

Fluidi REALI $\vec{F}_t \neq 0$ Attriti interni (8)

Teorema di Bernoulli non è valido, poiché non include l'energia dissipata per attrito (ossia il lavoro delle forze di attrito) -

Sia E_A = en. dissipata per attrito per unità di volume

Potremmo scrivere:

$$\frac{1}{2} \rho v_1^2 + \rho g h_1 + p_1 = \frac{1}{2} \rho v_2^2 + \rho g h_2 + p_2 + E_A$$

Per sostenere un flusso con portata ~~non~~ $(Q = S v)$ non nulla ~~in un condotto~~ e ~~orizzontale~~ costante ($v = \text{cost}$) in un condotto orizzontale: ~~il che deve essere~~

$$p_1 = p_2 + E_A \Rightarrow p_1 - p_2 = E_A$$

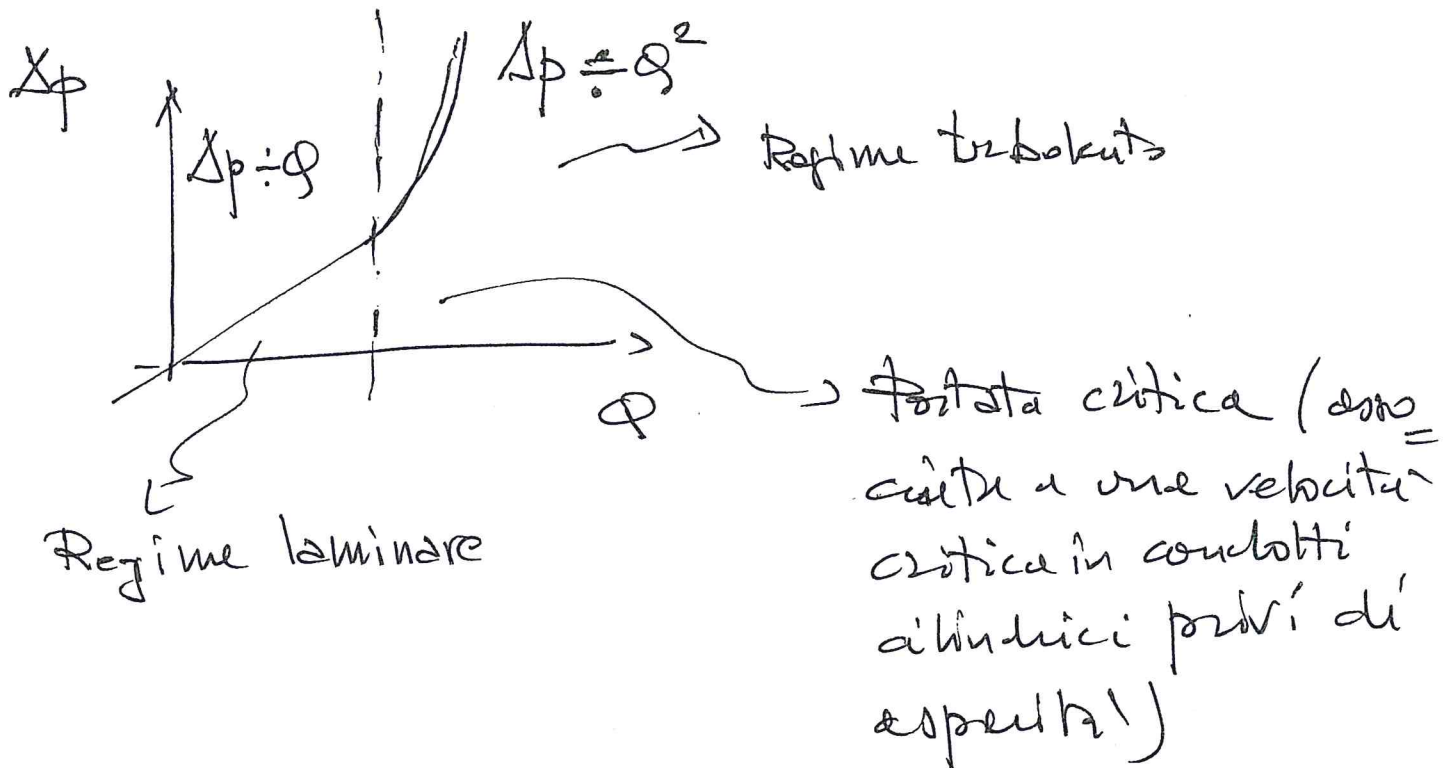
Per far scorrere il fluido deve essere mantenuta una differentia di pressione ai capi del condotto.

