Impedenza acustica / meccanica

Nella potenza trasportata da una corda

$$\langle P \rangle = \frac{1}{2} \mu v \, \omega^2 A^2$$

Il termine μv rappresenta l'impedenza meccanica, definita dal rapporto

$$Z(t) = \frac{F}{v_y}$$ ⇝ rapporto tra forza applicata e velocità con cui si muove il punto

Misura l'attitudine di una struttura a mettersi in vibrazione ~~movimento~~ sotto l'azione di una forza

[Nota: per un corpo libero, questa attitudine è misurata dalla massa inerziale ed $F \div a$. Questa osservabile non misura uno spostamento netto di materia, ma una vibrazione locale. E' l'analogo dell'impedenza elettrica nei fenomeni elettrici]

- In generale F e v_y dipendono dal tempo e non hanno la stessa fase (si pensi a F e v nell'oscillatore armonico), dunque per Z si usa la rappresentazione complessa

Nel caso di onde sinusoidali

$$y(x,t) = A \sin(kx - \omega t) \qquad v = \frac{\omega}{k}$$

$$Z = -\frac{T\, \partial y/\partial x}{\partial y/\partial t} = \frac{Tk}{\omega} = \frac{T}{v} = v\mu$$

Per un'onda generica

$$y(x,t) = f(x \pm vt) \qquad z = x \pm vt$$

$$Z = -T \frac{\partial y/\partial x}{\partial y/\partial t} = -T \frac{\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial t}} = \pm T v$$

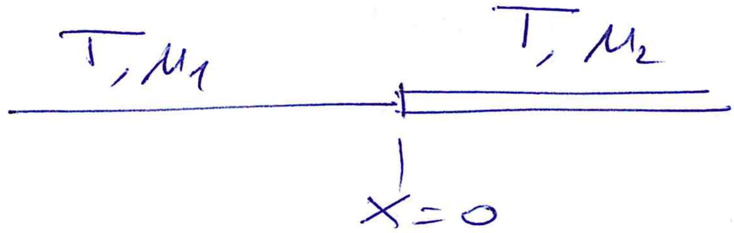
$Z = \pm \mu v$ cioè $|Z| = \mu v$

e fase $\varphi = 0$, $\varphi = 180°$

L'impedenza è legata alla trasmissione di energia tra due mezzi -

* Stessa impedenza → massimo trasferimento di energia
* Differente impedenza → Riflessione e Rifrazione (trasmissione)

Riflessione e trasmissione in corde



* T costante nelle corde (equilibrio lungo x)
* Saldatura ideale, ma $\mu_1 \neq \mu_2$

$\longrightarrow$ $v_1 = \sqrt{T/\mu_1}$ e $v_2 = \sqrt{T/\mu_2}$

$\longrightarrow$ $Z_1 = \underset{= T/v_1}{\mu_1 v_1}$ e $Z_2 = \underset{= T/v_2}{\mu_2 v_2}$

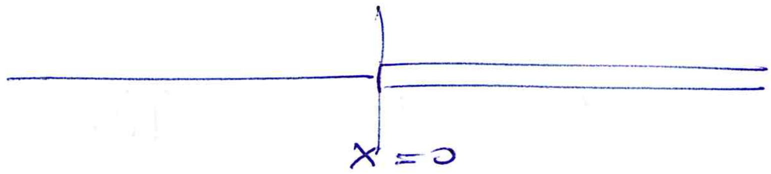
* Situazioni limite

- $\mu_1 = \mu_2$: Non c'è discontinuità (equivalente ad un'unica corda): segnale trasmesso inalterato, senza riflessioni
- $\mu_1 \ll \mu_2$: Equivalente a corda 1 con punto fisso in $x = 0$: segnale da 1 riflesso, senza trasmissione in 2
- $\mu_1 \gg \mu_2$: Equivalente a corda 1 con estremo libero in $x = 0$: segnale da 1 riflesso, senza trasmissione in 2

[Nel limite $\mu_2 = 0$, la potenza trasportata dalla corda 2 è nulla (anche se si muove), quindi tutta l'energia è riflessa in $x = 0$]

CASO GENERALE (sinusoidale)

