DINAMICA DEI FLUIDI

1) METODO DI LAGRANGE: Descrizione del moto del fluido tramite legge oraria di ogni elemento (punto materiale) di fluido:

$\vec{X}_i = \vec{X}_i(\vec{X}_{0i}, t) \quad i = 1, \dots N$ IMPRATICABILE

2) METODO DI EULERO: Descrizione tramite grandezze fisiche che caratterizzano lo stato di moto in determinati (tutti) i punti del fluido

$$\begin{cases} \vec{v} = \vec{v}(\vec{x}, t) \\ p = p(\vec{x}, t) \\ \dots \\ \dots \end{cases}$$

→ Non descrivono un elemento di fluido in moto.
Descrivono elementi diversi che si succedono nel punto di coordinate $\vec{x}$ al variare del tempo t

Ulteriore semplificazione nel REGIME STAZIONARIO

× stesse condizioni a tutti i tempi → la mappa delle velocità è immutabile

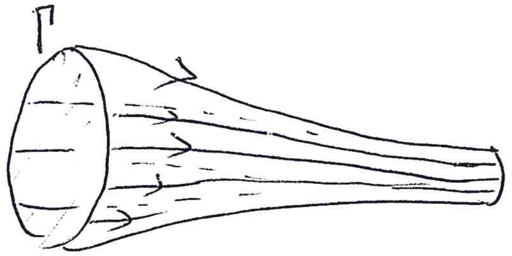
→ Nella descrizione di EULERO la variabile tempo può essere eliminata $\vec{v} = \vec{v}(\vec{x})$

→ Nella descrizione di LAGRANGE non è eliminabile (si vede traiettoria $\vec{x} = \vec{x}(\vec{x}_0, t)$)

LINEE DI FLUSSO (o di corrente) : linee geometriche che in ogni punto hanno direzione e verso della velocità ($\vec{v}$ è tangente alle linee di flusso).

- × Descrivono le traiettorie degli elem. di fluido
- × Non si intersecano (altrimenti nell'intersezione l'elemento di fluido avrebbe più di una velocità)

TUBO DI FLUSSO : ~~Nei per~~ Nei moti stazionari le linee di flusso ~~sono invariabili~~ hanno configurazione costante. Si definisce tubo di flusso la superficie definita da tutte le linee di flusso che partono da una linea chiusa Γ nel piano ortogonale alle linee di flusso



$$\vec{v} = \vec{v}(\vec{x})$$

Gli elementi interni al tubo non ne escono, quelli esterni non entrano (altrimenti le linee dovrebbero intersecarsi)

$\Rightarrow$ tubo di flusso individua una porzione di fluido separata dal resto del fluido e il cui moto può essere studiato valutando gli effetti del resto del fluido su di esso.

$\Rightarrow$ il tubo di flusso, al limite, può coincidere con l'intero condotto

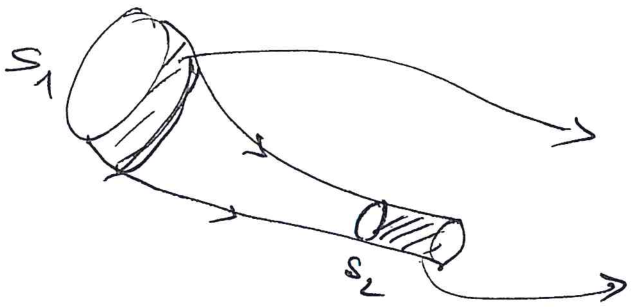
Nella descrizione dei moti sono importanti: proprietà del fluido e caratt. del moto:

1) comprimibili, incomprimibili ($\rho = cost$)
2) viscosi, non viscosi ($\vec{F}_t = 0$)
3) moto stazionario, non stazionario
4) moto irrotazionale (privo di vortici), rotazionale

Fluidi ideali: $\rho = cost$, $\vec{F}_t = \vec{0}$

Equazione di continuità e PORTATA

Rappresenta la conservazione della massa –



Moto stazionario:
qtà di fluido che entra nel tubo di flusso = qtà di fluido che esce dal tubo di flusso

$$\Delta m_1 = \rho_1 S_1 \Delta l_1 = \rho_2 S_2 \Delta l_2 = \Delta m_2$$

$$\rho_1 S_1 v_1 \Delta t = \rho_2 S_2 v_2 \Delta t$$

Poichè i punti sono generici: $\boxed{\rho S v = costante}$

– PER UN FLUIDO INCOMPRIMIBILE $\rho_1 = \rho_2$

$$\Longrightarrow \boxed{S_1 v_1 = S_2 v_2} \Longrightarrow \boxed{S v = costante}$$

La quantità $Q = Sv = \frac{\Delta V}{\Delta t}$ è detta PORTATA VOLUMET.

× Circuiti idraulici <u>chiusi</u> $\longrightarrow$ portata costante se fluido incomprimibile (o $\rho \simeq cost$ come nei gas con $v \ll v_{suono}$)

