MECCANICA DEI FLUIDI

Fluido: sistema (continuo) di punti caratterizzato da <u>completa</u> <u>deformabilità</u>
→ Assenza di forze interne di richiamo o meglio, sotto l'azione di <u>sforze tangenziali</u> (<u>SFORZI DI TAGLIO</u>) → scorrimento indefinito di una parte sull'altra – [Anche in presenza di attriti interni: gli attriti interni non sono sufficienti a determinare condizioni di equilibrio statico in reazione a forze tangenziali]

[Non esistono forze tangenziali]

A seconda del comportamento dei fluidi rispetto a sforzi di compressione si distinguono

<u>Liquidi</u>: privi di forma propria (deformabili), ma dotati di <u>volume proprio</u> e di <u>superficie limite</u> (incomprimibili)

<u>GAS</u>: privi di forma propria (deformabili) e di volume proprio (occupano tutto il volume disponibile); facilmente comprimibili

Differenti stati di aggregazione, condizioni p, V, T e diverse azioni delle forze molecolari nei due casi

<u>Descrizione meccanica</u>: Uso di <u>massa</u> e <u>forza</u>
→ difficoltà geometriche per la completa deformabilità (a differenza da un corpo rigido non ha senso parlare di forza applicata a un punto)

* Descrizione con massa e forza a livello microscopico presenta complicazioni matematiche insormontabili (ammesso che sia possibile conoscere, cioè misurare, le condizioni di moto di un numero di particelle dell'ordine di N_A, e dunque con $6N_A$ gradi di libertà)

* Difficoltà superate tramite uso di grandezze scalari (locali) indipendenti dalla geometria, come deve essere per un sistema e geometria (localmente) indefiniti:
$\longrightarrow$ densità e pressione

DENSITÀ: Fluido = sistema continuo, rappresentabile in termini macroscopici come un numero infinito di pti infinitesimi (pti materiali) di massa $dm = \rho\, dV$, con ρ densità

$$\rho = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta V}$$

Nel SI in kg/m^3

$$\rho_{H_2O} \sim 10^3\ kg/m^3$$
$$\rho_{GAS} \sim 1\ kg/m^3$$

Si usa anche la densità relativa: rapporto della massa di un fluido e la massa di H_2O in un volume di riferimento (e a p e T date)

$$\rho_r = \frac{\Delta m}{\Delta m_{H_2O}} = \frac{\Delta m}{\Delta V} \cdot \frac{\Delta V}{\Delta m_{H_2O}} = \frac{\rho}{\rho_{H_2O}}$$

Esempio: $\rho_r(Hg) = 13.6$
$\rho(Hg) = 13.6 \times 10^3\ kg/m^3$

PRESSIONE: in un fluido si può parlare solo di

1) FORZE DI VOLUME $\propto dV$ (o alla massa $dm = \rho\, dV$)

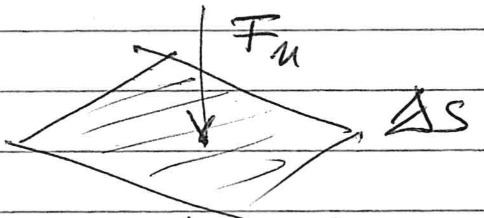
Esempi: Forza peso, forza centrifuga (apparente ma è $\propto$ a dm e cioè a dV)

2) FORZE DI PRESSIONE $\propto dS$

La condizione di equilibrio di un fluido richiede che le forze tangenziali siano nulle su ogni superficie interna o limite del fluido. Le forze su ogni superficie devono dunque essere forze normali e non direzionali (identiche in tutte le direzioni).

