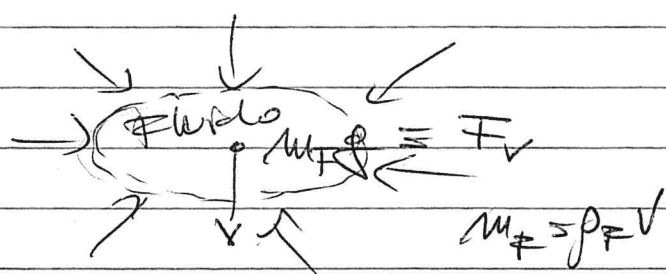
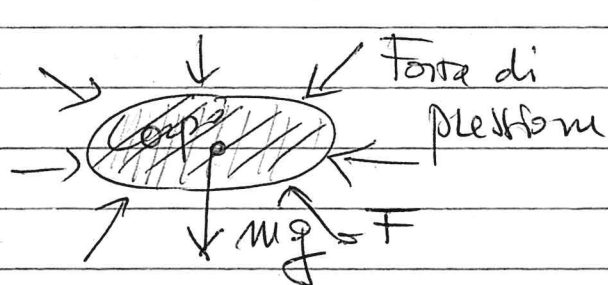


LEGGI DI ARCHIMEDE

- * Corpo immerso riceve spinta uguale e contraria alla risultante delle forze di volume agenti sul fluido spostato dal corpo
- * Nel caso di forza peso (PRINCIPIO DI ARCHIMEDE) spinta verso l'alto pari al peso del liquido spostato

Dimostrazione (tramite principio di solidif.)



Fluido in equilibrio:

$$\vec{F}_v + \vec{F}_p = 0$$

- Le forze di pressione sono identiche nei due casi: sono esercitate sulle superficie limite del corpo immerso o sulle superficie "ideale" limitate del fluido "solidificato" dal fluido esterno.

- Nel fluido, in condizioni di equilibrio sono $\vec{F}_p = -\vec{F}_v$

Dunque le forze di pressione contribuiscono con $-\vec{F}_v$ alla spinta sul corpo immerso.

Nel caso di forza peso $-\vec{F}_v = -m_F \vec{g}$ $m_F = \rho_F V$

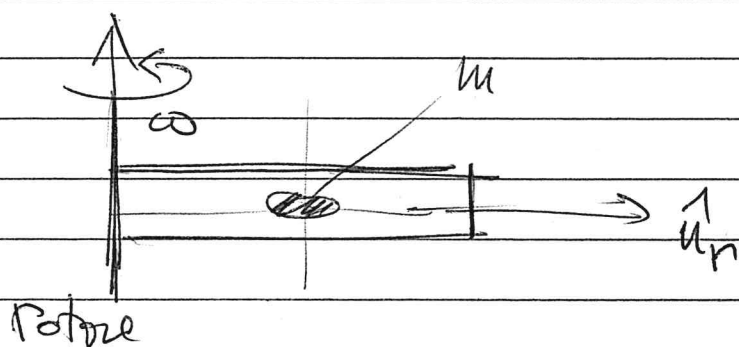
$$\vec{F} = m \vec{g} - m_F \vec{g} = (\rho - \rho_F) \vec{g} V$$

$$\vec{F} \geq 0 \quad \text{se} \quad \rho \geq \rho_F$$

Note: La legge di Archimede è valida per tutte le forme di volume, poiché le forze di pressione sono determinate da

$$\vec{F}_p = \rho f \vec{v}$$

Exemple centrifugation (F apparente)



$$\vec{a}_c = -\omega^2 r \hat{u}_r$$

centripète

$$\begin{aligned} \vec{F}_{app} &= -m \vec{a}_c \\ &= m \omega^2 r \hat{u}_r \end{aligned}$$

La forza apparente entra nella descrizione del moto (1^a legge di Newton) nel sistema non inerziale solidale con il rotore in rotazione

$$\vec{F}_{app}^{fl} = dm_{fl} \omega^2 r \hat{u}_r$$

forza app. sull'elemento di fluido dm_{fl}

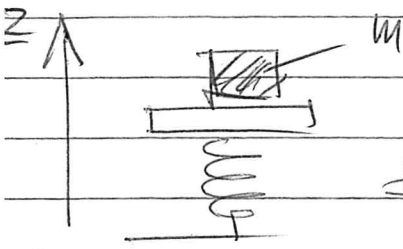
È una forza di volume: $\vec{F}_{app}^{fl} = \rho_{fl} dV \omega^2 r \hat{u}_r \stackrel{!}{=} dV$
e dunque determina una spinta di Archimede

