

RELATIVITA' SPECIALE

(1)

Introduzione . Descrizione dei fenomeni fisici :

1) Definizione di operazioni di misura di grandezze fisiche : campioni, strumenti (regoli, cronometri, ...)

2) Scelta del sistema di riferimento [largamente arbitraria, però ...]

Leggi fisiche esprimono relazioni tra grandezze fisiche.

$$q(A, B, C, \dots) = 0$$

I valori delle grandezze fisiche $A, B, C, \dots$ sono funzioni del sistema di riferimento :

$$A = A(x, y, z, t)$$

$$B = B(x, y, z, t)$$

...

Esempio : La velocità di un corpo è diversa se misurata in riferimento ed un osservatore in quiete o in moto

(2)

In un riferimento S' con coordinate x', y', z', t' (anche il tempo può essere diverso nei due riferimenti, nel caso più generale);

$$A' = A'(x', y', z', t')$$

$$B' = B'(x', y', z', t')$$

...

~~In generale~~ Poiché $A' \neq A, B' \neq B, \dots$ (vedi esempio delle velocità), in generale la relazione tra le grandezze $A', B', C', \dots$ in S' :

$$\varphi'(A', B', C', \dots) = 0$$

sarà diversa da φ , cioè $\varphi \neq \varphi'$.

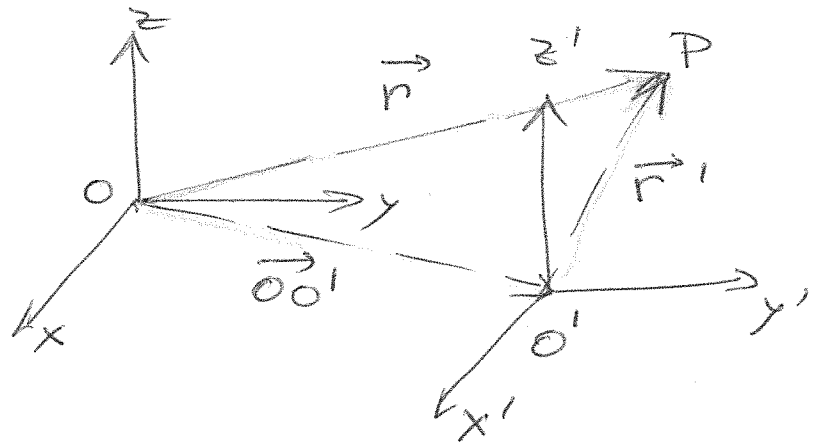
Domande:

- 1) Le relazioni tra grandezze hanno validità generale?
- 2) Quali caratteristiche devono avere le relazioni e gli osservatori, affinché le relazioni abbiano validità generale (siano cioè "leggi fisiche" riconosciute da tutti gli osservatori con quelle caratteristiche)
- 3) Quali sono le trasformazioni che legano i sistemi di coordinate di osservatori che riconoscono le stesse leggi (relazioni tra grandezze)?

(3)

Si è osservato che in meccanica classica le leggi mantengono la stessa forma ($\varphi = \varphi'$) ossia sono invarianti, sotto trasformazioni di Galileo:

$$(*) \begin{cases} \vec{r} = \vec{r}' + \vec{v}_{00'} t \\ t = t' \\ \vec{v}_{00'} = \frac{d\vec{O O'}}{dt} = \text{cost} \end{cases}$$



che descrivono il cambio di coordinate tra osservatori in moto rettilineo uniforme (relativo)

* RECIPROCA' DEL MOTO : La trasf. da O' a O e da O a O' sono le stesse, scambiando coordinate e segno di $\vec{v}_{00'}$.

* $dt = dt'$ $\Rightarrow$ Da (*) segue che gli intervalli di tempo sono INVARIANTI (indip. dall'osservatore) $\Rightarrow$ TEMPO ASSOLUTO

$$* d\vec{r} = d\vec{r}' \Rightarrow \text{Da (*) ; } d\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = (\vec{r}'_2 - \vec{v}_{00'} t) - (\vec{r}'_1 - \vec{v}_{00'} t) = \vec{r}'_2 - \vec{r}'_1 = d\vec{r}'$$

Le distanze relative sono invarianti (indip. dall'osservatore) $\Rightarrow$ SPAZIO ASSOLUTO

NOTA: Spazio assoluto segue dalla forma di (*) che anche esplicitam. tempo assoluto e reciprocità del moto, ma è implicitamente dimostrato nel diagramma in cui $\vec{O P} = \vec{r}$ e $\vec{O' P} = \vec{r}'$ e il medesimo per O e O'

Conseguente:

(4)

1) LEGGE DI COMPOSIZIONE DELLE
VELOCITA': $\underline{\underline{\vec{v} = \vec{v}' + \vec{v}_{00}'}}$