× Esempio: sistema cardiocircolatorio

$Q = 5\, l/min \sim 80\, cm^3/s$

$r_a = 1\, cm$ } Aorta

$v_a \sim 25\, cm/s$

$\langle r_c \rangle = 4\, \mu m$

$\langle v_c \rangle = 0.05\, cm/s$ } letto capillare

$N_c \sim 10^9$

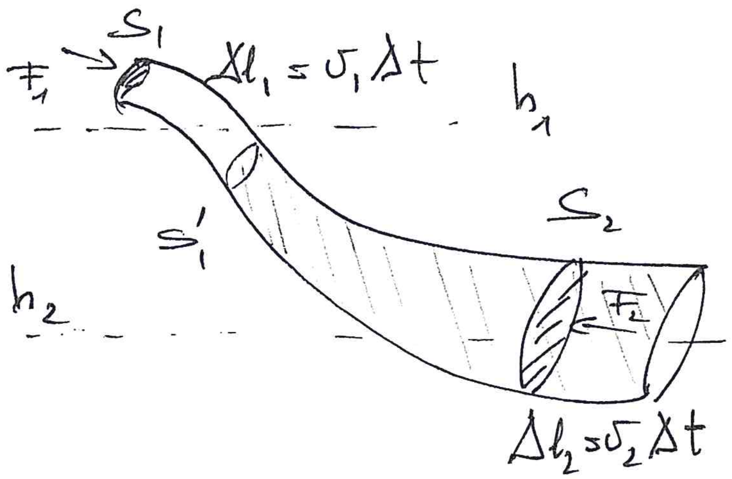
La portata è costante in ogni <u>sezione completa</u> del circuito idraulico

Teorema di Bernoulli

Esprime la conservazione dell'energia nel moto dei fluidi sotto le ipotesi di fluido ideale

1. Incomprimibile ($\rho = \text{cost}$)
2. Non viscoso ($\vec{F}_t = 0$)
3. Regime stazionario ($\vec{v} = \vec{v}(\vec{x})$)

[4. Irrotazionale (privo di vortici $\vec{\nabla} \times \vec{v} = 0$)]



- F_1 e F_2 sono forze di pressione sul tubo di flusso
- Forza peso è forza di volume

Poichè $\rho = \text{cost}$: $V_1 = S_1 \, v_1 \Delta t = S_2 v_2 \Delta t = V_2$

× Lavoro della forza peso: (il fluido tra S_1' e S_2 è neutro)

$$dW_1 = -dE_p = -\rho V g (h_2 - h_1) = \rho V g (h_1 - h_2)$$

× Lavoro di pressione:

$$dW_2 = \vec{F}_1 \cdot \vec{\Delta l_1} + \vec{F}_2 \cdot \vec{\Delta l_2} = p_1 S_1 \Delta l_1 - p_2 S_2 \Delta l_2 = (p_1 - p_2) V$$

× Teorema dell'energia cinetica:

$$dW_1 + dW_2 = \frac{1}{2} \rho V (v_2^2 - v_1^2)$$

Da cui: $p_1 + \rho g h_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2 + \rho g h_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2$

e poiché i punti 1 e 2 sono arbitrari:

$$\boxed{p + \rho g h + \frac{1}{2}\rho v^2 = cost}$$

Lavoro di pressione — Fattore idrostatico — Termine cinetico

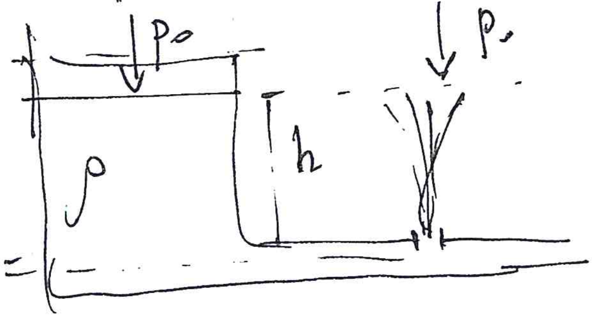
— si può riformulare ~~come~~ in termini di altezze:

$$\boxed{\frac{p}{\rho g} + \frac{v^2}{2g} + h = cost}$$

$\frac{p}{\rho g} = h_{piezo}$ Altezza di una colonna di fluido che determina pressione p alla base

$\frac{v^2}{2g} = h_{cin.}$ Altezza da cui cade (o cui sale) il fluido con velocità finale (iniziale) v

In questi termini: lo zampillo risale fino alla quota del bacino ~~che~~ che esercita la pressione $\frac{p}{\rho g}$



$$p_0 + \rho g h = p_0 + \frac{1}{2}\rho v^2 \Longrightarrow v = \sqrt{2gh}$$

Noto come Teorema di Torricelli

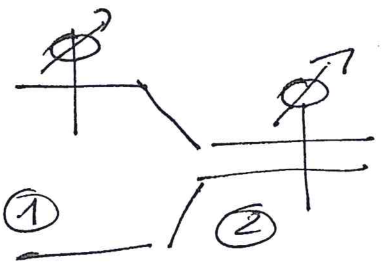
Applicazioni (casi limite ideale di situazioni reali - validi per v piccole o localmente)

× $\frac{1}{2}\rho v^2 + p = cost$ in condotti orizzontali

→ esempio con fogli + soffio

→ stenosi / aneurisma

× Tubo di Venturi :



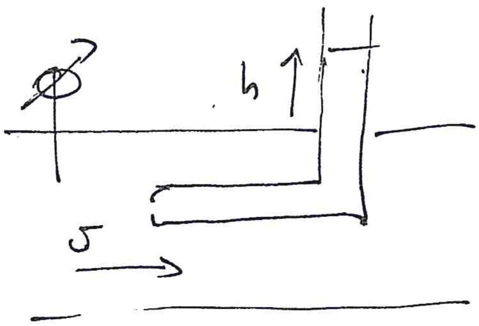
S_1 e S_2 noti

p_1 e p_2 misurati

$$\begin{cases} p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 \\ S_1 v_1 = S_2 v_2 \end{cases}$$

Due equazioni e due incognite $\Longrightarrow v_1$ e v_2

× Tubo di Pitot :



$$p + \frac{1}{2}\rho v^2 = p_0 + \rho g h$$

→ dalla misura di p, p_0 e h si ricava v