Risultante delle forze sul corpo di massa m :

$$\begin{aligned} \vec{R} &= \vec{F} + \vec{F}_{Arch} = \vec{F} - \vec{F}_{app}^{fl} = (m - \rho_{fl} V) \omega^2 r \hat{u}_r \\ &= (\rho - \rho_{fl}) V \omega^2 r \hat{u}_r \end{aligned}$$

stessa relazione della spinta di Archimede
ma con $\omega^2 r$ al posto di g

Correzione di Archimede al peso



bilancia a dinamometro a molla

Forze agenti sul corpo di massa m :

1. Peso $\vec{P} = -mg \hat{u}_z$
2. Archim $\vec{f}_A = m_F \hat{u}_z$
3. Reazione bilancia $\vec{N}$

Equilibrio: $\vec{N} = \vec{P} + \vec{f}_A =$

$$= (\rho - \rho_F) V g =$$

$$= mg \left(1 - \frac{\rho_F}{\rho}\right)$$

Correzione alla forza peso $1 - \frac{\rho_F}{\rho}$

Se $\rho_F \sim \rho$ correzione notevole (gasone)

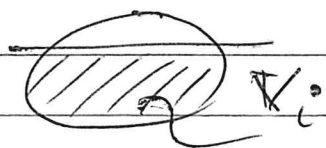
In condizioni normali $\frac{\rho_F}{\rho} \sim \frac{\rho_{\text{aria}}}{\rho} \sim 10^{-3}$

correzione trascurabile

⇒ Applicazione: Densimetro se $\rho \approx \rho_F$
 si misura la densità relativa dal confronto
 dell'intensità delle forze nei due casi di
 immersione e no.

Esercizio Galleggiamento e apnea

— galleggiamento: V_i (immerso) $<$ V_c (corpo)



$$\text{Equilibrio: } \rho_c V_{cg} = \rho_F V_i g$$

$$\frac{V_i}{V_c} = \frac{\rho_c}{\rho_F} < 1$$

Se $\rho < \rho_F$, il volume immerso è minore del volume totale, in condizioni di equilibrio $\rightarrow$ galleggiare

— Uomo: $V_{\text{uomo}} \approx 2 \text{ l}$ (metà testa)

Uomo in immersione (Apnea)

$$V_{\text{tot}} = 75 \text{ l} \quad V_i = (75 - 2) \text{ l} = 73 \text{ l}$$

$$\rho / \rho_F = V_i / V_{\text{tot}} \approx 0.973$$

Del volume totale, $V_t = 70 \text{ l}$ sono incompressibili (tessuti, acqua, ossi) e $V_p = 5 \text{ l}$ sono comprimibili (aria dei polmoni)

x Se $V_{\text{tot}} = 73 \text{ l}$ ($V_p = 3 \text{ l}$) $\rightarrow \rho_{\text{uomo}} = \rho_F$ Assetto neutro
 x Se $V_{\text{tot}} < 73 \text{ l}$ ($V_p < 3 \text{ l}$) $\rightarrow \rho_{\text{uomo}} < \rho_F$ Assetto negativo!

Aria: $T = \text{cost}$ (temperatura del corpo)

$$\phi V = \text{cost} \quad \rightarrow \quad \frac{V}{V_0} = \frac{2 \text{ l}}{5 \text{ l}} \Rightarrow \frac{\phi_0}{\phi} = \frac{3}{5}$$

Cioè si raggiunge assetto neutro (spinta di Archimede ~~netto~~ uguale al modulo della forza peso) quando

$$\phi = \phi_0 + \rho g h = \frac{5}{3} \phi_0$$

$$\phi_0 + \rho g h = \left(1 + \frac{2}{3}\right) \phi_0$$

$$\rho g h = \frac{2}{3} \phi_0$$

$$h = \frac{2}{3} \frac{\phi_0}{\rho g}$$

$$\approx \frac{2}{3} \frac{10^5 \text{ Pa}}{10^3 \text{ kg/m}^3 \cdot 10 \text{ m/s}^2} \approx 7 \text{ m}$$

In assetto naturale, l'apneista raggiunge condizioni di spinta nulla a 7 metri di profondità.