La velocità non è invariante per trasf. di Galileo

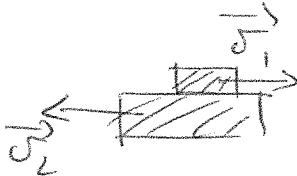
2) $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{v}' + \vec{v}_{00}') = \frac{d\vec{v}'}{dt} = \vec{a}'$

→ l'accelerazione è invariante

→ La legge del moto (che' gli effetti dinamici) è identica nei due sistemi

~ ~ ~

— FORZE: Le forze meccaniche dipendono da distanze relative (es. gravitazione, forze elastiche) o da velocità relative (es. attrito viscoso)



$$\begin{aligned}\vec{F} &= -\eta \Delta \vec{v} \\ &= -\eta (\vec{v}_2 - \vec{v}_1) = -\eta (\vec{v}_2 + \vec{v}_{00}' - \vec{v}_1 - \vec{v}_{00}') = -\eta \vec{v}' \\ &= \vec{F}'\end{aligned}$$

Le forze sono invarianti sotto trasf. di Galileo
 $\vec{F} = \vec{F}'$

— Le masse in meccanica classica sono grandezze scalari proprietà del corpo → invarianti

⇒ $\vec{F} = m\vec{a}$ è invariante

PRINCIPIO DI RELATIVITÀ DI GALILEO

(5)

Le leggi della meccanica sono invarianti in tutti i sistemi di riferimento inerziali (SRI)

→ Si dicono SRI i sistemi che riconoscono il principio di inerzia

→ Sono SRI tutti i sistemi in moto relativo rettilineo uniforme

Nota: non tutte le grandezze sono invarianti (es. $\vec{v}_p \neq \vec{v}_{p'}$ ~~non~~ comparazione velocità)

Nelle leggi fisiche compaiono solo grandezze invarianti o covarianti (cioè che cambiano allo stesso modo)

Es. En. cinetica $E_k = \frac{1}{2} m (\vec{v}_x^2 + \vec{v}_y^2 + \vec{v}_z^2)$ non è invariante per transf. di Galileo

Abbiamo però dimostrato nel corso di fisica I che il teorema dell'energia cinetica è valido in tutti i SRI:

$$\Delta E_k = W \longrightarrow \Delta E_k' = W'$$

En. cinetica e lavoro sono covarianti, la legge fisica è invariante in forma

Principio di relatività Galileo

(6)

→ tutti SRI sono equivalenti (stessa dinamica)

→ velocità di un SRI ha significato solo come velocità relativa ad un altro SRI

[La velocità di un SRI non può essere dedotta tramite esperimenti condotti all'interno del SRI]

Esempio: Moto di caduta di un pannello su una nave in moto con $\vec{v} = \text{cost}$ e sul molo fermo



All'interno del proprio SRI, S e S' vedono lo stesso moto di caduta per A e A':

1) Medesima legge del moto $\vec{a} = \vec{g} = \text{cost}$

→ dal principio di relatività

2) Medesima traiettoria (caduta verticale)

→ coincidenza delle condizioni iniziali

Se S e S' osservano il moto dell'oggetto nell'altro sistema, percepiscono il moto relativo. I due oggetti cadono con 1) medesima legge del moto, 2) traiettorie differenti (e reciproche) per S e S'.

Nota: Sistemi NON inerziali possono essere distinti da altri sistemi di rif. tramite esperimenti condotti al loro interno per la presenza di forze apparenti

CRISI DELLA MECCANICA CLASSICA

(7)

Leggi dell'elettromagnetismo (EM) incompatibili con le trasformazioni di Galileo e con il principio di relatività.

- 1) In termini semplici, prima di affrontare lo studio dei fenomeni EM, il problema è riconducibile all'esistenza di forze che dipendono dalla velocità assoluta

$$\vec{F} = e \vec{v} \times \vec{B} \quad \text{Forza di Lorentz}$$

La velocità non è invariante di Galileo

- 2) La velocità della luce (onde EM) non si compone secondo la legge di Galileo, ma è la medesima in tutti i SRI

Per risolvere 1), ipotesi "etere" = sistema di riferimento per i fenomeni EM.

