arbitrario nel piano ortogonale a $X \parallel X'$.

Si ha; per la reciprocità del moto:

$$y' = \lambda(\sigma)y \quad \text{e} \quad y = \lambda(-\sigma)y'$$

$$y' = \lambda(\sigma)\lambda(-\sigma)y'$$

Scambiando il verso di x (la scelta del verso è arbitraria) otteniamo relazioni identiche, ma con σ al posto di $-\sigma$ (cambiando x , cambia il verso di σ):

$$y' = \lambda(-\sigma)\lambda(\sigma)y'$$

$$\text{Da cui } \lambda(-\sigma) = \lambda(\sigma) \quad \text{e} \quad \lambda^2 = 1 \Rightarrow \lambda = \pm 1$$

Avendo assunto y' e y equivalenti e $\lambda = 1$

$\Rightarrow$ Le coordinate trasverse sono invarianti!

(4)

Per la coordinata x , osserviamo che i punti solidali con S' hanno $x' = \text{cost}$ -

Detti punti si muovono rispetto a x , con la velocità di S' , quindi $x - vt = \text{cost}$

Dunque $x' = a_{11}x + a_{14}t$ deve avere la forma (con $\gamma(v)$ da determinare):

$$x' = \gamma(v)(x - vt) \quad (*)$$

Usando la reciprocità del moto, si ha:

$$x = \gamma(-v)(x' + vt') \quad (**)$$

E, analogamente alla discussione per y' e z' ,

$$\gamma(v) = \gamma(-v)$$

[D'altronde per il principio di relatività e i risultati sulla contrazione delle lunghezze, non devono esserci differenze scambiando S e S' e mandando v in $-v$]

Possiamo risolvere (**) rispetto a t' :

$$t' = \frac{1}{v} \left[\frac{x}{\gamma(v)} - x' \right]$$

Eliminando, per comodità di scrittura, (5)
la dip. da σ in γ , e sostituendo a x'
l'espressione (*), si ottiene

$$t' = \frac{1}{\sigma} \left[\frac{x}{\gamma} - \gamma(x - \sigma t) \right] = \frac{1}{\sigma} \left(\frac{1}{\gamma} - \gamma \right) x + \gamma t$$

Troviamo quindi le equazioni:

$$\begin{cases} x' = \gamma [x - \sigma t] \\ t' = \frac{1}{\sigma} \left(\frac{1}{\gamma} - \gamma \right) x + \gamma t \end{cases} \quad \text{con } \sigma = \frac{1}{\sigma} \left[\frac{1}{\gamma} - \gamma \right]$$

Si noti che imponendo $t = t'$ (Hp tempo assoluto), ~~le equazioni trovate~~ si avrebbe

$v = 0$ e $\gamma = 1$. Si otterrebbero quindi

le trasformazioni di Galileo, recuperando
simultaneità e spazio assoluto

Il procedimento adottato è dunque generale,
vogliamo però ora imporre la condizione di
Einstein $c = \text{cost}$ in ogni SRI

(6)

Ricorriamo al postulato di Einstein:

c è costante in tutte le direzioni per ogni osservatore inerziale

Dunque sia in S e in S' vale la condizione

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2 = 0 \quad (X)$$

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2 t'^2 = 0 \quad (Q)$$

che lega le coordinate (x, y, z) o (x', y', z') raggiunte da un segnale luminoso in un tempo t o t' , partito dall'origine del rispettivo sist. di riferimento.

Per essere contemporaneamente valide (X) e (Q) devono essere uguali a meno delle trasf., cercate:

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2 t'^2 =$$

$$\gamma^2 (x - vt)^2 + y^2 + z^2 - c^2 (\gamma t + \gamma v x/c^2)^2 =$$

$$(\gamma^2 - v^2/c^2) x^2 + y^2 + z^2 - \gamma^2 (c^2 - v^2) t^2 - 2\gamma(\gamma v + v c^2) x t =$$

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2$$

Da queste relazioni seguono:

$$\begin{cases} \gamma^2 - v^2/c^2 = 1 \\ \gamma^2 (c^2 - v^2) = c^2 \\ \gamma v + v c^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad \beta = \frac{v}{c}$$

Possiamo ricavare γ dalla sua definizione

l'occhio: se le si richiama delle ep. precedenti, bisogna prendere le soluzioni con segno giusto, perché sono relazioni quadratiche.

Verificare per esemtro che le 3 condizioni sono soddisfatte per la soluzione trovata

$$v = \frac{1}{\gamma} \left[\frac{1}{\gamma} - \gamma \right] = \frac{\gamma}{\gamma} \left[\frac{1}{\gamma^2} - 1 \right] = \frac{\gamma}{\gamma} [1 - \beta^2 - 1] = -\frac{\gamma \beta}{c}$$

Sostituendo nelle trasformazioni:

$$\begin{aligned} \int x' &= \gamma(x - vt) \\ \int t' &= \gamma(t - \beta \frac{x}{c}) \end{aligned}$$

TRAST. Δ LORENTE

Et per le rescritto:

$$\begin{cases} x = \gamma (x' + \beta t') \\ t = \gamma (t' + \frac{\beta x'}{c}) \end{cases}$$

x Trovate di Lorentz in modo empirico come trasformazioni che rendono invarianti le

~~Der~~ eq. di Maxwell' dell'elettromagnetismo

x Derivate der Einstein a partire dai postulati di relatività speciale

(8)

Le trasformazioni di Lorentz si possono scrivere in una forma facile da ricordare:

$$\begin{cases} x' = \gamma(x - vt) \\ t' = \gamma t - \frac{\gamma \beta}{c} x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x' = \gamma x - \gamma \beta ct \\ ct' = \gamma ct - \gamma \beta x \end{cases}$$