A profondità inferiori la risultante della spinta di Archimede e della forza peso è negativa (verso il basso) -

STATICA DEL GALLEGGIAMENTO

- * Punto di applicazione F . Peso = baricentro corpo
- * " " " F Archimede = baricentro fluido spostato

Punto detto centro di galleggiamento G

In generale il centro di galleggiamento non coincide con il baricentro del corpo (coincide solo nel caso di corpi omogenei, interamente sommersi)

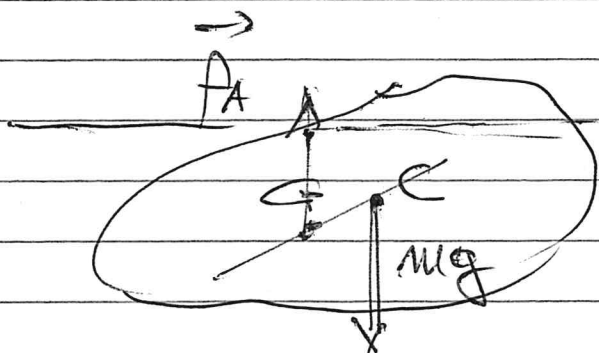
Condizioni di equilibrio :

$$1) \vec{mg} = -\vec{F}_A$$

Risultante delle forze uguale a zero

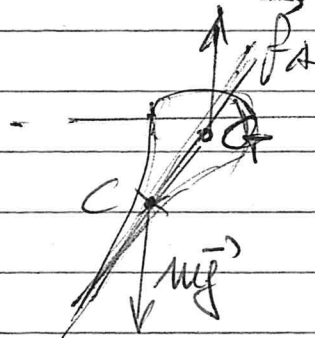
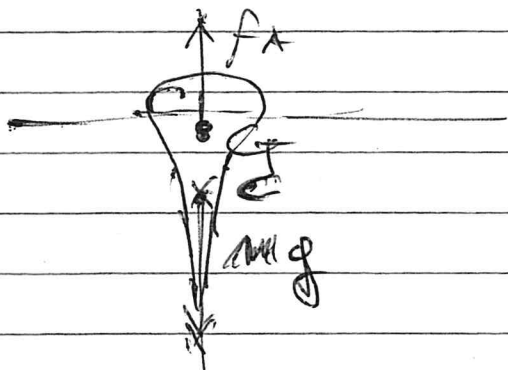
$$2) \vec{\tau} = \vec{GC} \times \vec{mg} = 0$$

momento delle forze nullo
(Polo in G)



Il centro di galleggiamento è il centro geometrico della parte sommersa, poiché il fluido è omogeneo in densità.

sistemi galleggianti: costruiti in modo che il C.d.M. (baricentro) del corpo sia al di sotto del centro di galleggiamento



Momento
torcente si annulla
 mg' e f_A e
risultano $\vec{r} = 0$
(stessa retta
d'azione)

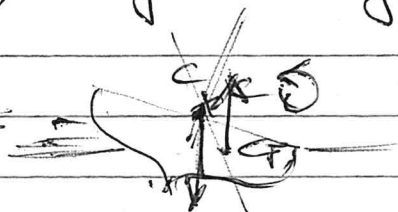
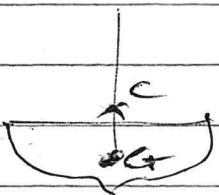
- x Galleggianti con pescante pesante, sposta C in basso
- x Mongolfiera, ...

- Natanti in pancia sono instabili (C più alto di G)



In caso di inclinazione dalla verticale mg e f_A determinano momento torcente, che si annulla quando G e C sono sulla stessa retta con C sotto a G

Soluzioni: 1) Chiglia con pescante profondo
2) Chiglia sagomata



G non è allineato
all'albero ma si
sposta a dx
(o sx)

DINAMICA DEI FLUIDI

- 1) METODO DI LAGRANGE: Descrizione del moto del fluido tramite Legge oraria di ogni elemento (punto materiale) di fluido

$$\vec{x}_i = \vec{x}_i(\vec{x}_{0i}, t) \quad i=1, \dots, N$$

IMPRATICABILE (e nemmeno necessario nei casi pratici)

- 2) METODO DI EULERO: Descrizione tramite grandezze fisiche che caratterizzano lo stato di moto in determinati (tutti) i punti di fluido

$$\begin{cases} \vec{v} = \vec{v}(\vec{x}, t) \\ \phi = \phi(\vec{x}, t) \\ \dots \end{cases} \quad \begin{array}{l} \vec{x} \text{ fisso} \\ t \text{ variabile} \end{array}$$

Non descrivono un elemento di fluido in moto ma descrivono elementi di fluido che si succedono nel punto di coordinate $\vec{x}$ al variare del tempo t .

