FLUIDI REALI : $\vec{F}_t \neq 0$

* Attriti interni con $\vec{F}_t \neq 0$ (anche se ~~nuovi~~ sufficienti a determinare una condizione di equilibrio statico rispetto a ~~nuovi~~ sforzi tangenziali)

* Teorema di Bernoulli non valido, poiché non include l'energia dissipata dal lavoro delle forze di attrito

Sia E_A = en. dissipata per attrito per unità di volume

Possiamo scrivere:

$$\frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g h_1 + p_1 = \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g h_2 + p_2 + E_A$$

Immaginiamo un condotto orizzontale ($h_1 = h_2$) e con sezione costante $\rightarrow v_1 = v_2$.
Per sostenere un flusso a portata non nulla si deve avere:

$$p_1 = p_2 + E_A \Rightarrow p_2 - p_1 = E_A$$

Per far scorrere il fluido deve essere mantenuta una differenza di pressione ai capi del condotto (tramite immissione di lavoro di pressione con una pompa, ad esempio)

E_A non è calcolabile, dobbiamo procedere per via empirica!

Fluidi Reali

Forze dissipative interne: Attriti

→ di natura tangenziale, si oppongono allo scorrimento degli strati di fluido

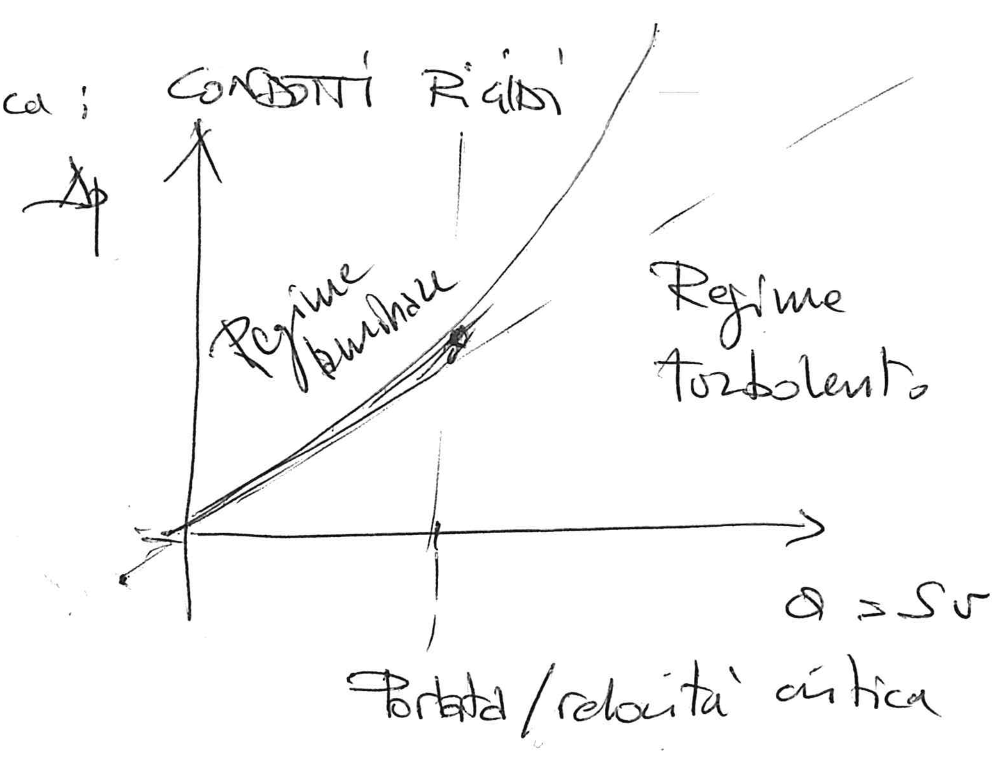
→ Non possono determinare equilibrio statico, ma possono det. ~~attrito~~ equilibrio dinamico (moto a v = cost)