In forma matriciale:

$$\begin{pmatrix} x' \\ ct' \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma & -\gamma\beta \\ -\gamma\beta & \gamma \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ ct \end{pmatrix} \quad \text{da } O \text{ a } O'$$

$$\begin{pmatrix} x \\ ct \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma & \gamma\beta \\ \gamma\beta & \gamma \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ ct' \end{pmatrix} \quad \text{da } O' \text{ a } O$$

In forma estesa alle 4 coordinate:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ ct' \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\gamma\beta \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\gamma\beta & 0 & 0 & \gamma \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ ct \end{pmatrix}$$

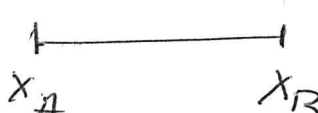
Nota: per $v \ll c$ $\gamma = 1$ e ~~per~~ le trasformazioni di Lorentz si riducono alle trasf. di Galileo

I risultati sulla dilatazione del tempo e la contrazione degli intervalli sono deducibili dalle trasp. di Lorentz

Es. lunghezza di un regolo

Un osservatore solidale con un regolo misura una

lunghezza $l_{AB} = x_B - x_A$



Un osservatore in moto con velocità σ passa davanti al regolo e al tempo t'_{dco} , riprende le posizioni degli estremi su un proprio regolo ottenendo:

$$\begin{aligned} x_B &= \gamma x_B' + \gamma \beta t' \\ x_A &= \gamma x_A' + \gamma \beta t' \end{aligned} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Si noti che } S \text{ e'} \\ \text{in moto relativo a} \\ S' \text{ con velocità } -\sigma \\ \text{da cui le trasp. indicate} \end{array} \right.$$

La lunghezza del regolo ~~è~~ in S' è

$$l' = x_B' - x_A' = \frac{x_B - x_A}{\gamma} = l / \gamma = l \sqrt{1 - \beta^2}$$

Il sistema S' vede il regolo di S , contratto rispetto a come lo vede l'osservatore ~~solo~~ S solidale con il regolo ~~stesso~~

COMPOSIZIONE VELOCITA'

Ricaviamo dalle trasform. di Lorentz le relazioni differenziali per dx' e dt' :

$$\begin{cases} x' = \gamma(x - vt) \\ t' = \gamma(t - \frac{v}{c^2}x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} dx' = \gamma(dx - vdt) \\ dt' = \gamma(dt - \frac{v}{c^2}dx) \end{cases}$$

Da qst. relazioni si ottiene:

$$\left\{ \begin{aligned} v_x' &= \frac{dx'}{dt'} = \frac{\gamma dt \left(\frac{dx}{dt} - v \right)}{\gamma dt \left(1 - \frac{v}{c^2} \frac{dx}{dt} \right)} = \frac{v_x - v}{1 - \frac{v v_x}{c^2}} \\ v_y' &= \frac{dy'}{dt'} = \frac{dy}{\gamma dt \left(1 - \frac{v v_x}{c^2} \right)} = \frac{v_y}{\gamma \left(1 - \frac{v v_x}{c^2} \right)} \\ v_z' &= \frac{v_z}{\gamma \left(1 - \frac{v v_x}{c^2} \right)} \end{aligned} \right.$$

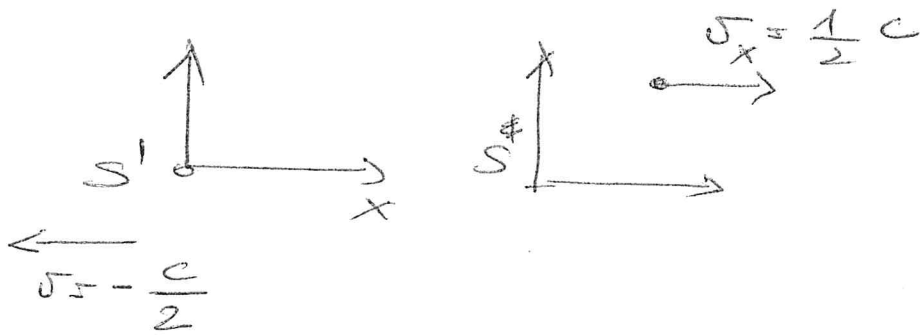
(se $v_x = v$, $v_x' = 0$)

Usando le relazioni per il moto reciproco di x rispetto a x' si

$$v_x = \frac{v_x' + v}{1 + \frac{v v_x'}{c^2}} ; \quad v_x' = \frac{v_x - v}{1 - \frac{v v_x}{c^2}}$$

NOTA: - Le relazioni riguardano la v dello stesso corpo descritta da due STRI in moto relativo.
- Per due oggetti in moto relativo nello stesso STRI (descritti con due termini t e x lo spaziali) la comp. e la direzione delle v

Esempio Astronave



Secondo la meccanica classica

$$\vec{v}' = \vec{v} - \vec{v}_{s1}$$

$$= \frac{1}{2}c + \frac{1}{2}c = c$$

Secondo la meccanica relativistica:

$$v_x' = \frac{v_x - v}{1 - \frac{v_x v}{c^2}} = \frac{\frac{1}{2}c + \frac{1}{2}c}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{4}{5}c < c$$

Esempio: $v_x = c$

$$v_x' = \frac{c - u}{1 - \frac{cu}{c^2}} = c \left[\frac{c-u}{c-u} \right] = c$$

le comp. di c con una velocità qualunque
da' ancora c !

Le accelerazioni non invarianti ~~tenendo~~ sotto trasformazioni di Lorentz :

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} \neq a'_x = \frac{dv'_x}{dt'}$$

Le leggi della dinamica $\vec{F} = m\vec{a}$ non è invariante sotto trasf. di Lorentz.

→ Necessità di revisione delle leggi della dinamica