Si definisce pressione in un punto

$$p = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta F_n}{\Delta S}$$

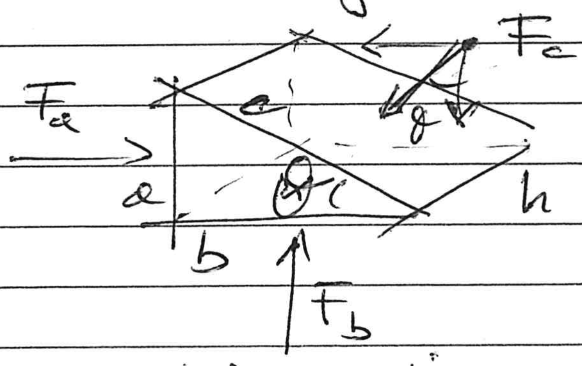


per una qualsiasi superficie ΔS (qualsiasi orientazione) passante per il punto

È una grandezza scalare priva di caratteristiche direzionali (eccetto alle superfici limite di un fluido, dove le forze sono normali alle superfici). Abbiamo già dimostrato (Lezione n° ... termodinamica) in modo esplicito che la condizione di equilibrio del fluido richiede che p sia identica in tutte le direzioni

RICHIAMO: Volume ideale interno al fluido considerato invariabile (principio di solidificazione: non sono interessato a movimenti locali che non alterano l'equilibrio macroscopico)

Prisma generico:



$F_a = p_a\, a h$
$F_b = p_b\, b h$
$F_c = p_c\, c h$

Condizioni di equilibrio: $\vec{F}_a + \vec{F}_b + \vec{F}_c = 0$

$$F_a = F_c \sin\theta$$

$$p_a a h = p_c (c \sin\theta) h = p_c a h \Rightarrow p_c = p_a$$

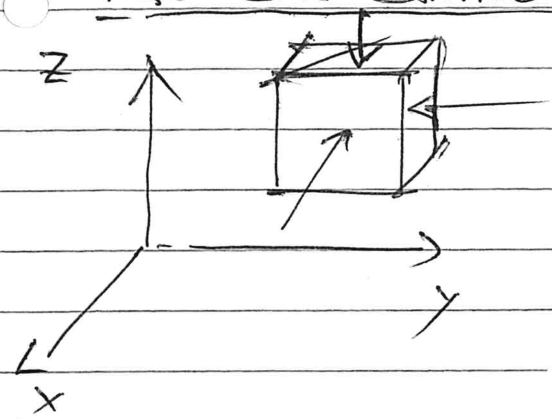
$$F_b = F_c \cos\theta$$

$$p_b b h = p_c (c\cos\theta) h = p_c b h \Longrightarrow p_c = p_b$$

Poiché l'orientazione del prisma è generica, p è identica in tutte le direzioni. Nel limite $\Delta S \to 0$ ossia $\Delta V \to 0$, p è funzione scalare del punto (è definita in un punto)

Nel calcolo delle condizioni di equilibrio, si sono trascurate eventuali forze di volume. Nel limite $\Delta V \to 0$ le forze di volume si annullano. Anche le forze di superficie $F_s \div dS$ si annullano, ma non le pressioni $p \div \frac{F_s}{dS}$

EQUILIBRIO STATICO IN UN FLUIDO



Risultante $\vec{F}_p + \vec{F}_V = 0$

(forza di pressione e di volume)

Condizione vettoriale $\rightarrow$ 3 eq. scalari

Nel caso di forza peso, la forza è monodimensionale; nel caso generale 3 eq. scalari, una per ogni componente cartesiana.

Asse z (generico):

- Forza di pressione: $F_{p,z} = p(z)\,dS - p(z+dz)\,dS$

$$= \left[p(z) - \left(p(z) + \frac{\partial p}{\partial z}dz\right)\right]dS$$

$$= -\frac{\partial p}{\partial z}dV$$

- Forza di volume $F_{V,z} = f_z\,dm = f_z \rho\, dV$

[f_z = forza per unità di massa]

Eq. di equilibrio: $-\frac{\partial p}{\partial z}\cancel{dV} + f_z \rho \cancel{dV} = 0$