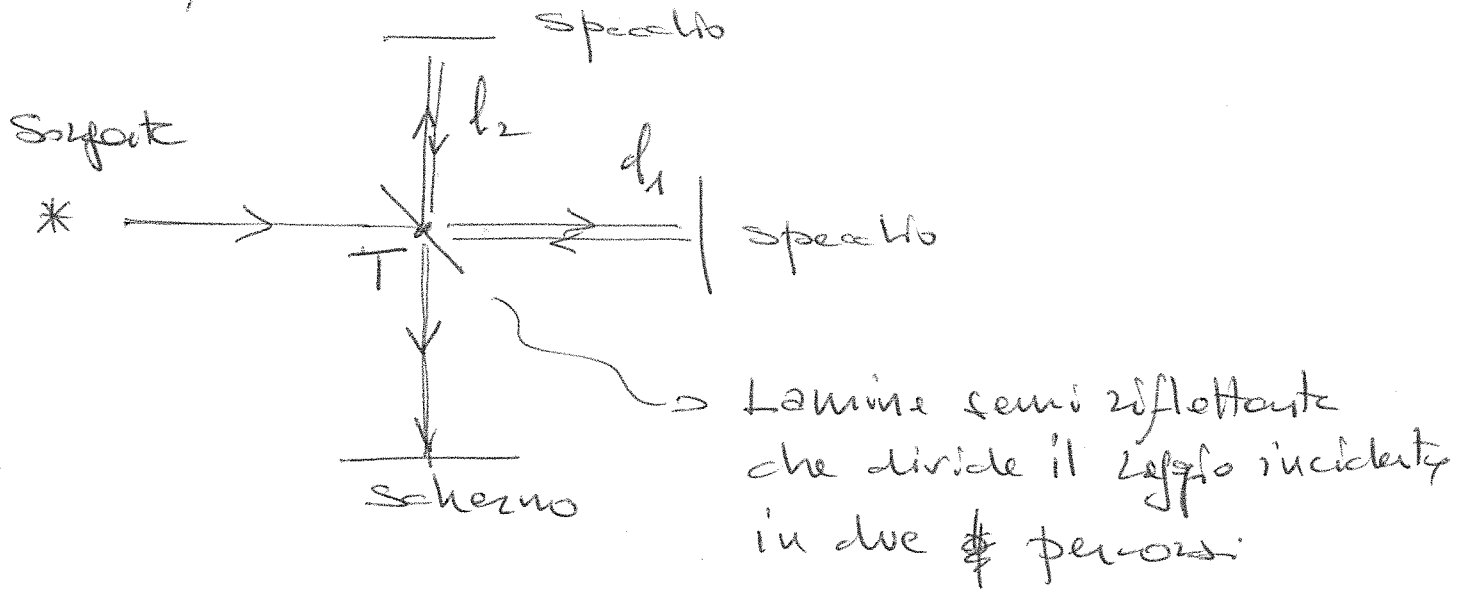
Esperimenti fatti di evidenziare lo stato di moto di altri sistemi (Terra, etc) rispetto all'etere si è concluso 2) $\rightarrow$ Esperimento di

Michelson - Morley

Esperimento Michelson-Morley

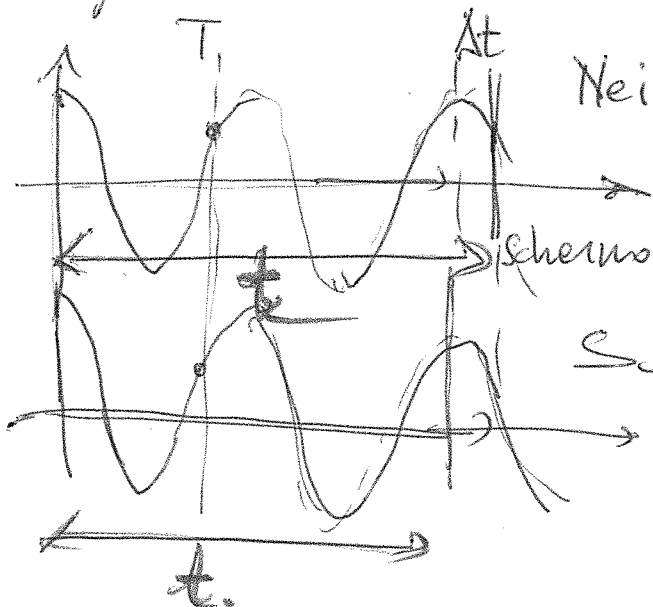
(P)

Interferometro



Sullo Schermo si forma una figura di interferenza che dipende dalla differentia di cammino della luce nei due bracci

Nel punto T, prima di essere divise nei due percorsi le ~~due~~ onde elettromagnetiche sono in fase (la sinusoide dell'onda ha lo stesso argomento)



Nei due bracci continuano a oscillare con la stessa frequenza.

Sullo schermo arrivano con fase relativa che dipende dal tempo impiegato a percorrere i due bracci

Sia la sorgente il sole e l'interferometro ⁽⁹⁾
fisso sulla terra. La velocità relativa
sole-terra è $v \approx 30 \text{ km/s}$, i

→ Il tempo che impiega la luce a percorrere
~~da~~ da T allo specchio e ritorno il
tratto l_1 , parallelo al moto relativo
sole-terra è:

$$t_1 = \frac{l_1}{c+v} + \frac{l_1}{c-v} = \frac{2l_1}{c} \frac{1}{1-v^2/c^2}$$

I segni di v sono discordi nei due
termini perché la velocità della luce ha
velocità opposta a v nei due tratti.