Ulteriore semplificazione in REGIME STAZIONARIO:
 * stesse condizioni nel punto $\vec{x}$ a tutti i tempi
 → la mappa delle velocità è immutabile

→ Nella descrizione di EULERO la variabile tempo può essere eliminata: $\vec{v} = \vec{v}(\vec{x})$

→ Nella descrizione di LAGRANGE non è eliminabile (si vede tracciare $\vec{x} = \vec{x}(\vec{x}_0, t)$)

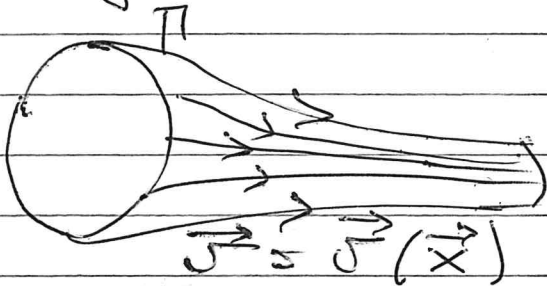
(2)

○ LINEE DI FLUSSO (o di corrente): linee geometriche che in ogni punto hanno la stessa direzione e verso delle velocità ($\vec{v}$ è tangente alle linee di flusso)

- × Descrivono le traiettorie degli elem. di fluido
- × Non si intersecano (altrimenti nei punti di intersezione l'elemento di fluido avrebbe più di una velocità)

TUBO DI FLUSSO: Nei moti stazionari le linee di flusso hanno con direzione costante.

Si definisce tubo di flusso la superficie definita da tutte le linee di flusso che partono da una linea chiusa Γ nel piano ortogonale alle linee di flusso



- Gli elementi di fluido interni al tubo sono confinati entro il tubo
- Gli elem. esterni non entrano
- (altrimenti le linee di flusso dovrebbero intersecarsi)

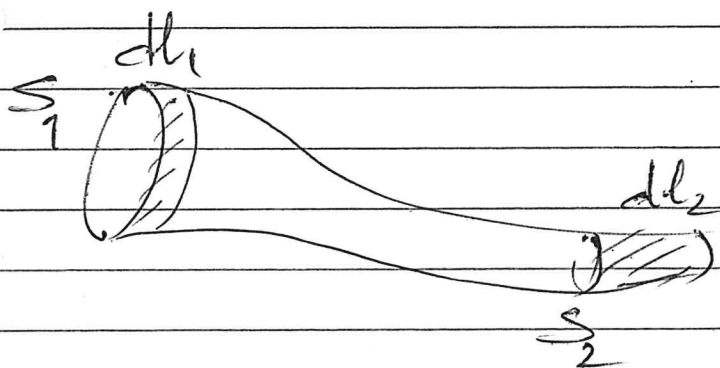
→ Tubo di flusso individua porzione di fluido SEPARATA dal resto del fluido e il cui moto può essere studiato valutando gli effetti del resto del fluido su di esso

→ il tubo di flusso può coincidere con l'intero condotto idraulico

Eq. di continuità e Portata

- Esprime la conservazione della massa entro un tubo di flusso per un fluido in moto