Sui tre assi:

$$\rho f_x = \frac{\partial p}{\partial x} \quad ; \quad \rho f_y = \frac{\partial p}{\partial y} \quad ; \quad \rho f_z = \frac{\partial p}{\partial z}$$

Relazione vettoriale:

$$\frac{\partial p}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial p}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial p}{\partial z}\hat{k} = \rho \vec{f}$$

Ricorrendo alla definizione di gradiente:

$$\boxed{\vec{\nabla} p = \rho \vec{f}}$$

- in un fluido in equilibrio statico esiste un gradiente di pressione proporzionale alla forza di volume (per unità di massa)
- La densità del fluido definisce il coeff di prop.

Note: 1) Forze di volume ~~accelerano~~ tendono ad accelerare le masse dm; la reazione del fluido per mantenere $\vec{a} = 0$ (equil. statico) si manifesta con una variazione di pressione

2) Se forza di volume nulla, $p = cost.$ È il caso di liquido ideale "privo di massa". Oppure di $\rho \simeq 0$, o trascurabile, come per gas rarefatti in piccoli volumi

Per forze conservative (reali o apparenti), si può esprimere la forza di volume in termini di gradiente dell'energia potenziale (per unità di massa)

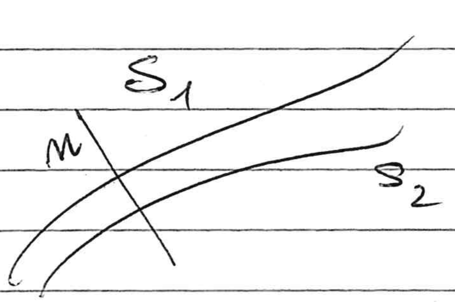
$$\vec{f} = -\vec{\nabla} E_{p,m} \qquad \left[E_{p,m} = \frac{E_p}{dm} \right]$$

→ Condizione di equilibrio statico:

$$\boxed{\vec{\nabla} p = -\rho \vec{\nabla} E_{p,m}} \qquad (**)$$

* Gradiente di pressione: stessa direzione e verso opposto al gradiente di en. potenziale

* Superfici equipotenziali (perpendicolari al gradiente e t.c. $\vec{\nabla} E_{p,m} = 0$) sono anche superfici isobariche: $p = \text{cost}$



Siano S_1 e S_2 equipot.

- $\Delta E_{p,m} = E_{p,m}(S_2) - E_{p,m}(S_1) = \text{cost}$
- $\Delta p = p(S_2) - p(S_1) = \text{cost}$

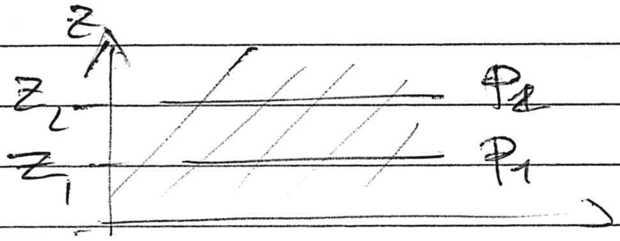
per ogni coppia di punti lungo $d\vec{n}$ (direzione del gradiente)

D'altronde (**) implica $\left|\frac{dp}{dn}\right| = \rho \left|\frac{d E_{p,m}}{dn}\right|$ per ogni coppia di punti. Dunque $\rho = \text{cost}$ sulle superfici. Eventuali variazioni di ρ seguono geometricamente

Nota: una superficie libera del fluido (in quiete) deve essere isobarica e coincide con una superficie equipotenziale

→ Se non fosse isobarica $\vec{\nabla} p$ avrebbe componente tangente alla superficie non nulla → forze tangenziali

CASO DELLA FORZA PESO



$$\vec{f} = -g\hat{k}$$

a) Forza verticale

1) Superfici equip. sono piani orizzontali (stessa quota)
2) Punti alla stessa quota hanno la stessa pressione (superfici isobariche)
3) La superficie libera è orizzontale