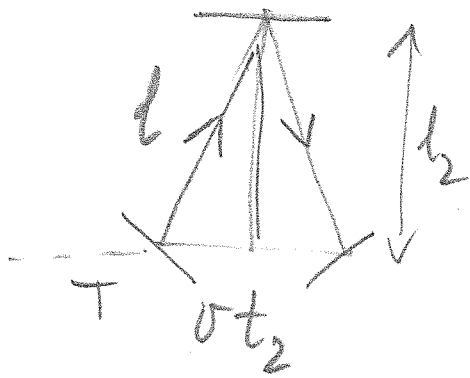
Ponendo $\beta = v/c$, e sviluppando in
serie di Taylor poiché $\beta \ll 1$ ($v \ll c$),
si ottiene:

$$t_1 = \frac{2l_1}{c} (1 + \beta^2)$$

(10)

→ Poiché l'apparato è in moto relativo

rispetto alla luce nella
direzione ortogonale a t_2 ,
la luce segue il percorso
in figura



$s = vt_2$ è lo spostamento del punto T
durante il tempo t_2 impiegato dalla luce
per raggiungere lo specchio e tornare in T
lungo l . Per il teorema di Pitagora:

$$l^2 = t_2^2 + \left(\frac{vt_2}{2}\right)^2 \quad \text{con } 2l = ct$$

$$\left(\frac{ct}{2}\right)^2 = t_2^2 + \left(\frac{vt_2}{2}\right)^2$$

Da cui:

$$t_2 = \frac{2l}{c} \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \approx \frac{2l}{c} \left(1 + \frac{1}{2}\beta^2\right)$$

Sviluppo di Taylor

La differenza di tempo è:

$$\Delta t = \frac{2}{c} \left[l_1(1+\beta^2) - l_2\left(1+\frac{1}{2}\beta^2\right) \right] \quad (*)$$

Ruotando l'apparato di 90° :

$$\Delta t(90^\circ) = \frac{2}{c} \left[l_2(1+\beta^2) - l_1\left(1+\frac{1}{2}\beta^2\right) \right] \quad (**)$$

Disponendo l'apparato inizialmente nella condizione (*) e poi ruotandolo di 90° in (**) si generano sfasamenti:

$$\Delta t' = \Delta t(90^\circ) - \Delta t(0^\circ) = \frac{l_1 + l_2}{c} \beta^2$$

La misura di $\Delta t'$ può essere estratta dall'osservazione delle variazioni della figura di interferenza - Noti l_1, l_2 e c , si ricava β

Esito: $v = 0 \pm 0.3 \text{ km/s}$

Il risultato è compatibile con velocità relativa terra-etere nulla (mentre è noto $v = 30 \text{ km/s}$ da misure astronomiche sulle orbite)

$\Rightarrow$ Impossibile evidenziare moto relativo terra-etere
Etere solidale con la terra?

- Esperimenti con sorgenti terresti, fisse rispetto all'interferometro, o con sorgenti in moto relativo rispetto a interferometro (gle) danno sempre il medesimo risultato: $\nu_T = 0$

$\Rightarrow$ Impossibile evidenziare moto relativo della luce rispetto alla terra

Hp. Einstein: $c = \text{cost}$ in tutti SRI e in tutte le direzioni spiega risultato di Michelson.

Se $c = \text{cost}$ indipend. del moto ^(relativo) di SRI

$$t_1 = \frac{2l_1}{c}$$

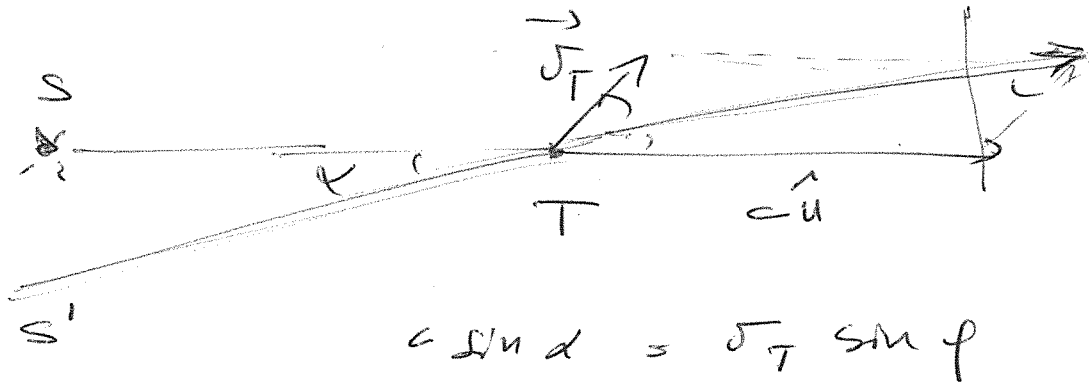
(la luce viaggia a velocità c e non $c+v$ e $c-v$)

$$t_2 = \frac{2l_2}{c}$$

La diff. $t_1 - t_2$ rimane sempre la stessa cambiando i bracci

Aberrazioni astronomiche annue

Stelle coprono elissi, che sono interpretabili geometricamente dalla composizione della velocità della luce e della terra