La q.tà di massa per unità di tempo che entra nel tubo di flusso (condotto) è uguale a quella che esce
 (condotti rigidi / tubo flusso indef.)
 $\equiv$ moto stazionario : stessa mappa di $\vec{v}$ a tutti i tempi



$$\frac{\Delta m_1}{\Delta t} = \frac{\Delta m_2}{\Delta t}$$

$$\rho_1 S_1 \frac{dl_1}{dt} = \rho_2 S_2 \frac{dl_2}{dt}$$

Poiché i punti sono generici, la relazione vale per tutti i punti:

$$\boxed{\rho S v = \text{cost}}$$

Per un fluido incomprimibile (liquidi) $\rho_1 = \rho_2$:

$$S_1 v_1 = S_2 v_2 \Rightarrow \boxed{S v = \text{cost}}$$

La quantità $\boxed{Q = S v = \frac{dX}{dt}}$ è detta

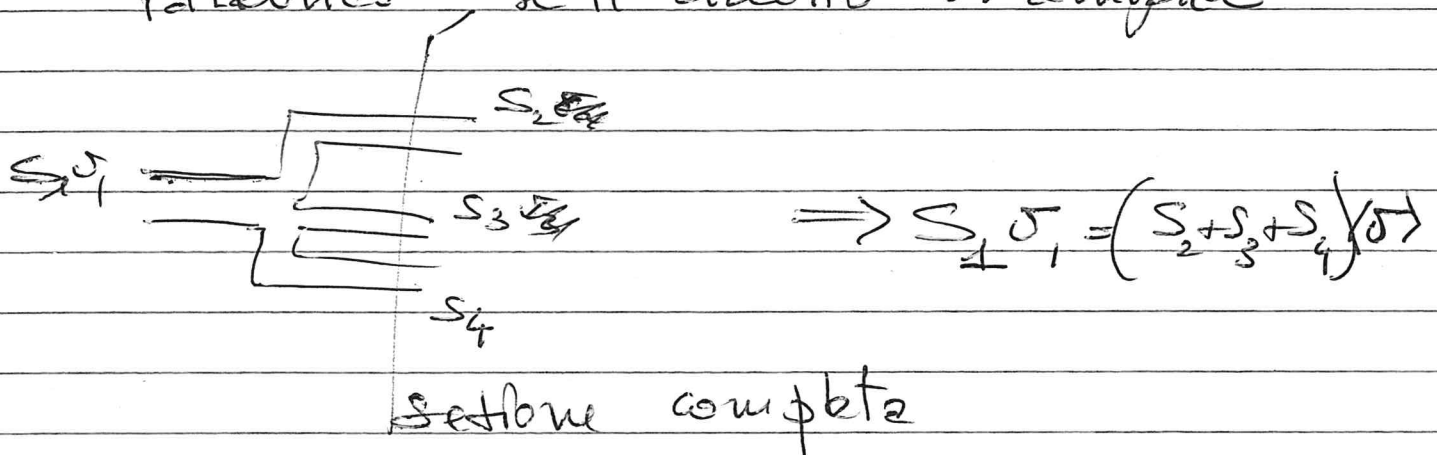
portata del tubo di flusso.
 (volumica)

(4)

x Circuiti idraulici chiusi $\rightarrow$ Portata costante se fluido incompressibile

(liquidi, o gas con $\rho_{\text{fluid}} \ll \rho_{\text{scavo}}$ che garantisce limite di $\rho = \text{costante}$)

x Attenzione: Portata costante attraverso ogni SEZIONE COMPLETA di un circuito idraulico se il circuito si ramifica



x Esempio: sistema circolatorio ~~Q = 8 l/min~~

$$Q = 5 \text{ l/min} \approx 80 \text{ cm}^3/\text{s}$$

Aorta: $r_a = 1 \text{ cm}$ $v_a = 25 \text{ cm/s}$

Letto capillare: $\langle r_c \rangle = 4 \mu\text{m}$ $\langle v_c \rangle = 0.05 \text{ cm/s}$