Trattazione empirica: E_A = en. dissipata per attrito per unità di volume

$p_1 - p_2 = E_A$ condotto orizzontale per v = cost

$\Delta p > 0$ per sostenere un flusso con portata $Q > 0$

Oss. empirica: CONDOTTI RIGIDI



In regime <u>laminare</u>

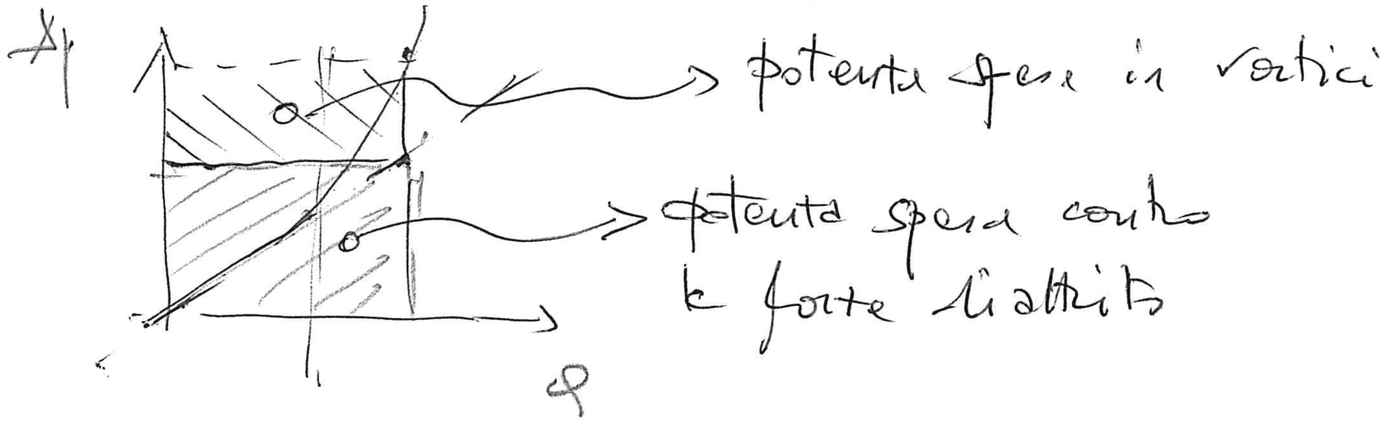
$$\Delta p = R\, Q \qquad R = \text{resistenza idraulica}$$

$$[R] = Pa/(m^3/s)$$

In regime turbolento $\Delta p \sim Q^2$. Dissipazione in attriti (come in regime laminare) e in vortici (anche udibile acusticamente).

<u>Potenza</u> dissipata nel trasporto di un fluido:

$$P = \frac{dW}{dt} = \Delta p \frac{dV}{dt} = \Delta p \cdot Q$$



Il trasporto in regime laminare è (sarebbe) meno dispendioso, a parità di portata

- Esempio: Lavoro (Potenza) del cuore

$$Q = 5\ l/m \simeq 75 \times 10^{-6}\ m^3/s$$

$$\Delta p = 100\ mmHg$$

↳ sul grande circolo

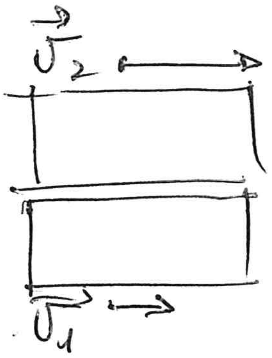
$$P = \Delta p \cdot Q = 100\ mmHg\ \frac{\cancel{10}\ 10^5\ Pa}{750\ mmHg}\ 75 \times 10^{-6}\ m/s =$$

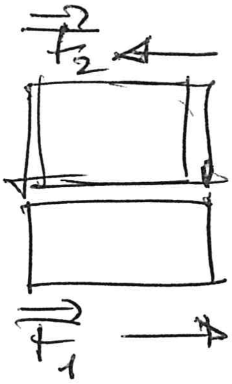
$$\simeq 1\ W \quad !$$

- Calcolo della potenza ~~forza~~ e' valido sempre, indip. del regime. Per meglio specificare R e la separazione tra regime turbolento e laminare occorre definire le proprietà (empiriche) degli attriti interni.