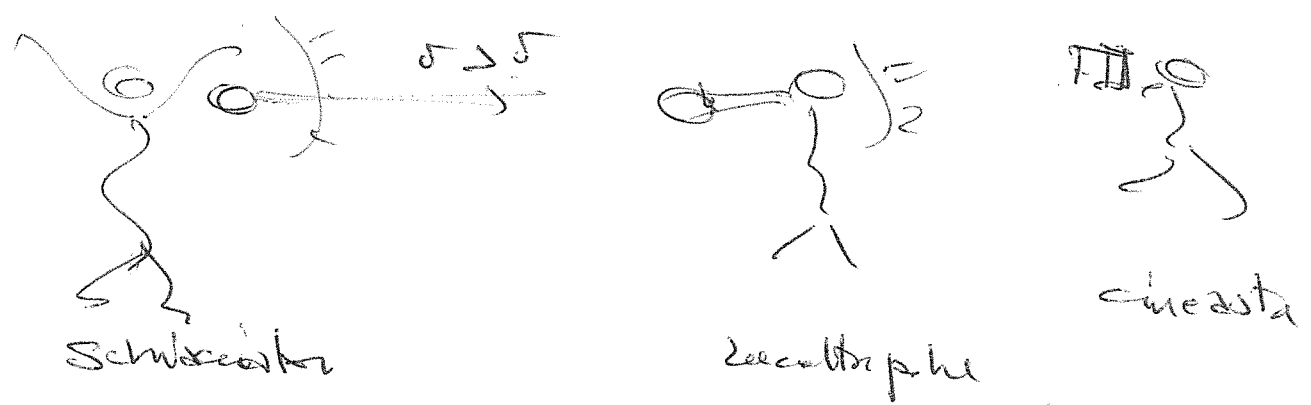
$$\alpha \approx \beta \sin \phi$$

Se terra transire etere, i' $\beta = 0$ (v_T relativo a c, nulla) $\rightarrow$ incompatibile con ~~osservazione~~ l'osservazione dell'aberrazione

$\rightarrow$ Osservazioni suggeriscono

- 1) Hp dell'etere inconsistente
- 2) velocità della luce indipendente dal moto relativo osservatore sorgente (non segue la legge di composizione delle velocità)

Inadeguatezza del concetto di velocità e
della legge di composizione di velocità



- PRE POSTERATIO -

Se $v > c$ il segnale luminoso
prende del cineasta, ~~arriva dopo c~~ e mostra
che il lancio della palla segue il zappinamento
in fine - Violazione dello causante

Si può scegliere di usare la palla come
temp. di segnali, ma se ~~si~~ si assume
l'esistenza di v finita come limite, si
potrebbe sempre cadere in un problema
di violazione di causalità.

Se esiste una velocità massima per inviare
segnali (ad esempio c), la legge di composizione
di velocità deve essere tale che c non sia superato

PRINCIPI DELLA RELATIVITÀ SPECIALE

Dilemma: A) Rinunciare alla relatività di Galileo per i sistemi non meccanici

B) Rinunciare all'ipotesi di Newtoniana di spazio e tempo assoluto

Soluzione basata sull'osservazione che c ha lo stesso valore in tutti i riferimenti (in contraddizione con la composizione di velocità di Galileo) e sull'analisi critica del concetto di simultaneità e di misura di tempi e distanze in sistemi di riferimento in moto relativo (vedi dopo)

PRINCIPI DELLA RELATIVITÀ RESTRETTA (O SPECIALE)

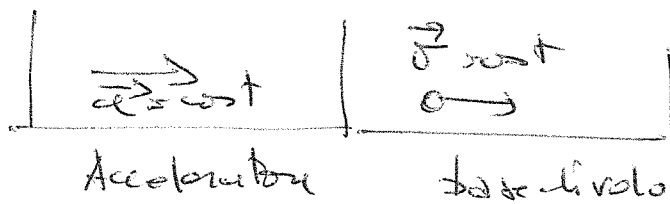
1) I sistemi di riferimento inerziali sono equivalenti: tutte le leggi della fisica hanno la stessa forma in ogni riferimento inerziale

2) Il modulo di c è uguale in tutti i sist. inerziali e non dip. dalla direzione di propag.

Nonostante 2) contrasti con esperienza comune (comp. vel.) è coerente con l'esistenza di una velocità limite per la trasmissione di segnali: se essa dipendesse dal sistema inerziale, i sistemi inerziali sarebbero distinguibili

Il p. 1) è molto forte: leggi della fisica hanno validità universale / oppure è debole: sono valide solo quelle che le hanno

Esperimenti che dimostrano la velocità limite
(effettuati dopo le hp di Einstein, basate su Michelson)