Dipendenza della pressione dalla profondità:

$$\vec{\nabla} p = +\rho\vec{f} \implies \frac{dp}{dz} = -\rho g$$

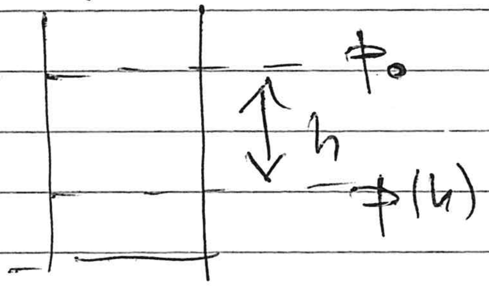
$$dp = -\rho g\, dz \implies p_2 - p_1 = -\rho g (z_2 - z_1)$$

Per densità costante

$$\boxed{\Delta p = -\rho g \Delta z}$$

Questa relazione generale contiene due relazioni empiriche, stabilite in modo indipendente:

- Legge di Stevino: $p(h) = p_0 + \rho g h$



h = profondità

Esprime la pressione $p(h)$ alla profondità h riferita alla superficie libera. Discende dal risultato generale di eq. del fluido, ma si può trovare in modo diretto analizzando le forze agenti su una colonna di fluido tramite il principio di solidificazione.

- Principio di Pascal:

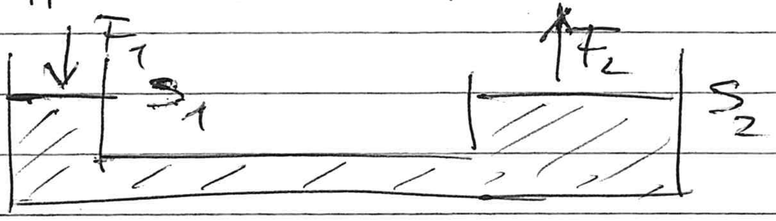
La variazione di pressione in un punto del fluido si propaga in modo omogeneo a tutto il fluido. Questo risultato è evidente dalla relazione generale:

$$p_2 = p_1 - \rho g (z_2 - z_1)$$

Le variazioni di p_2 sono legate in modo diretto alle variazioni di p_1, per ogni valore di z_2 e t.

È noto come principio, perché fu ricavato in modo indip., per via empirica, da Pascal [Facendo scoppiare le botti della tenuta agricola dello zio]

TORCHIO IDRAULICO (applicazione del Principio di Pascal)



Sia p la pressione che agisce su S_1 in virtù della forza F_1

$$p = F_1/S_1$$

Allora esiste una forza in S_2 è $F_2 = p S_2 = F_1 \frac{S_2}{S_1}$

$$\frac{S_2}{S_1} = \text{guadagno del torchio}$$

Esempio: Freni, martinetto idraulico

Note: L'energia è conservata (trascurando gli attriti e per fluidi incomprimibili)

Lavoro del fluido : $p\,dV_1 = p S_1 dl_1$

$$= p S_2 dl_2 = p\,dV_2$$

con $dV_1 = dV_2$ per ipotesi di fluido incomprimibile

$$\rightarrow F_1 dl_1 = F_2 dl_2$$

$$dl_2 = \frac{p S_1}{p S_2} dl_1$$

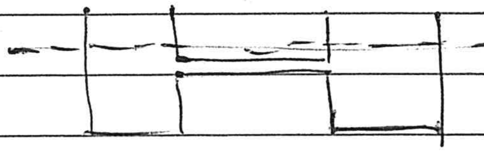
Se guadagno positivo $G = \frac{S_2}{S_1} > 1$

1) $F_2 > F_1$

2) $dl_2 < dl_1$

Si solleva un grosso peso per un piccolo tratto, agendo con una piccola forza per un