Se $\Delta p = 0 \Rightarrow Q = 0$ in un fluido reale (9)

Per $\Delta p \neq 0$, si trova una relazione empirica che collega Δp alla portata

$$\Delta p = R Q$$

R = resistenza idraulica



Laminare : scorrimento dei elementi di fluido gli uni sugli altri

Turbolento : vortici interni

— Lavoro per sostenere un flusso e potenza della pompa idraulica —

In un fluido reale serve lavoro esterno (Δp) per sostenere un flusso.

(10)

Lavoro del fluido: $dL = \Delta p \cdot dV$

Potenza: $W = \frac{dL}{dt} = \Delta p \cdot \frac{dV}{dt} = \Delta p \cdot Q$

In regime turbolento la potenza cresce di più che in regime laminare, a parità di portata

Esempio: Lavoro del cuore

$$Q = 5 \text{ l/min} = 80 \text{ cm}^3/\text{s} = 80 \times 10^{-6} \text{ m}^3/\text{s}$$

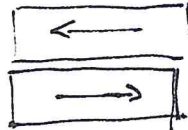
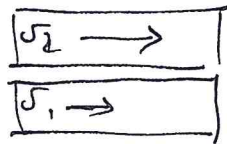
$$\Delta p = 100 \text{ mmHg} = \frac{100 \text{ mmHg}}{760 \text{ mmHg}} \cdot 1.013 \times 10^5 \text{ Pa}$$

$$W = 80 \times 10^{-6} \text{ m}^3/\text{s} \cdot \frac{100}{760} \times 1.013 \times 10^5 \text{ Pa} \approx \underline{\underline{1 \text{ W}}}$$

— 0 —

Per meglio definire R , e la separazione tra regime turbolento e laminare occorre definire le proprietà (empiriche) degli attriti interni

In condizioni di scorrimento tra due elementi di fluido compare una forza di attrito tangenziale, detta di ATTRITO INTERNO, con verso contrario a quello della velocità relativa.



Forze di attrito tra gli elementi uguali e opposte

~~forza e velocità~~

La forza sullo strato più veloce è ritardante (decelera) mentre in quello più lento è accelerante (determina l'acceleramento) -

L'attrito è descritto empiricamente dalla legge:

$$dF_t = \eta \, dS \, \frac{dv}{dy}$$

dS = superficie di contatto

$\frac{dv}{dy}$ = ~~derivata~~ ^{gradiente} della velocità nella direzione ortog. all'area di contatto
è una dist. non una direzione

η = viscosità del fluido

η è una proprietà indep. dalla

geometria (che è contenuta in dS e $\frac{dv}{dy}$)

$$[\eta] = \left[\frac{ML^{-1}T^{-2}}{L^{-2}} \frac{L}{L^{-1}T} \right] = ML^{-1}T^{-1}$$

Nel SI $1 \text{ kg s}^{-1} \text{ m}^{-1}$ ~~è detta~~ ^{si chiama} $1 \text{ Pa s} = 10 \text{ poise}$

Viscosità tipiche

12

acqua	$\eta \sim 10^{-2}$ poise	(1 centipoise)
sangue	$\eta \sim 0.02$ poise	← interesse fisiologico
oli lubrific.	$\eta \sim 2$ poise	
vetro, pece	$\eta \sim 10^{11}$ poise	
gas	$\eta \sim 10^{-4}$ poise	

Lo scorrimento avviene all'interno del fluido. Alle pareti dei condotti non c'è scorrimento, ma si forma uno strato limite, di pochi strati molecolari nel quale scorrono gli strati interni. → Il moto di un contenitore in estensione, ad esempio, determina il moto di trascinamento del fluido in esso contenuto

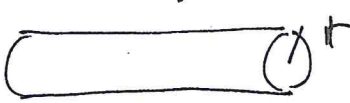
FLUIDI IDEALI:

- Fluidi privi di attrito interno $\eta = 0$
 - Incompressibili $\rho = \text{cost}$
- x Poiché $\eta = 0$, non ci sono forze tangenziali ma anche in moto compaiono solo forze normali tra gli elementi di fluido
- x Un fluido ideale in moto ha sempre solo campi normali, come è il caso per tutti i fluidi (ideali e reali) in condizioni statiche che si traducono infatti: $\frac{d\sigma}{dn} = 0 \Rightarrow dF_{\tau} = 0$