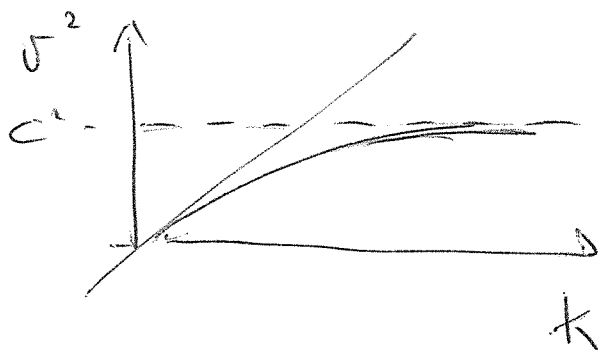
$$v = \frac{\Delta L}{\Delta t}$$

Si può confrontare $v = \Delta L / \Delta t$ con la
misura di $v = \sqrt{2E_k / m}$ basata sulle relazioni
classiche.

$$E_k = W - E_k(0)$$

$W = e \Delta V$ per cariche elettriche

Risultati



Implica che la relazione classica tra k , m e v
conviene di valore (vedremo in seguito). Per ora
ci serve solo a sottolineare l'esistenza di un limite
per v .

SIMULTANEITÀ

(16)

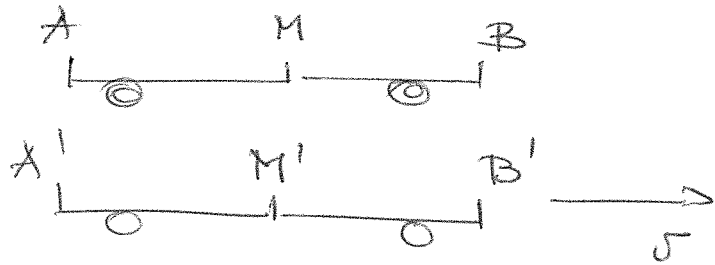
- L'assunzione di tempo assoluto ($t = t'$) non è compatibile con l'esistenza di una velocità limite definita dalla velocità della luce (allo stato delle attuali evidenze sperimentali)
- La simultaneità (coincidenza temporale) di eventi che avvengono nello stesso punto, misurabili con lo stesso cronometro, non pone problemi concettuali
- La simultaneità di eventi spazialmente separati richiede la sincronizzazione di diversi cronometri, che non è ovvia se si dispone solo di segnali con velocità finita
- In modo operativo, si definiscono in un SRI simultanei due eventi se gli impulsi luminosi (c) da essi inviati appaiono simultanei nel punto medio.



x Buona definizione: c è indep di SRI (17)

x Tuttavia eventi simultanei in S , non simultanei in S' (e viceversa) $\rightarrow$ NO TEMPO ASSOLUTO

Dim.



Impulsi da A, B e A', B' a $t = t' = 0$ quando estremi del ronzello sono coincidenti

$$\Delta t_{AB} = \Delta t_{BA} = \frac{AM}{c}$$

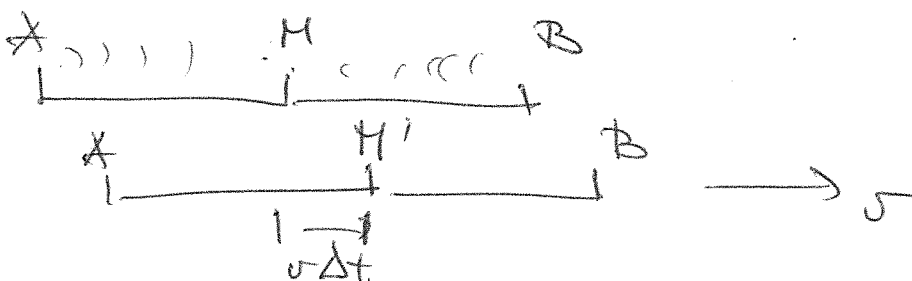
eventi in A e B sono simultanei per S

$$\Delta t'_{A'B'} = \Delta t'_{B'A'} = \frac{A'M'}{c}$$

eventi A' e B' simultanei per S' (in moto relativo)

Nota, c è la stessa per S e S' nel sistema ad essi solidale

Però gli impulsi luminosi di A e B non sono riconosciuti simultanei da S' , perché quando giungono in M' egli si trova in M' , che è il punto in cui S' muove seppure simultanei. In modo analogo (reciproco) A' e B' non sono simultanei per S



DILATAZIONE DEL TEMPO

(18)

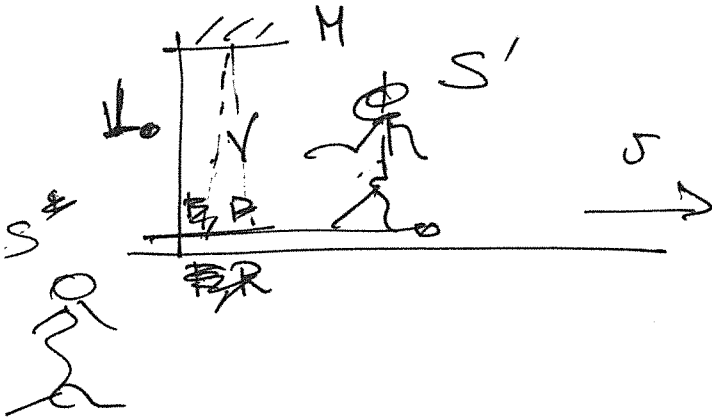
Conseguenza che può essere illustrata in modo analogo. —