Attrito in fluidi reali

Scorrimento tra due elem. di fluido
→ forza di attrito tangenziale (ATTRITO INTERNO)
con direzione <u>OPPOSTA</u> alla <u>velocità relativa</u>





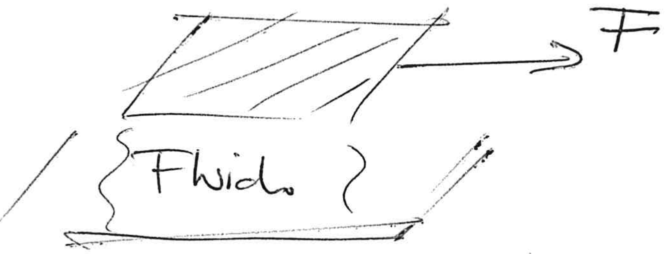
$\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$
(azione/reazione)

La forza sullo strato a vel. maggiore è RITARDANTE (decelera), la forza sullo strato a vel. minore è TRASCINANTE (accelera).

In condizioni stazionarie dv = cost → Equilibrio dinamico

→ le forze tang. non limitano lo scorrimento (non si raggiunge eq. statico) ma comp. eq. dinamico

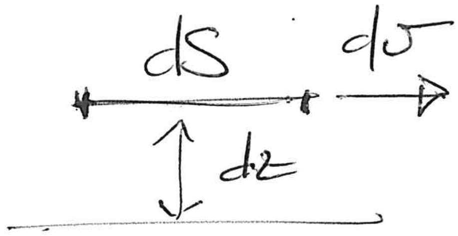
Si può sfruttare l'<u>equilibrio dinamico</u> per definire in modo empirico la forza



se $\vec{F} = -\vec{F}_t$
velocità di trascinam. costante, quindi $\vec{F}$ "misura" la forza di attrito

Legge empirica:

$$dF_p = \eta \, dS \, \frac{dv}{dz}$$



$\eta \equiv$ viscosità del fluido non dipende da fattori geometrici (separati in dS e dz)

$$[\eta] = \left[\frac{dF}{dS} \cdot \frac{dz}{dv}\right] = [\text{Pressione Tempo}]$$

$$= M L^{-1} T^{-1}$$

Unità di misura in SI $[\eta] = \text{Pa s}$

(unità storica poise è 1 Poise = 0.1 Pa s)

$\eta(H_2O) \sim 10^{-3}$ Pa s

$\eta(\text{sangue}) \sim 5 \cdot 10^{-3}$ Pa $\cdot$ s

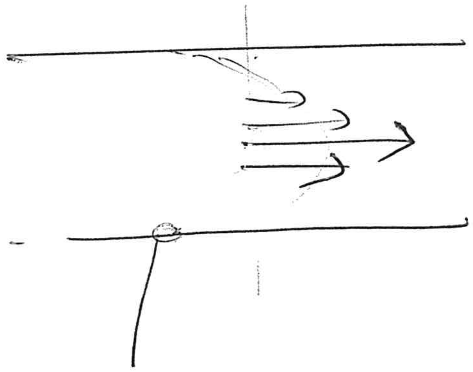
$\eta(\text{gas}) \sim 10^{-5}$ Pa $\cdot$ s

$\eta(\text{oli}) \sim 10^{-1} - 1$ Pa $\cdot$ s

$\eta(\text{vetro/Pece}) \sim 10^{10}$ Pa $\cdot$ s

Note

Profilo di velocità nei condotti



v_{max} al centro del condotto

$\div \frac{dv}{dz}$

$v = 0$ alle pareti ($dz \to 0$) $dv \to 0$

Fluido ideale: $F_t = 0$ perché $\eta = 0$

v = cost nel condotto

⇝ Solo forze normali ~~sta~~ in moto ~~sta~~ statiche

— Eq. di continuità nei fluidi reali

$$Q = S v = \text{cost} \Longrightarrow \underline{S \langle v \rangle = \text{cost}}$$