Eq. di Poiseuille (calcolo dimensionale)

(13)

Condotta orizzontale di lunghezza l e raggio r -

 $\Delta p \div L_{\text{attivo}} \div \langle v \rangle l$

ove $\langle v \rangle$ è la velocità media di scorrimento
del fluido (attrito viscoso $\div 5$)

Tutto ipotizzato dip. da η, ρ, r :

$$\Delta p \div \eta^a r^b \rho^c \langle v \rangle^d$$

$$[\Delta p] = M L^{-1} T^{-2} = M^a T^{-a} L^{-a} L^b M^c L^{-3c} L T^{-1} L^d$$

$$\Rightarrow a = 1 \quad \text{per la dip. da } T$$

$$c = 0 \quad M \text{ è ok con } a = 1$$

$$b = -2 \quad \text{per sistemare } L$$

$$\Delta p \div \eta r^{-2} \langle v \rangle^d$$

$$\Delta p \div \frac{\eta l}{\pi r^4} \pi r^2 \langle v \rangle$$

$$\Delta p \div \frac{\eta l}{\pi r^4} \quad Q$$

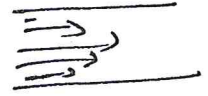
$$\text{Calcolo esatto! } R = \frac{\eta l}{8 \pi r^4}$$

Calcolo esatto:

(14)

Portata $dQ = dS \cdot v$

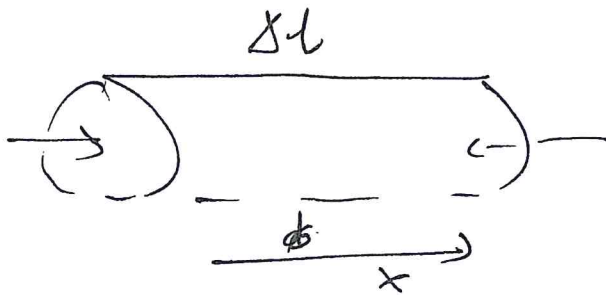
profilo di
velocità



$$Q = \int_0^a dQ = \int_0^a 2\pi r dr \cdot v(r)$$

a = raggio del
condotto

Per trovare il profilo di velocità $v(r)$, si
isola tubo di flusso - in condizioni



stazionarie $F_{p,les}^{tot}$

sono bilanciate dalle
forze di attrito F_t

$$F_t + F_p^{tot} = 0 \quad \Rightarrow \quad F_t = -F_p^{tot} \quad (*)$$

$$1) F_{p,les}^{tot} = -\pi r^2 \frac{dp}{dx} \Delta l$$

$$\frac{dp}{dx} < 0 \Rightarrow \Delta p > 0$$

$$2) F_t = \eta (2\pi r \Delta l) \frac{dv}{dr}$$

Sostituendo in (*) e separando le variabili

$$\frac{1}{4\eta} \frac{dp}{dx} r dr = dv \quad \Rightarrow \quad v = \frac{1}{4\eta} \left| \frac{dp}{dx} \right| r^2 + K$$

La costante di integrazione si trova ponendo $v=0$
per $r=a$ (parete del condotto)

$$v = \frac{1}{4\eta} \left| \frac{dp}{dx} \right| (a^2 - r^2)$$

Integrale della portata:

$$\begin{aligned}
 Q &= \frac{\pi}{2\eta} \left| \frac{dp}{dx} \right| \int_0^a (a^2 - r^2) r dr \\
 &= \frac{\pi}{2\eta} \left| \frac{dp}{dx} \right| \left[\frac{a^2 r^2}{2} - \frac{r^4}{4} \right]_0^a = \\
 &= \frac{\pi}{8\eta} a^4 \left| \frac{dp}{dx} \right|
 \end{aligned}$$

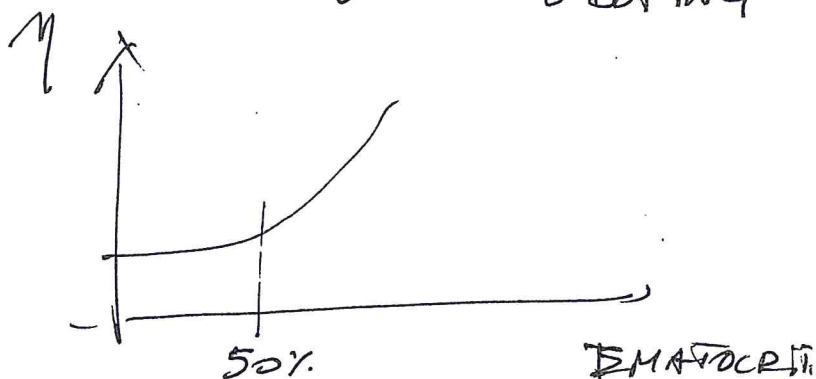
Per un condotto di lunghezza finita l :