Sistema con emettitore (E) specchio (M) ricevitore (R)

si muove con v

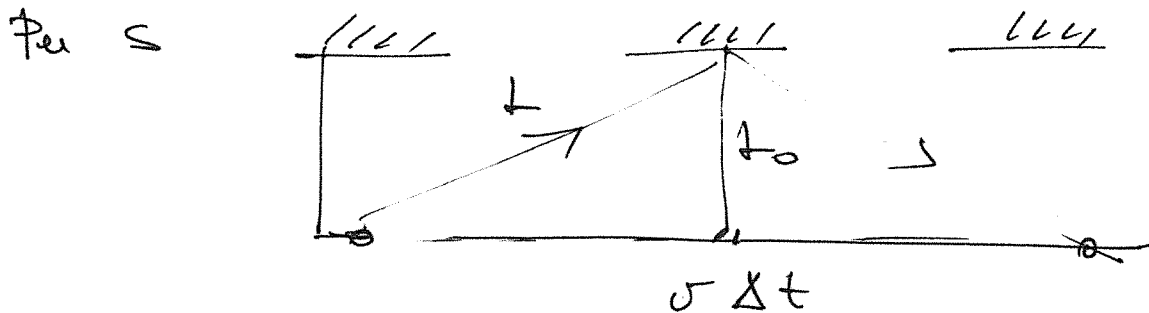
S' = bildeh adaro

S^* = in sist. inerziale



Per S' → lunghezza L_0

$$\Delta t_0 = \frac{L_0}{2c}$$



$$L^2 = L_0^2 + \left(\frac{v \Delta t}{2}\right)^2$$

ma $L = \frac{c \Delta t}{2}$

$$c^2 \Delta t^2 = 4 L_0^2 + v^2 \Delta t^2$$

$$c^2 \Delta t^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = 4 L_0^2$$

$$\Delta t = \frac{2 L_0}{c} \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

(19)

x Per l'osservatore in moto ^{rispetto a} S' il tempo Δt_0 è maggiore $\Delta t = \gamma \Delta t_0$ $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} > 1$

L'intervallo è dilatato di un fattore γ -

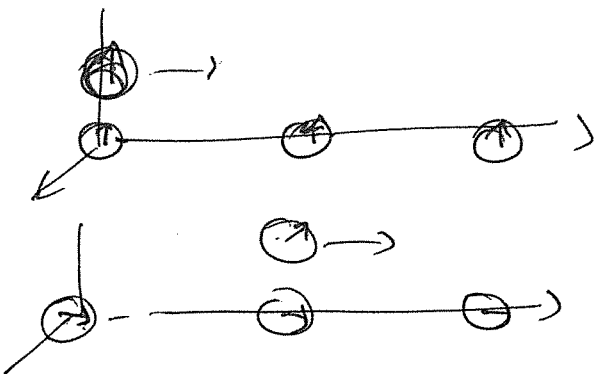
~~Si noti che la reciprocità del~~

x Il tempo Δt_0 detto TEMPO PROPRIO è il minimo intervallo di tempo osservabile (la direzione del moto è invariante, cioè v^2)

x Lo schema è ridefinibile passando a degli orologi con q.s. diff.

s'usa il metesimo orologio in due pti e una diversi orologi, sincronizzati nel suo riferimento, in punti diversi

- Poiché il tempo proprio è minimo l'orologio di S' in moto RITARDA rispetto agli orologi di S



Situazione simmetrica: Orologio di S ritarda rispetto al CONTRADDIZIONE SOLO APPARENTE i CONCORDANDO CHE q.s. CHE RITARDA È IL SINGOLO OROLOGIO IN MOTO CONFRONTATO CON DUE O PIÙ OROLOGI FISSI

Verifica speriment. della dilatazione dei tempi

Legge di decadimento radioattivo

$$N(t) = N_0 \exp(-t/\tau)$$

τ = vita media

Si è misurato che la vita media di alcune particelle prodotte in atmosfera (μ muoni) è

$$\tau_\mu = 2.2 \mu s \quad \leftarrow \text{TEMPO PROPRIO VITA MEDIA DEL } \mu \text{ A RIPOSO (tempo proprio)}$$

I muoni sono prodotti a quota $L \approx 6 \text{ km}$

con $v = \beta c \approx 0.99 c$ -

Tempo per arrivare al suolo $t = \frac{L}{\beta c} \approx \frac{6 \text{ km}}{3 \times 10^5 \text{ km/s}} \approx 20 \mu s$

Flusso al suolo $N = N_0 \exp(-20/2.2) \approx N_0 \times 10^{-3}$

Flusso in base a relatività speciale:

$$\tau = \gamma \tau_0 = \frac{2.2 \mu s}{\sqrt{1-(0.99)^2}} \approx 22 \mu s$$

$$N = N_0 \exp\left(-\frac{20}{22}\right) \approx \frac{N_0}{3} \quad \leftarrow \text{coeristente con le osservazioni!}$$

Il μ in volo vive più a lungo!