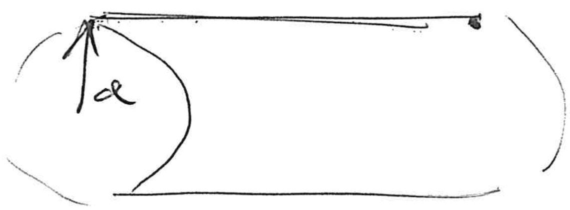
Nei fluidi reali non ci sono forze tangenziali solo nel limite statico:

$$\frac{dv}{dt} = 0 \longrightarrow F_t = 0$$

Nel ~~caso~~ caso dinamico $F_t \neq 0$, ma non determina mai condizioni di equilibrio con $v \neq 0$

Velocità critica e regime turbolento

- Condotto rigido di raggio a e privo di asperità —



- In termini generali v_c potrà dip. da parametri geometrici : a
  " del fluido : η, ρ

$$v_c \div a^{\alpha} \eta^{\beta} \rho^{\gamma} \qquad \text{(proporzionale)}$$

$$[L T^{-1}] = [L^{\alpha} M^{\beta} L^{-\beta} T^{-\beta} M^{\gamma} L^{-3\gamma}]$$

La condizione che la relazione abbia le stesse dimensioni a primo e secondo membro impone :

$\beta = 1$ (T^{-1} a entrambi i membri)

$\beta = -\gamma$; $\gamma = -1$ (M si elidono)

$\alpha = -1$ (per L)

Da queste relazioni si deduce per analisi dimensionale:

$$v_c \doteq \frac{\eta}{\rho a}$$

La costante di proporzionalità non può essere definita dall'analisi dimensionale. E' ricavata empiricamente, e Per condotti rettilinei, privi di asperità, si ottiene:

$$v_c = R \frac{\eta}{\rho a}$$

$R \simeq 1200$ — numero di Reynolds

Note: Per geom. def., v_c maggiore in fluidi di alta viscosità

Per η, ρ definiti (stesso fluido), v_c maggiore nei vasi di raggio ~~mag~~ minore

→ Esempio: nel sistema cardiocircolatorio la v_c è minore in aorta che altrove (vaso di raggio maggiore)

Esercizio : Calcolo del regime di trasporto in aorta (8)

$$v_a = 30 \ cm/s$$

$$\eta = 5 \cdot 10^{-3} \ Pa \ s$$

$$\rho = 10^{3} \ kg/m^{3}$$

$$a = 10^{-2} \ m \qquad (1 \ cm)$$

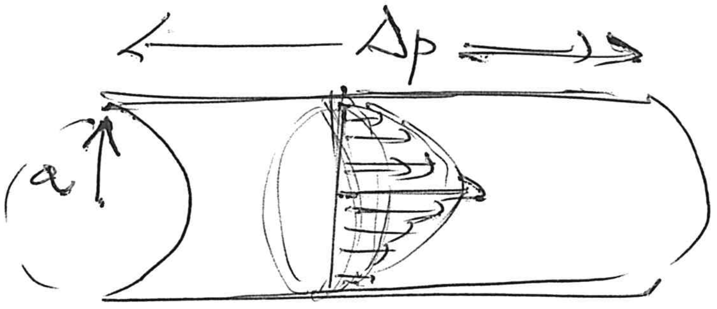
$$v_c = 1{,}200 \cdot \frac{5 \times \cancel{10^{-3}}^{-1} \ Pa \cdot s}{\cancel{10^{3}} \ kg/m^{3} \cdot \cancel{10^{-2}} \ m} \simeq 0.6 \ m/s$$

$$v_c \simeq 2 \, v_a$$

→ Flusso in regime laminare, ma quasi al limite

→ Selezione naturale (si noti che sotto sforzo Q cresce e v_a cresce)

Resistenza idraulica in un condotto cilindrico di raggio costante (resistenza vasale)



Profilo di velocità con $v(a) = 0$
$v(0) = v_{max}$

In termini dimensionali

$$\Delta p \doteq \langle v \rangle \, l$$

- con l lunghezza del condotto
- $\langle v \rangle$ velocità media

Poiché $\Delta p \doteq F_A \doteq \underbrace{F_{Attrito}}_{\text{Viscoso} \doteq \langle v \rangle} \cdot \underbrace{\text{Spostamento}}_{l}$