× Onda sinusoidale progressiva dalla corda 1 ($x < 0$) verso la corda 2



$y_i(x,t) = A_i \sin(k_1 x - \omega_1 t)$ $\quad$ $y_t(x,t) = A_t \sin(k_2 x - \omega_2 t)$

$y_r(x,t)$ $A_r \sin(k_1 x + \omega_1 t)$

ONDA INCIDENTE: $y_i(x,t)$ → progressiva in corda 1

" RIFLESSA: $y_r(x,t)$ → regressiva in corda 1

" TRASMESSA: $y_t(x,t)$ → progressiva in corda 2

Onda in corda 1 (seno funzione dispari)

$$y_i(x,t) + y_r(x,t) = A_i \sin(k_1 x - \omega_1 t) + A_r(k_1 x + \omega_1 t)$$
$$= A_r \sin(\omega_1 t + k_1 x) - A_i \sin(\omega_1 t - k_1$$

Onda in corda 2:

$$y_t(x,t) = A_i \sin(k_2 x - \omega_2 t) =$$
$$= -A_i \sin(\omega_2 t - k_2 x)$$

Condizioni di continuità a $x = 0$

1) $y_1(0,t) = y_2(0,t)$ ⟵ stessa ampiezza a tutti i tempi

$$A_i \sin(\omega_1 t) - A_r \sin(\omega_1 t) = A_t \sin(\omega_2 t)$$

2) $\frac{\partial y_1}{\partial t}(0,t) = \frac{\partial y_2}{\partial t}(0,t)$ ⟵ medesima velocità $v_y(1) = v_y(2)$

$$(\omega_1 A_i - \omega_1 A_r) \cos(\omega_1 t) = \omega_2 A_t \cos(\omega_2 t)$$

Le due condizioni sono soddisfatte a tutti i tempi t se:

- $A_i - A_r = A_t$
- $\omega_1 = \omega_2$

⟶ Come nel caso di un oscillatore armonico forzato, la corda 2 oscilla con la stessa frequenza dell'eccitazione subita dalla corda 1 [Anche se la frequenza di oscillazione libera della corda 2 è diversa]

⟹ È ragionevole aspettarsi, per analogia, che l'energia trasmessa in 2 sia massima quando le frequenze di oscillazione libera delle due corde sono uguali

3) $\frac{\partial y_1}{\partial x}(0,t) = \frac{\partial y_2}{\partial x}(0,t) \longrightarrow$ medesima forza verticale in 1 e 2 per $x=0$

$F_y(1) = F_y(2)$ perché un punto di massa nulla (corda a $x=0$) non può sostenere nessuna forza finita (avrebbe accelerazione infinita)

$$k_1 A_i + k_i A_r = k_2 A_t$$

Combinando 1), 2) e 3) si ha:

$$\begin{cases} A_i - A_r = A_t \\ A_i + A_r = \frac{k_2 A_t}{k_1} \end{cases} \qquad \frac{k_2}{k_1} = \frac{v_1}{v_2}$$

D'altronde, $v_i = \sqrt{\frac{T}{\mu_i}}$

$$T = v_i(v_i \mu_i) = v_i Z_i$$

Dunque, poiché T è costante,

$$\frac{k_2}{k_1} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{Z_2}{Z_1}$$

$$\begin{cases} A_i - A_r = A_t \\ A_i + A_r = \frac{Z_2}{Z_1} A_t \end{cases}$$

Risolvendo il sistema

$$2A_i = \frac{Z_2 + Z_1}{Z_1} A_t$$

$$\rightarrow \frac{A_t}{A_i} = \frac{2Z_1}{Z_1 + Z_2} \quad \text{Frazione di ampiezza trasmessa}$$

$$\rightarrow \frac{A_r}{A_i} = 1 - \frac{A_t}{A_i} = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_1 + Z_2} \quad \text{" riflessa}$$

L'analisi completa richiede di tener conto delle fasi relative. L'analisi dei moduli al quadrato (ampiezze al quadrato) dà conto della Potenza trasportata dalle corde:

$$\left(\frac{P_t}{P_i}\right) = \frac{4Z_1^2}{(Z_1 + Z_2)^2} \quad \text{Potenza trasmessa}$$

$$\left(\frac{P_r}{P_i}\right) = \left(\frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2}\right)^2 \quad \text{Potenza riflessa}$$