$$v_a \pi r_a^2 = \langle v_c \rangle \pi r_c^2 N_c$$

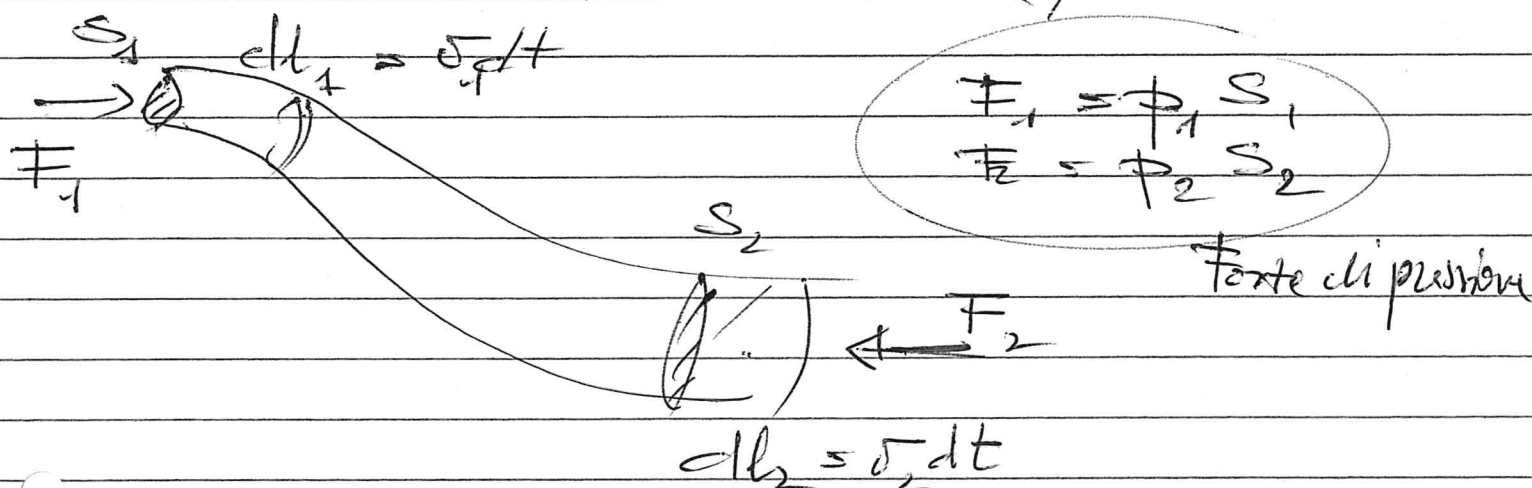
$$\Rightarrow N_c \approx 10^9$$

(5)

TEOREMA DI BERNOULLI

• Esprime la conservazione dell'energia meccanica nel moto di un fluido sotto le ipotesi di fluido ideale:

1. Incomprimibile ($\rho = \text{cost} \Rightarrow Q = \text{cost}$)
2. Non viscoso ($\vec{F}_t = 0$, no attriti interni)
3. Regime stazionario ($\vec{v} = \vec{v}(\vec{x})$)
4. Fluido irrotazionale (privo di vortici $\vec{\nabla} \times \vec{v} = 0$, eu. cin. solo del moto traslazionale)



Perché $Q = \text{cost}$: $V_1 = S_1 dl_1 = S_2 dl_2 = V_2$

• Lavoro di pressione:

$$\begin{aligned}
 dW_1 &= \vec{F}_1 \cdot d\vec{l}_1 + \vec{F}_2 \cdot d\vec{l}_2 = p_1 S_1 dl_1 - p_2 S_2 dl_2 \\
 &= (p_1 - p_2) V
 \end{aligned}$$

• Lavoro della forza peso:

$$dW_2 = -dE_p = \rho g (h_1 - h_2) V$$

(6)

Applico TEOREMA IN CINETICA
(tutta traslazionale) :

$$\Delta E_k = dW_1 + dW_2$$

$$\frac{1}{2} m(\sigma_2^2 - \sigma_1^2) = (\phi_1 - \phi_2)V + \rho g (h_1 - h_2)V$$

$$\frac{1}{2} \rho(\sigma_2^2 - \sigma_1^2) = \phi_1 - \phi_2 + \rho g (h_1 - h_2)$$

Riordinando i termini 1 e 2 al primo e secondo membro e tra l'identita',

$$\phi_1 + \rho g h_1 + \frac{1}{2} \rho \sigma_1^2 = \phi_2 + \rho g h_2 + \frac{1}{2} \rho \sigma_2^2$$

Perche' i punti 1 e 2 sono scelti in modo arbitrario:

$$\boxed{\phi + \rho g h + \frac{1}{2} \rho \sigma^2 = \text{cost}}$$

TEOREMA DI BERNOULLI

ϕ : Lavoro di pressione

$\rho g h$: Termine idrostatico (come legge di Stevin)

$\frac{1}{2} \rho \sigma^2$: Termine cinetico (en. cinetica per unita' di volume)