La relazione può dip. dalla geom (a) e dalle prop. del fluido: η, ρ

$$\Delta p \doteq \eta^{\alpha} \rho^{\beta} a^{\gamma} \langle v \rangle \, l$$

Analisi dimensionale:

$$[M L^{-1} T^{-2}] = [M^{\alpha} L^{-\alpha} T^{-\alpha} \; M^{\beta} L^{-3\beta} L^{\gamma} L T^{-1} L]$$

T : $\alpha = 1$

M : $\beta = 0$

L : $\gamma = -2$

Dunque:

$$\Delta p \doteq \frac{\eta \langle v \rangle l}{a^2}$$

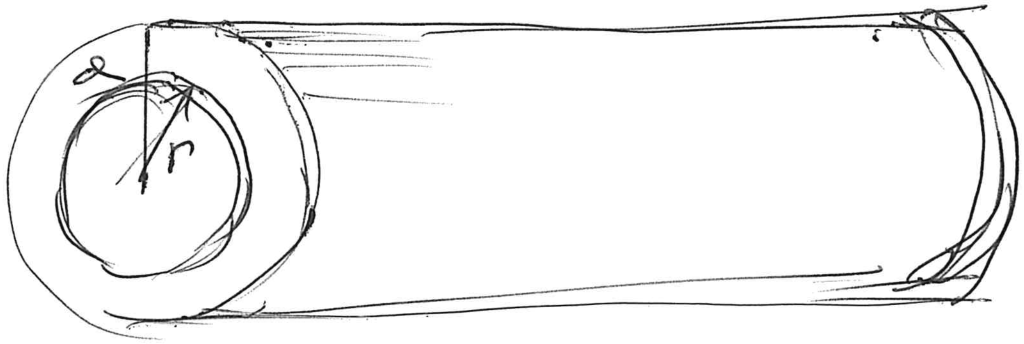
Sto cercando una relazione tra Δp e Q ($\Delta p = R Q$), dunque: $Q = \pi a^2 \langle v \rangle$

$$\Delta p \doteq \frac{\eta l}{a^4} \; Q$$

- Dip. notevole da $1/a^4$
- Adattamento cardiovascolare ad esempio

Per trovare il coefficiente di prop. si deve procedere al calcolo differenziale

Calcolo Esatto (Eq. di Poiseuille)

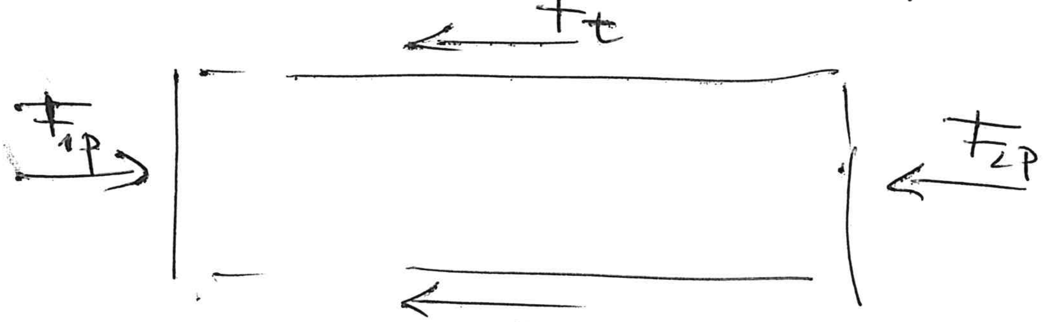


dQ = flusso nella corona $2\pi r\,dr$ tra r e $r+dr$

$$Q = \int_0^a dQ = \int_0^a (2\pi r\,dr) \cdot v(r)$$ Portata

Per trovare il profilo di velocità:

1. $v(a) = 0$; $v(0) = v_{max}$
2. Per ogni tubo di flusso di raggio r, $v(r) = \text{cost}$. Dunque la risultante delle forze tangenziali sulla superficie esterna di raggio r, e delle forze di pressione è nulla (eq. dinamico)



$$\vec{F}_p + \vec{F}_t = 0$$

Forze su condotto di lunghezza l

1) F_t : relazione empirica con viscosità

$$F_t = \eta \, 2\pi r \, l \, \frac{dv}{dr}$$

2) F_p : differenza di pressione agli estremi del condotto per superficie (sezione) del condotto

$$F_p = +\Delta p \, S$$
$$= -\frac{dp}{dx} \, l \cdot \pi r^2$$

(segno negativo al gradiente, perché la pressione diminuisce al crescere di x)