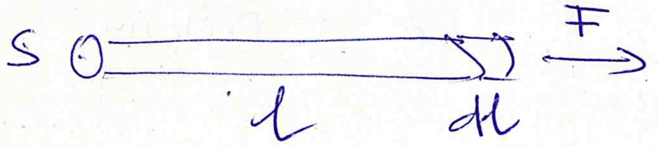
- Nel limite $Z_1 = Z_2$ (stessa impedenza meccanica) la riflessione è nulla $\leftrightarrow$ ("Impedenze adattate")
- Per $Z_1 \neq Z_2$ c'è simmetria completa nel trasferimento di energia (relazioni dipendono quadraticamente da Z_1 e Z_2) indipendentemente dal fatto che l'onda incidente propaghi da 1 o 2
- Applicazioni: Ecografie / Ecoscandaglio / onde sismiche
  Adattamenti meccanici (es. orecchio)

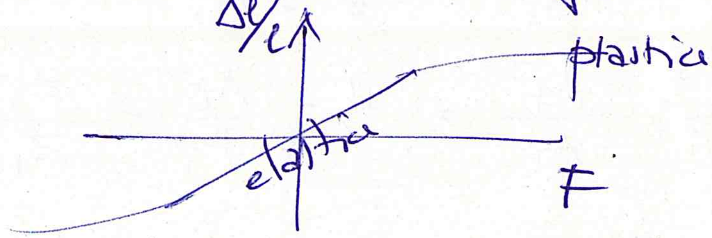
ONDE ELASTICHE IN SBARRA SOLIDA (Mazzoldi)

Proprietà elastiche dei solidi. Compressione e trazione con deformazione lineare prop. allo sforzo

$$\boxed{\frac{F}{S} = E\,\frac{dl}{l}}$$

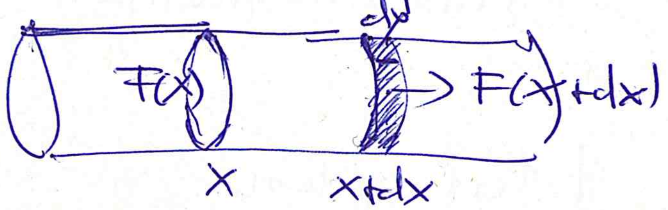
E = modulo di Young





[Nota: Nella relazione empirica F rappresenta la forza esterna per allungare di un tratto dl $\Longrightarrow$ esiste forza interna di richiamo $F = -k\,dl$ ~~per~~ che definisce l'equilibrio]

— Onda di compressione/dilatazione elastica (longit)



dy = allungamento

$\frac{dy}{dx} \ll 1$

allungamento relativo ($\frac{dl}{l}$)

$dF = F(x+dx) - F(x)$

$dF = ES\frac{\partial y}{\partial x}$ $\longleftarrow$ proprietà elastica

Eq. di Newton per $dm = \rho S dx$

$$E\cancel{S}\,\partial\frac{\partial y}{\partial x} = (\rho \cancel{S} dx)\,\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \qquad (F = ma)$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{\rho}{E}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0}$$

EQ. D'ONDA

$$v = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

$\left[\frac{\text{Proprietà elastica}}{\text{Proprietà inerziale}}\right]$

Nei solidi ci possono essere anche onde trasversali (sforzi di taglio) v diversa non da modulo di Young

ONDE DI PRESSIONE (MONODIM.)

- Fluido ⟹ Completamente deformabile, non può sostenere sforzi di taglio per cui → la forza perde significato geom. (non c'è direzione privilegiata, eccetto alle superfici limite):

Per qualsiasi superficie interna:

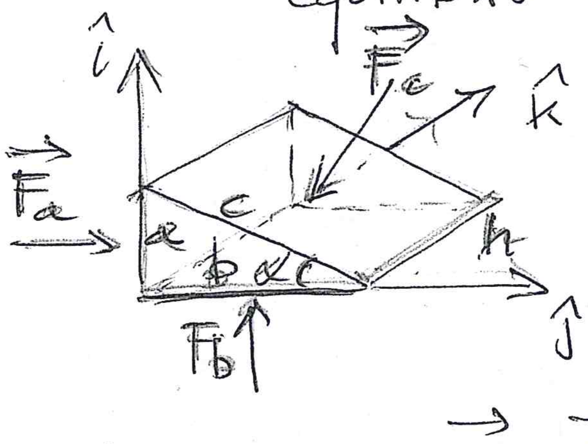
- F tangenziale nulla
- F è ortogonale alla superficie