$$dp = \frac{8}{\pi} \frac{\eta}{a^4} dx \cdot Q$$

$$\Delta p = \frac{8}{\pi} \frac{\eta l}{a^4} Q$$

$\hookrightarrow$ dip. inversa $1/a^4 \rightarrow$ Adalt. carottero

$\eta \rightarrow$ EMATOCRITO EDORING



Regime TURBOLENTO

(16)

In condotti cilindrici la legge di Poiseuille cessa di valere per $v > v_c$ oltre la qual velocità critica si ha regime turbolento

$$v_c = R \left(\frac{\eta}{\rho r} \right)$$

$$R \approx 1200$$

$\leadsto$ Dipendenza deducibile da analisi dimensionale

Per il sistema cardiovascolare 1) raggi
d'aorta è max $\rightarrow v_c$ minima

2) velocità
e max nell'aorta $\rightarrow$ sistema complessivo ~~di minima~~ ^{complessivo}
con la moltiplicazione

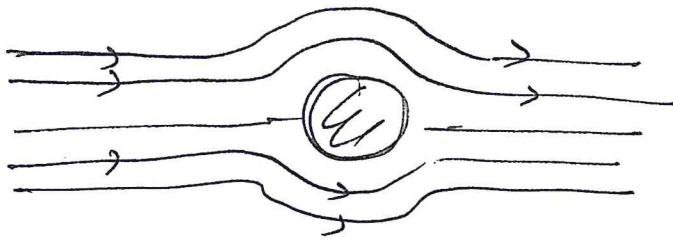
$\rightarrow$ Contorno di v_c in ~~velocità~~ : se OK, ok
doppio tutto.

$$v_c = \frac{1200 \times 0.025 \text{ g cm}^{-1} \text{ s}^{-1}}{1 \text{ g/cm}^3 \cdot 1 \text{ cm}} = 60 \text{ cm/s}$$

$v_c \approx 2 v_s \rightarrow$ Regime laminare, ma
non di molto.

Resistenza del moto

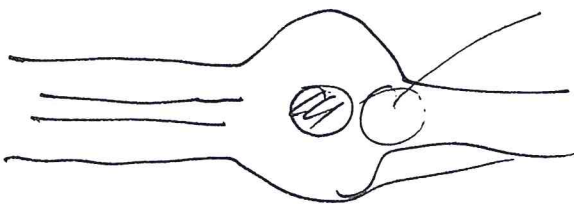
(17)



no Δp - flusso
potenziale

Moto di caduta
equiv. a scorrimento
del fluido attorno al
corpo $\rightarrow$ Fenomeno
descritto dallo stesso prin
cipio

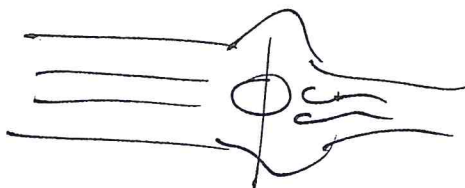
- Fluido ideale



$$\Delta p = \frac{1}{2} \rho v^2$$

per linee
di flusso per

- Resist. $\rightarrow$ viscosità



S

$$F = \frac{1}{2} \rho v^2 S C$$

coefficiente empirico
 $C \approx \frac{24}{Re}$

Per sfera: $F = 6\pi\eta R v$

(Dall'ass. che $v = \text{cost}$ per $t \rightarrow \infty$
si deduce $F \propto v \Rightarrow$ dip. da η e R per
analisi dimensionale)

$\rightarrow$ Sedimentazione centrif.

$$F_{\text{peso}} + F_{\text{Arch}} + F_{\text{centrif.}} = 0$$

$$\underline{v = \text{cost}}$$

— Moto turbolento

v_c dipende da η, ρ, R

Analisi dimensionale delle dip.

$$[v_c] \div [\eta^a \rho^b R^c]$$

$$LT^{-1} = M^a L^{-a} T^{-a} M^b L^{-3b} \cancel{L^c}$$

$$T : a = 1$$

$$M : a = -b \Rightarrow b = -1$$

$$L : c = 1 + a + 3b = -1$$

$$v_c \div \frac{\eta}{\rho R}$$

La costante di proporzionalità è ricercata empiricamente e vale, per condotti rettilinei privi di spigoli, ~~circa 1200~~