Da cui:

$$F_t = -F_p \implies \eta 2\pi r \cancel{l} \frac{dv}{dr} = \frac{dp}{dx} \cancel{l} \pi r^2$$

separando le variabili:

$$dv = \frac{1}{2\eta}\left(\frac{dp}{dx}\right) \cdot r \, dr$$

$$v(r) = \frac{1}{4\eta}\left(\frac{dp}{dx}\right) r^2 + cost$$

Dalle condizioni al contorno:

$$v(a) = 0$$
$$v(0) = v_{max}$$

$$v(r) = \frac{1}{4\eta}\left(\frac{dp}{dx}\right)(a^2-r^2)$$

Sostituendo nell'equazione per la portata:

$$Q = \int_0^a 2\pi r\, dr \cdot \frac{1}{4\eta}\left(\frac{dp}{dx}\right)(a^2-r^2) =$$

$$= \frac{\pi}{2\eta}\frac{dp}{dx}\int_0^a (a^2 r - r^3)\, dr =$$

$$= \frac{\pi}{2\eta}\frac{dp}{dx}\left[\frac{a^2r^2}{2} - \frac{r^4}{4}\right]_0^a =$$

$$= \frac{\pi}{8\eta}\frac{dp}{dx}\, a^4$$

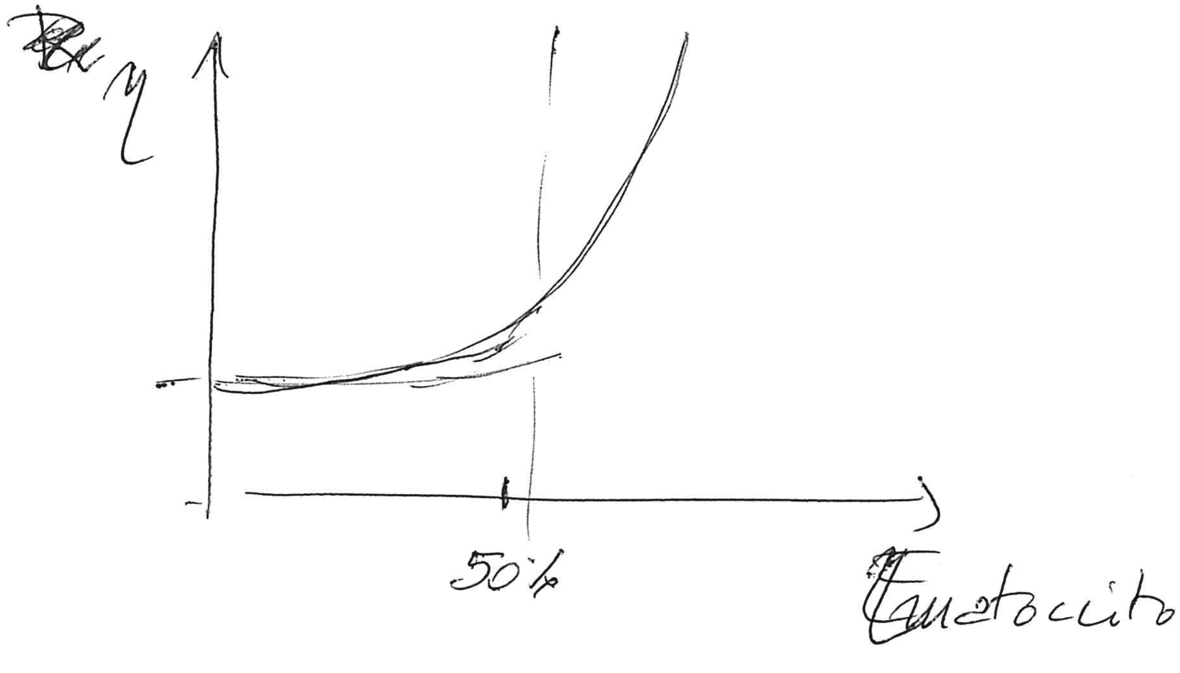
$\longrightarrow$ Resistenza idraulica di un tratto dx: $dR = \frac{dp}{Q} = \frac{8}{\pi}\frac{\eta\, dx}{a^4}$