- Pressione = grandezza scalare (indip. dalla geom)

$$p = \frac{\vec{F} \cdot \vec{n}}{S}$$ per qualsiasi superficie (infinitesima) passante per il punto

Definizione indip. dall'orientazione di S

Esempio: Elemento infinitesimo di fluido in equilibrio statico ($\Sigma \vec{F} = 0$)



$p_a = F_a/ah = F_a/c\sin\alpha\, h$

$p_b = F_b/bh = F_b/c\cos\alpha\, h$

$p_c = F_c/ch$

Eq. statico: $\vec{F}_a + \vec{F}_b + \vec{F}_c = 0$

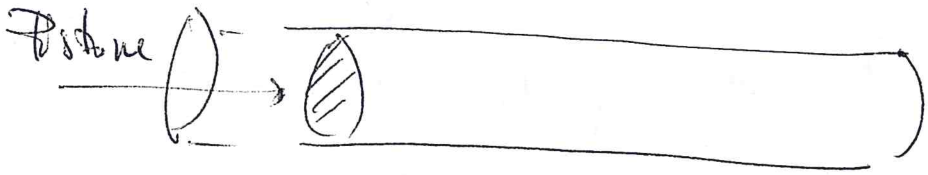
Eq. lungo asse x: $F_a = F_c \sin\alpha \Rightarrow p_a = p_c$

" asse y: $F_b = F_c \cos\alpha \Rightarrow p_b = p_c$

Cioè $p_a = p_b = p_c \equiv p$ Pressione identica, indip. dall'orientazione della superficie

ONDE IN UN TUBO (Colonna d'aria)

$\longrightarrow$ longitudinale e monodim.



Comprimibilità di un fluido (equivalente alla relazione empirica di Young per un corpo di geom. indefinita)

$$\Delta p = -\beta \frac{\Delta V}{V} \qquad \left(\frac{F}{S} = E \frac{S\,dl}{S\,l} \right)$$

Per i liquidi $\quad \beta \sim 10^9\ \mathrm{Pa}$ (poco comprimibili)

gas $\quad \beta \sim 10^5\ \mathrm{Pa}$ $(\sim p_0)$

Note: $[p] = [\frac{F}{S}] \longrightarrow 1\ \mathrm{Pa} = \frac{1\ \mathrm{N}}{1\ \mathrm{m}^2}$ unità S.I.

definiremo β per i gas, studiando le leggi dei gas. Dipende dal tipo di trasformazione

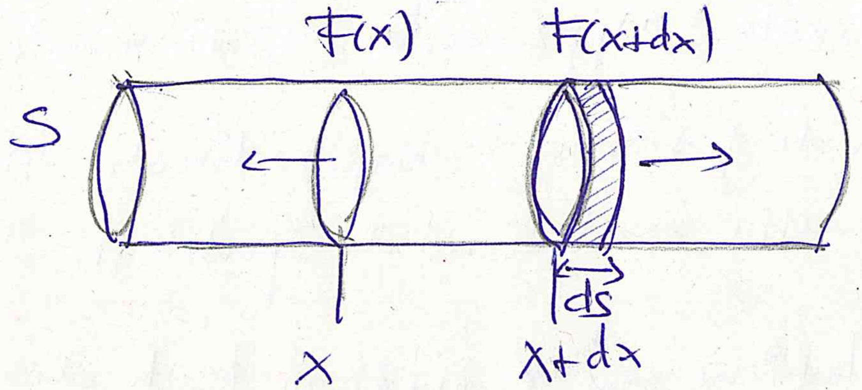
Densità: Fluido $\rightsquigarrow$ geometria variabile: il concetto di massa è sostituito dalla densità

$$\rho = \frac{dm}{dV} \rightsquigarrow \frac{d\rho}{\rho} = -\frac{dV}{V}$$

Variabili pressione e densità adeguate per lo studio della propagazione delle onde:

β = proprietà elastica

ρ = " inerziale



$$V = S\,dx$$
$$dV = S\,ds$$

$$\Delta p = -\beta \frac{dV}{V} = \beta \frac{d\rho}{\rho}$$

Variazione di volume e densità → perturbazione di pressione

Forze su elemento dx di massa $dm = \rho S dx$:

$$dF = S\left[p(x) - p(x+dx)\right] = -S\,dP = S\,\beta \frac{dV}{V} =$$
$$= S\beta \frac{\partial s}{\partial x}$$

2^a legge di Newton per $dm = \rho S dx$:

$$\cancel{S}\beta \frac{\partial s}{\partial x} = (\rho \cancel{S} dx)\frac{\partial^2 s}{\partial t^2}$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 s}{\partial x^2} - \frac{\rho}{\beta}\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = 0}$$

EQ. D'ONDA per spostamenti longitudinali del fluido

$$v = \sqrt{\frac{\beta}{\rho}} \equiv \left[\frac{\text{Proprietà elastica del mezzo}}{\text{Proprietà inerziale del mezzo}}\right]^{1/2}$$

velocità di propagazione della perturbazione

- L'eq. d'onda trovata rappresenta "spostamenti" (perturbazioni di posizione) longitudinali del fluido attorno alla condizione di equilibrio

- Cerchiamo relazione con <u>variazioni locali di pressione</u>:

  - Poichè non c'è spostamento netto di materia $\longrightarrow$ variazioni locali di pressione e posizione avvengono a <u>massa costante</u> nel volume $S dx$

Senza perturbazione: $dm = \rho S dx$

Con perturbazione (cioè variazione di ρ e/o posizione locale): $dm' = (\rho + d\rho) S (dx + ds)$

$$= \rho S dx \left(1 + \frac{d\rho}{\rho}\right)\left(1 + \frac{\partial s}{\partial x}\right)$$

$$= dm \left(1 + \frac{d\rho}{\rho} + \frac{\partial s}{\partial x} + \cancel{\frac{d\rho}{\rho}\frac{\partial s}{\partial x}}\right)$$

trascurabile Inf. 2° ordine

Condizione $dm' = dm$: $\dfrac{d\rho}{\rho} = -\dfrac{\partial s}{\partial x}$

D'altronde: $\Delta p = \beta \dfrac{d\rho}{\rho} = -\beta \dfrac{\partial s}{\partial x}$

$$p(x,t) = p_0 - \beta \frac{\partial s}{\partial x}$$

Variazioni di p legate alla <u>derivata di s</u>.

Se $s(x,t)$ è sinusoidale, $p(x,t)$ è sinusoidale (con fase relativa di $\pi/2$)

$$\frac{\partial}{\partial x}(\sin x) \longleftrightarrow \cos x$$

Per onde <u>stazionarie</u> sinusoidali

nodi di s $\longleftrightarrow$ ventri di p

ventri di s $\longleftrightarrow$ nodi di p

Eq. d'onda per la pressione:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(p_0 - \beta\frac{\partial s}{\partial x}\right) = \quad \left[\text{relazione } p, \frac{\partial s}{\partial x}\right]$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(-\beta\frac{\partial^2 s}{\partial x^2}\right) = \quad [p_0 \text{ è cost.}]$$

$$= -\rho\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 s}{\partial t^2}\right) = \quad [\text{Eq. d'onda per } s]$$

$$= -\rho\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial s}{\partial x}\right) = \quad [\text{inversione ordine di derivazione}]$$

$$= +\frac{\rho}{\beta}\frac{\partial^2}{\partial t^2}p$$

[relazione p e $\frac{\partial s}{\partial x}$ e ignoro p_0 poiché compare in una derivata]

$$\Longrightarrow \boxed{\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - \frac{\rho}{\beta}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0}$$

EQ. D'ONDA per p —

Di fatto l'eq. d'onda è per $\delta p = p - p_0 = -\beta\frac{\partial s}{\partial x}$, poiché p_0 = cost è nullo in ogni derivazione