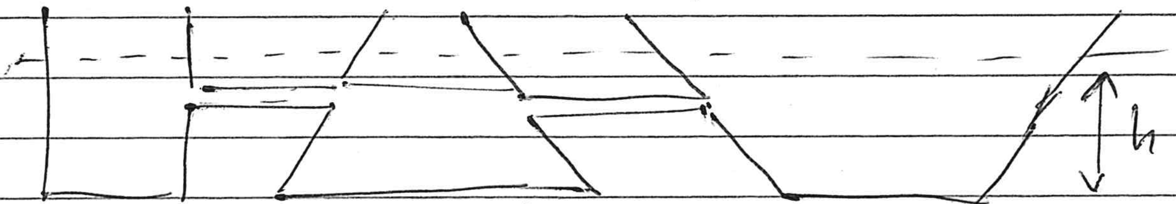
- Vasi comunicanti



Superficie libera: equipotenziale e isobara
fluido alla stessa quota.

- Paradosso idrostatico

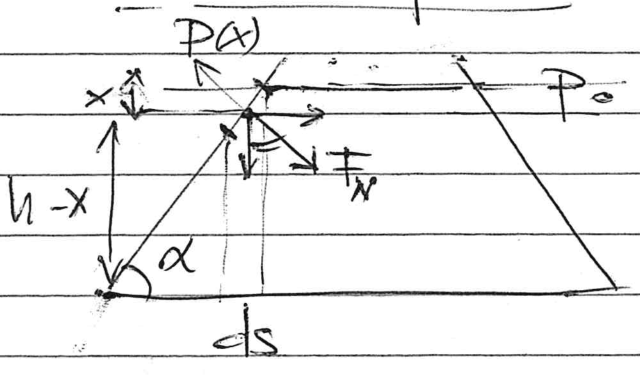
In recipienti di forma diversa si ha la stessa pressione nel fondo dei recipienti, anche in punti sovrastati da colonne di fluido di minor spessore, o in recipienti con una massa di fluido complessivamente maggiore



$p(h) = p_0 + \rho g h$ in tutti i recipienti

$\longrightarrow$ contributo delle reazioni delle pareti

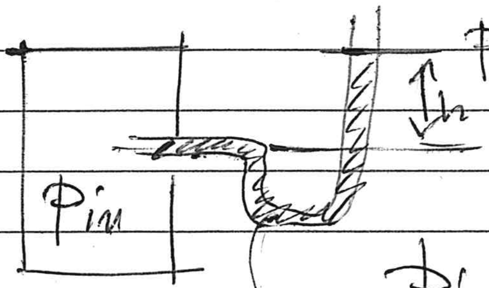
Calcolo esplicito:



$$p(x) = p_0 + \rho g x$$
$$F_N = p(x)\, dA$$
$$F_z = p(x)\, dA \cos\alpha$$
$$F_z = p(x)\, dS$$

$$p(h) = \frac{F_z}{dS} + \rho g (h - x) = p_0 + \rho g x + \rho g (h-x)$$
$$= p_0 + \rho g h \qquad \text{c.v.d.}$$

Manometro a tubo aperto

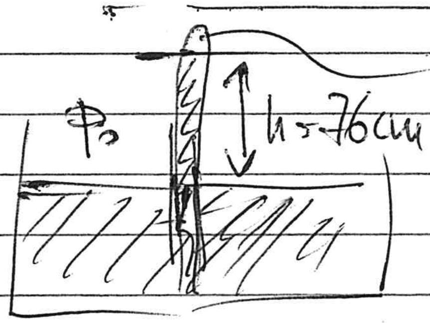


Superficie isobarica : $p(h) = p_{in}$

$$p_{in} = p_0 + \underbrace{\rho g h}_{\text{pressione manometrica (o relativa)}}$$

fluido manometrico

Barometro di Torricelli



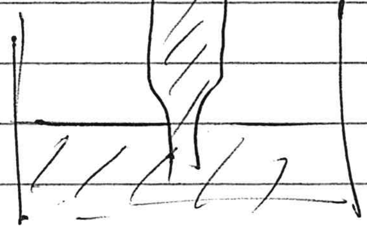
Vapori di mercurio (vuoto)

$$p_0 = 0 + \rho g h$$

$$1\ Torr = 760\ mmHg$$
$$= 1\ Atm$$

Conversione in Pa : $760\ mmHg = 1.013 \times 10^5\ Pa$
$750\ mmHg \approx 10^5\ Pa$