Paradosso dei gemelli

(21)

x Gemello A sulla terra

x Gemello B sull'astronave a $v = c/2$

→ tornerà indietro

~~All'inizio~~ A vede B in moto $\tau_B \rightarrow \gamma \tau_B$
e il tempo di B rallenta: B rimane giovane

B vede A in moto $\tau_A \rightarrow \gamma \tau_A$

il tempo di A rallenta: A rimane giovane

Quando si incontrano chi è più giovane?

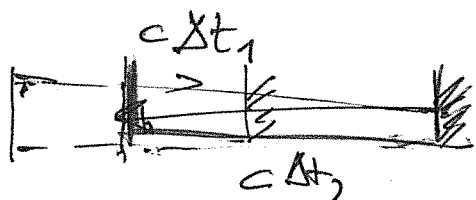
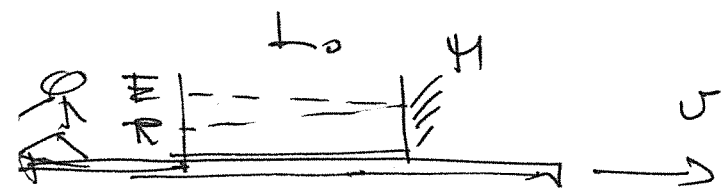
x Soluzione B per andare e tornare deve cambiare direzione, non è inerziale nel corso del suo viaggio ~~lungo~~

Quindi l'analisi sopra non può essere applicata nei termini in cui è presentata

x L'evidenza sperimentale è che ~~gli orologi~~ i
tempi si dilatano per sistemi come B

CONTRAZIONE LUNGHEZZE

Stesso apparato usato per Δt , ma con il moto nella direzione dell'esp.



questa è L e non L_0 , perché è la lunghezza per l'osservatore che vede il moto

$$c\Delta t_1 = L + v\Delta t_1 \Rightarrow \Delta t_1 = \frac{L}{c-v}$$

$$c\Delta t_2 = L - v\Delta t_2 \Rightarrow \Delta t_2 = \frac{L}{c+v}$$

~~Lunghezza~~ tempo complessivo:

$$\Delta t = \Delta t_1 + \Delta t_2 = \frac{2L}{c} \frac{1}{(1-\beta^2)} \quad (*)$$

D'altra parte per la relazione sui tempi; per S' e S :

$$\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{2L_0}{c} \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad (**)$$

Combinando (*) e (**)

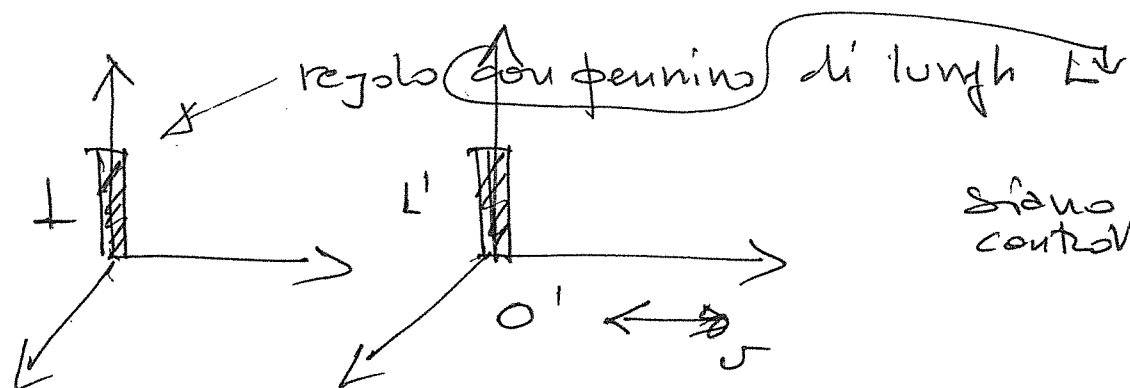
$$\frac{2L}{c} \frac{1}{(1-\beta^2)} = \frac{2L_0}{c} \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$L = L_0 \sqrt{1-\beta^2} \Rightarrow \boxed{L = \frac{L_0}{\gamma}}$$

(29)

Si noti che le lunghette trasverse alla
direzione del moto non subiscono
nessuna modifica

GEDANKEN EXP. DUE SIST INERZIALI con v relativa



La reciprocità del moto fa vedere L' e L
in moto relativo rispetto a S e S'

Se incrociandoli risultasse dalla teoria del
pennino $L' > L$ o viceversa, entrambi
gli osservatori concluderebbero che i
due sistemi non sono equivalenti, in
contraddizione col principio di relatività