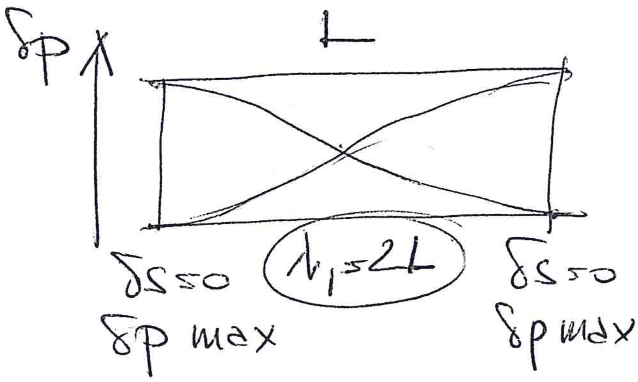
* Onda acustica di pressione
  * spost. (perturbazione) longitudinale
  * Δp sfasato di 90°

* s e p sono di natura differente; s è vettoriale (è uno spostamento) "appare" scalare nell'analisi 1-D. La grandezza p è sempre scalare (anche in 2D e 3D) come deve essere una grandezza che non dipenda dalla geometria

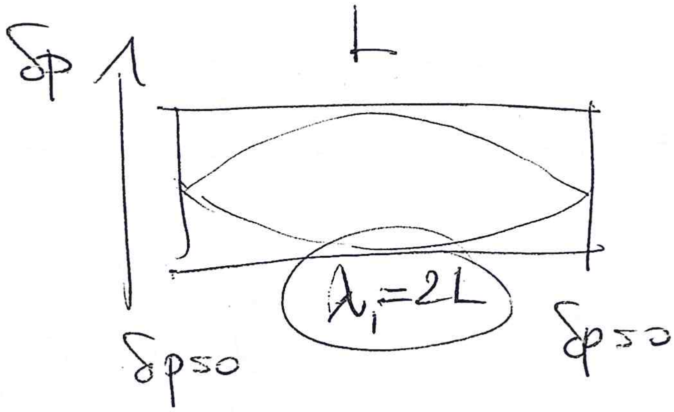
* Il principio di sovrapposizione vale per pressione (e non per $\vec{s}$) è onde di pressione

- ONDE in un tubo (colonna d'aria, canne)

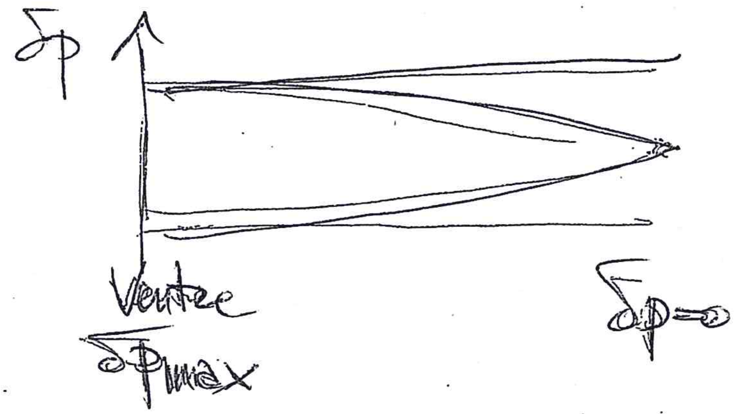
1) TUBO CHIUSO
Onda stazionaria
non c'è spostamento agli estremi → nodi di s e ventri di p



2) TUBO APERTO
onda stazionaria
$\delta p = 0$ agli estremi
(equilibrio di pressione con il gas esterno)
→ nodi di p e ventri di s



3) TUBO SEMICHIUSO (O SEMIAPERTO)

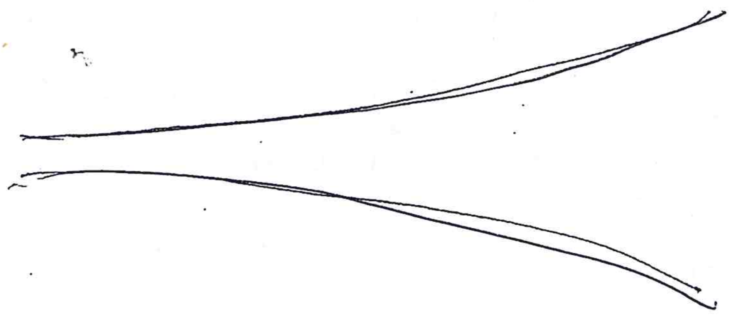


$\lambda_1 = 4L$

In realtà i tubi aperti non sono vincoli ideali per p (condizione $\delta p = 0$ ~~...~~ non "rigida")

→ c'è trasferimento di energia all'esterno e l'onda acustica si propaga anche fuori dallo strumento.