Colonna d'acqua



$$\rho_{H_2O} = 10^3\ kg/m^3$$

$$\rho g h_{H_2O} = \rho_{Hg}\, g\, h(Hg)$$

$$h(H_2O) = \frac{\rho_{Hg}}{\rho_{H_2O}} h(Hg) = 13.6\, h(Hg)$$

10 m di H_2O per 1 atm

Dipendenza della pressione atm dalla quota

Hp $\quad T = cost \qquad pV = nRT$

$$p = \frac{m}{V}\frac{RT}{A}$$

Da cui $\rho = \frac{m}{V} = \frac{pA}{RT} \longrightarrow \boxed{\frac{\rho_0}{p_0} = \frac{A}{RT}}$ Al suolo

ρ è $\rho(p)$ e non è indipendente da p

Dall'equilibrio del fluido:

$$\frac{dp}{dz} = -\rho g$$

$$\frac{dp}{dz} = -\frac{pA}{RT}g$$

$$\frac{dp}{p} = -\frac{A}{RT}g\,dz \Longrightarrow \frac{dp}{p} = -\frac{\rho_0}{p_0}g\,dz$$

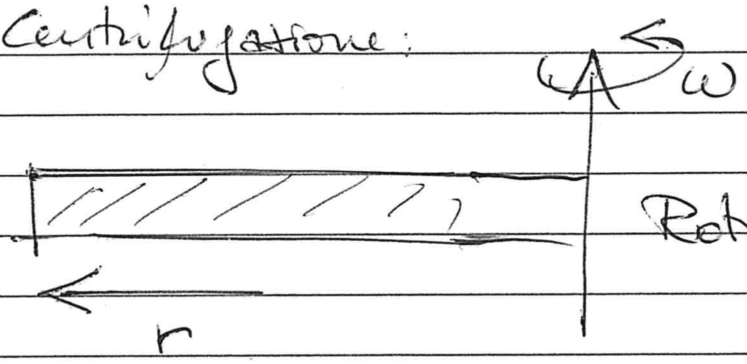
$$p(z) = p_0 e^{-z/\zeta} \qquad \zeta = \frac{\rho_0 g}{p_0} = \frac{10\,m/s^2 \cdot 1\,kg/m^3}{10^5\,Pa} \sim 10^{-4}\,m^{-1}$$

La pressione varia del 10% ogni 1000 metri:

$$\frac{dp}{p} = 10^{-4}\,m^{-1} \cdot 10^3\,m = 0.1$$

Forze di volume apparenti

Centrifugazione:



$$F_{NI} = F_{centrifuga} = -F_{centripeta}$$
$$= dm\,\omega^2 r = \rho\, dV\, \omega^2 r$$

è forza di volume

Equazione di equilibrio statico:

$$\frac{dp}{dr} = +\rho\omega^2 r$$

Nella centrifugazione di un gas $\rho = \frac{\rho_0}{p_0} \cdot p$

$$\frac{dp}{p} = +\frac{\rho_0}{p_0}\omega^2 r\, dr$$

$$\log(p) = +\frac{\rho_0}{p_0}\omega^2 \frac{r^2}{2} + cost$$

$$p(r) = K e^{+\frac{\rho_0}{p_0}\frac{\omega^2 r^2}{2}}$$

profilo "gaussiano" con il max in R

Per miscele con ρ_0 differenti, separazione longitudinale della concentrazione del 7‰