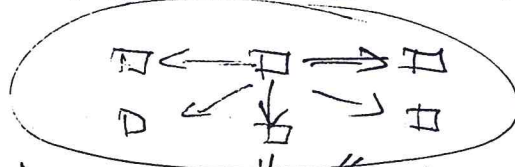
$$v_c = R \cdot \frac{\eta}{\rho R}$$

Es. v_c in acqua

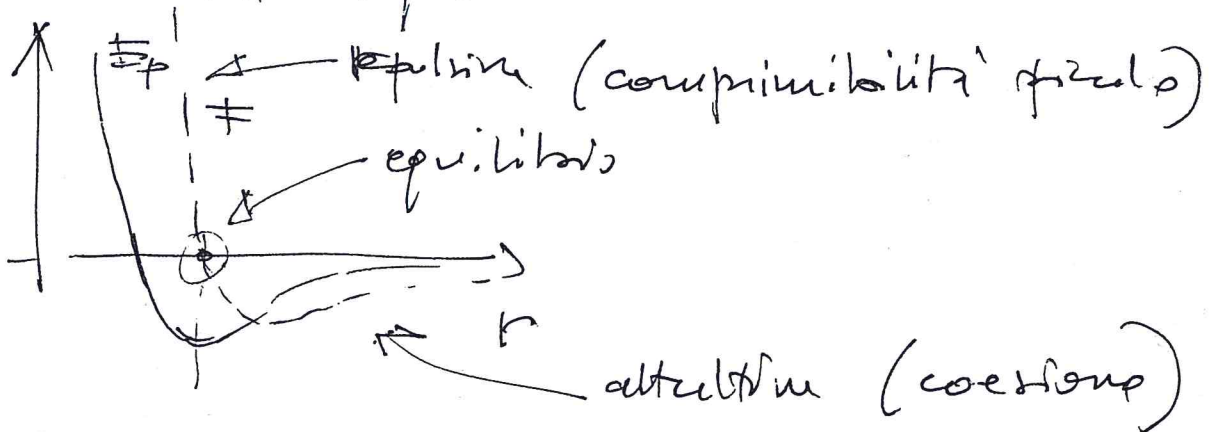
Tensione Superficiale

(1)

- Forte di coesione tra le molecole del liquido (attrattive) si manifesta alla superficie libera richiamando le molecole nel liquido.



→ Definiscono il "volume proprio" di un liquido



- L'aumento della superficie libera di un liquido non avviene senza l'apporto di lavoro. → tensione superficiale definita per via empirica:

$$dW = \gamma dA \quad [\gamma] = \left[\frac{\text{Lavoro}}{\text{Sp.}} \right] = [\text{Forza/Lunghezza}]$$

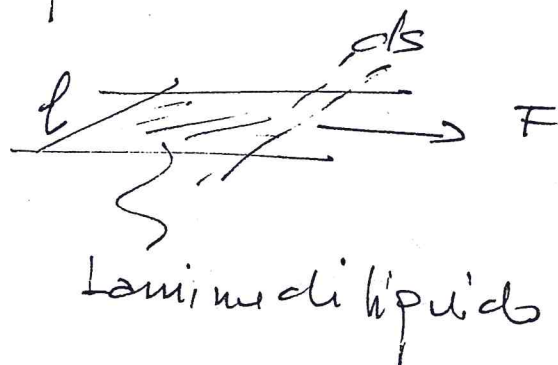
→ i liquidi si dispongono in modo da minimizzare la sup. libera (a parità di volume) → gocce sferiche

Definizione di τ analogo, come
forza per unità lineare di lunghezza.

→ taglio nella superficie di ungh. ~~ds~~

$$dF = \tau ds \quad \leftarrow \text{def. analogo alla tensione del filo}$$

È equivalente:



$$dW = l \cdot ds \cdot \tau$$

$$= ds \cdot F$$

$$\Rightarrow \boxed{F = \tau \cdot l}$$

$$\underline{\int dW = \tau dA}$$

Questa tecnica consente la misura di τ

- Valori di τ caratteristici $10 - 30 \times 10^{-3} \text{ N/m}$

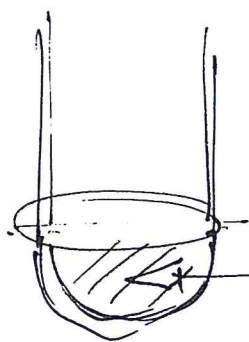
dipendono anche dal liquido esterno:

aria / acqua
olio / acqua

| τ_{H_2O} differente nei
due casi, poiché
diff. forze di adesione
al vetro vicino

(3)

Misura di γ : stalagmometro.



$$M_g = 2\pi r \gamma$$

→ goccia si stacca.