– Forma della bocca di uno strumento che massimizza il trasf. di energia

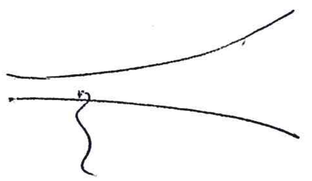


Espansione del corno

→

per esercizio

Profilo della tromba (adattamento di impedenza)



$dm = \infty$

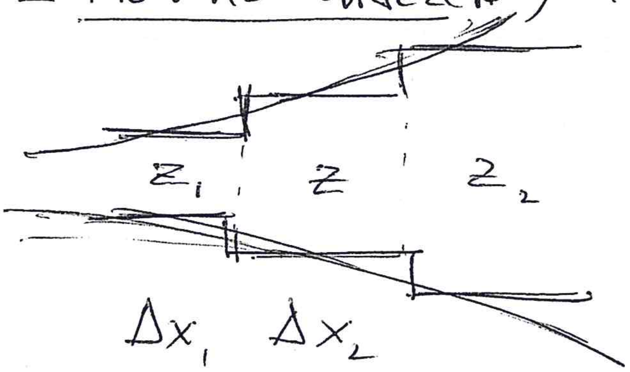
$dm = \rho S dx$

$Z = \mu v = \rho S v$

~~La~~ variazione di impedenza di un tratto dx, $Z(x)$, dipende solo da S, poiché ρ e v sono costanti nello stesso gas.

- Modello discreto; tratti identici

$\Delta x_1 = \Delta x_2$



Troviamo Z t.c. il trasf. di energia da Z_1 a Z_2 sia massimo

Siano Z_1 e Z_2 fissi e $Z_1 < Z < Z_2$

Troviamo il massimo della potenza trasmessa da

$$\frac{d}{dZ}\left(\frac{P_t}{P_i}\right) = \frac{d}{dZ}\left[\underbrace{\frac{4Z^2}{(Z_1+Z)^2}}_{\text{Trasmissione da } Z_1 \text{ a } Z} \cdot \underbrace{\frac{4Z_2^2}{(Z_2+Z)^2}}_{\text{da } Z \text{ a } Z_2}\right] = 0$$

Trasmissione da Z_1 a Z $\times$ da Z a Z_2

Lo zero della derivata ~~dp~~ è lo zero del numeratore (a meno di termini costanti):

$$z(z_1+z)^2(z_2+z)^2 - z^2(z_1+z)(z_2+z)^2 - z^2(z_1+z)^2(z_2+z) = 0$$

$$z(z_1+z)(z_2+z)\underbrace{\left[(z_1+z)(z_2+z) - z(z_2+z) - z(z_1+z)\right]}_{} = 0$$

$$z_1 z_2 + z(z_1+z_2) + z^2 - z(z_1+z_2) - 2z^2 = 0$$

$$z_1 z_2 - z^2 = 0$$

$$z = \sqrt{z_1 z_2} \qquad \text{media geometrica}$$

<u>Variazione relativa</u> su ciascun tratto:

$$\Delta x_1 : \quad \frac{\Delta z}{z} = \frac{z - z_1}{z_1} = \frac{\sqrt{z_1 z_2} - z_1}{z_1} = \sqrt{\frac{z_2}{z_1}} - 1$$

$$\Delta x_2 : \quad \frac{\Delta z}{z} = \frac{z_2 - z}{z} = \frac{z_2 - \sqrt{z_1 z_2}}{\sqrt{z_1 z_2}} = \sqrt{\frac{z_2}{z_1}} - 1$$

<u>Medesima variazione</u> relativa su due tratti identici (**)

Limite continuo → stessa variazione relativa su ciascun tratto dx:

$$\frac{dz}{z} = \alpha\, dx \longrightarrow z = z_0 e^{\alpha x}$$

$$\cancel{\rho \delta S = 8 \rho \delta S_0 e^{\alpha x}}$$

$$r = r_0 e^{\frac{\alpha}{2} x} \qquad \text{Profilo esponenziale}$$

(**) <u>Esercizio</u>: Dimostrare che si ottiene lo stesso risultato per la massa m che massimizza il trasf. di energia da M a m_1 con urto elastico