Per un condotto di lunghezza finita:

$$R = \int_0^l dR = \frac{8}{\pi} \frac{\eta l}{a^4}$$

Dip. da a^{-4} notevole (già commentata)

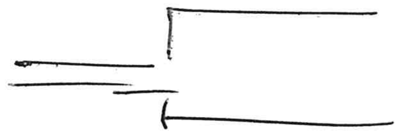
Dip. da η (sangue)



- Per concentrazione di globuli rossi superiore al 50% la resistenza vasale "esplode"
- Pericolo per la salute
- Doping: limite di ematocrito a 50%

Sistemi di resistenze

Serie



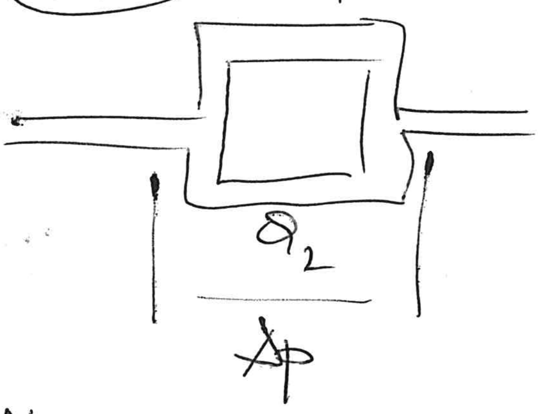
Portata costante: $Q_1 = Q_2 = Q$

Caduta di pressione: $\Delta p = \Delta p_1 + \Delta p_2$

$$\Delta p = \Delta p_1 + \Delta p_2 = R_1 Q_1 + R_2 Q_2$$
$$= (R_1 + R_2)\, Q$$

$\Rightarrow R = R_1 + R_2$ le resistenze idrauliche in serie si sommano

Parallelo



$\Delta p_1 = \Delta p_2 \equiv \Delta p$

Portata costante in ogni sezione completa:

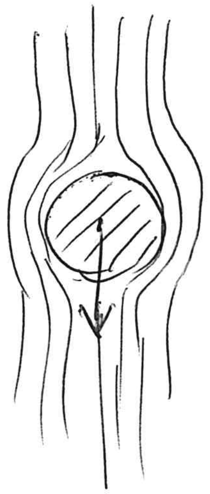
$$Q = Q_1 + Q_2$$

$$\Delta p = R(Q_1 + Q_2)$$

$$\frac{1}{R} = \frac{Q_1}{\Delta p} + \frac{Q_2}{\Delta p}$$

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$ somma degli inversi

Resistenza del mezzo



Moto di caduta di un corpo in un fluido, equivalente allo scorrimento del fluido attorno al corpo → Fenomeno descritto dal parametro η

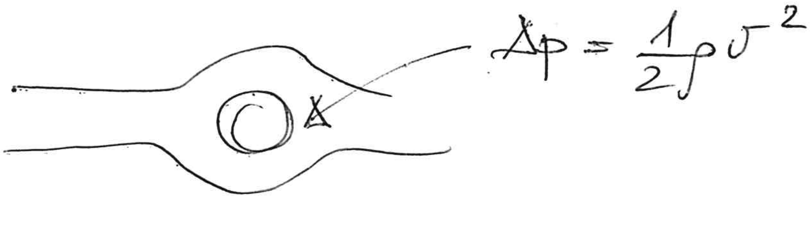
Attrito viscoso: $F \div \eta v$

Per una sfera di raggio R:

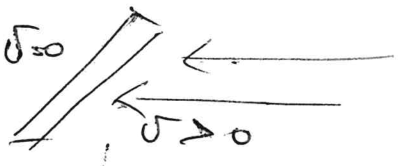
$$F = 6\pi\eta R v$$

legge di Stokes
usata nella misura di η

* Spiegazioni del risultato "qualitative" e non del tutto soddisfacenti



* Portanza



$p + \frac{1}{2}\rho v^2 = \text{cost}$

non torna grandi