— Formula di Laplace (valide anche per membrane elastiche) — Relazione tra Δp e γ per una bolla sferica



ϕ insiste su πR^2

$$F_\phi = \pi R^2 \cdot \phi$$

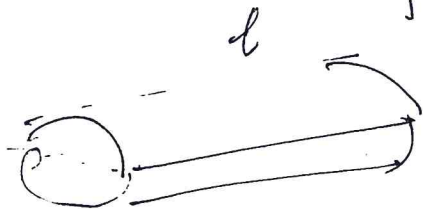
$$F_T = \gamma 2\pi R$$

Equilibrio bolla:

$$\boxed{\phi = \frac{2\gamma}{R}}$$

* Bolla di sapone minore richiederà γ minore per sostenere lo stesso Δp — Cuore infarctato

* Vale anche per condotti cilindrici

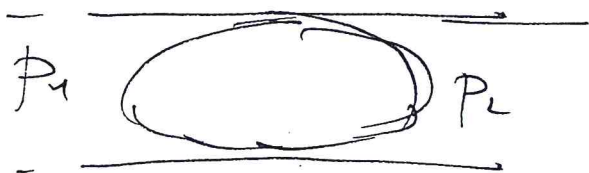


$$\boxed{\phi = \frac{\gamma}{2R}}$$

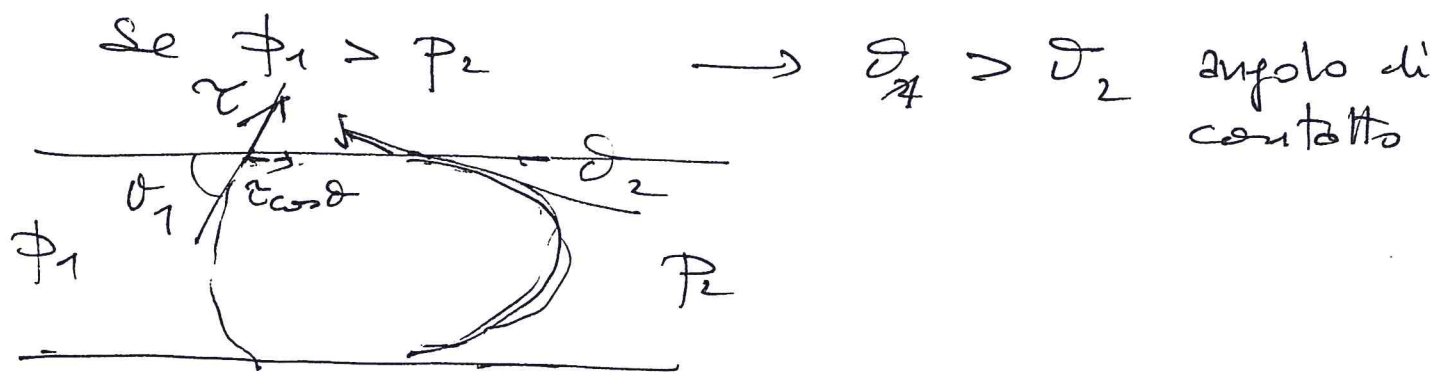
coeff. diff.
me stessa dip.

Embolia gassosa

(4)



Equilibrio $\phi_1 = \phi_2$ e stessa legge di curvatura delle bolle delle due parti



$$\begin{aligned} \text{Pressioni: } \phi_1' &= \phi_1 + \frac{F_T}{\pi r^2} = \\ &= \phi_1 + \frac{\tau \cos \theta_1 2\pi r}{\pi r^2} \\ &= \phi_1 + \frac{2\tau}{r} \cdot \cos \theta_1 \\ \phi_2' &= P_2 + \frac{2\tau}{r} \cos \theta_2 \end{aligned}$$

$$\Delta \phi' = \Delta \phi + \frac{2\tau}{r} (\cos \theta_1 - \cos \theta_2) < \Delta \phi$$

La pressione ai capi è minore di $\Delta \phi$ e l'embolo si ostruisce il flusso.
Può bloccarlo, se $\Delta \phi' \rightarrow 0$