Tutti i termini sono densita' di energia

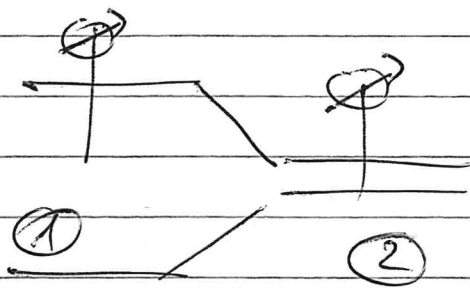
(7)

- Applicazioni (casi limite ideali di situazioni reali, validi per 5 flange e localmente)

$$x \quad \frac{1}{2} \rho v^2 + p = \text{cost} \quad \text{in condotti orizzontali}$$

→ Esempi: foglio + soffio
→ stenosi / Aneurisma

x Tubo di Venturi

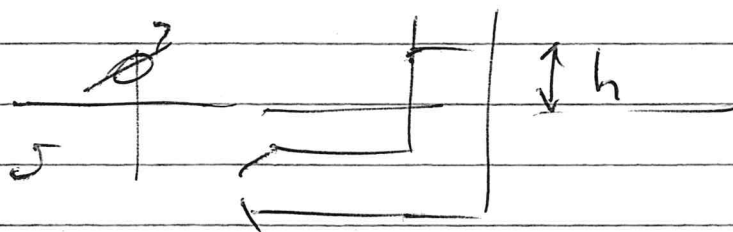


S_1 e S_2 noti
 p_1 e p_2 misurati

$$\begin{cases} p_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 = p_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2 \\ S_1 v_1 = S_2 v_2 \end{cases}$$

Due equazioni e due incognite $\Rightarrow v_1$ e v_2

x Tubo di Pitot



$$p_0 + \rho g h = p + \frac{1}{2} \rho v^2$$

→ dalla misura di p_0, p, h si ricava v



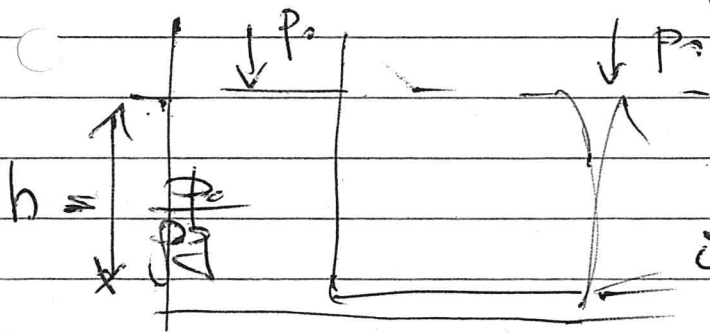
Si può formulare in termini di
altre di liquido (o quote)

$$\frac{p}{\rho g} + \frac{v^2}{2g} + h = \text{cost}$$

Altura piezo = Altezza di una colonna
di fluido che determina una pressione p

$\frac{v^2}{2g} = h_{\text{vel.}}$ Altezza da cui cade
(e vi sale) il fluido con velocità finale
(iniziale) v

In questi termini: lo stampillo risale
fino ad una quota max pari all'altezza
della colonna di fluido nel bacino
che esercita la pressione.



$$v = \sqrt{2gh}$$

Alt. come
← teorema
di Torricelli

La velocità è definita in modulo. Quindi
 v è la velocità di uscita dal condotto
in dip. della direzione del condotto.

Fluidi REALI : $\vec{F}_t \neq 0$

* Attiti interni con $\vec{F}_t \neq 0$ (anche se non sufficienti a determinare una condizione di equilibrio statico rispetto a ~~moti~~ sforzi tangenziali)

* Teorema di Bernoulli non valido, poiché non include l'energia dissipata dal lavoro delle forze di attrito

Se F_A = en. dissipata per attrito per unità di volume

Abbiamo allora:

$$\frac{1}{2} \rho v_1^2 + \rho g h_1 + p_1 = \frac{1}{2} \rho v_2^2 + \rho g h_2 + p_2 + F_A$$

Immaginiamo un condotto orizzontale ($h_1 = h_2$)

e con sezione costante $\rightarrow v_1 = v_2$

Per sostenere un flusso a portata non nulla si deve avere:

$$p_1 = p_2 + F_A \Rightarrow p_2 - p_1 = F_A$$

Per far scorrere il fluido deve essere mantenuta una differenza di pressione ai capi del condotto (tramite iniezione di lavoro di pressione con una pompa, ad esempio)

F_A non è calcolabile, dobbiamo procedere per via empirica!