

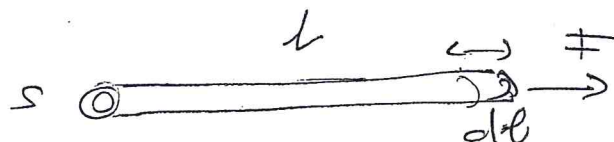
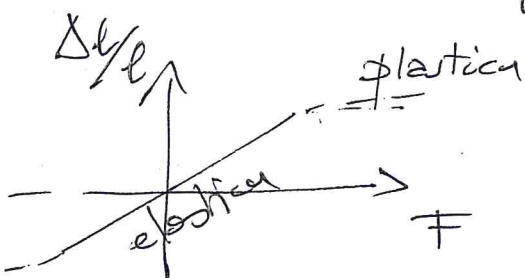
ONDE ELASTICHE IN SBARDA SOLIDA

(26)

Proprietà elastiche dei solidi. Compressione e tensione con def. lineare prop. allo sforzo:

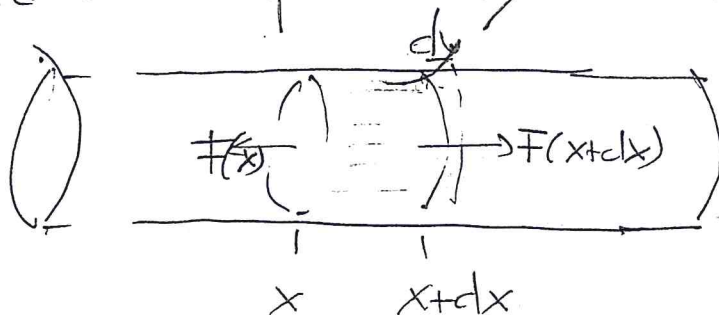
$$\frac{F}{S} = \pm \frac{\Delta l}{l}$$

E = Modulo di Young



(Note: la F rapp. la forza esterna per allungare di un tratto $dl \Rightarrow$ esiste forza interna di richiamo $F = -kdl$)

— onda di compressione/dilatazione elastica (longit.)



dy = allungamento

$$\frac{dy}{dx} \ll 1$$

allung. relativo

$$dF = F(x+dx) - F(x)$$

$$dF = \pm S \cdot \frac{\partial y}{\partial x} \quad \leftarrow \text{proprietà elastica}$$

Eq. di ~~Nx~~ per massa $dm = \rho S dx$

$$\cancel{E} S \frac{\partial y}{\partial x} = \rho \cancel{S} dx \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

Derivando risp. a x e integrando:

$$\boxed{\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{\rho}{E} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0}$$

Eq. D'ONDA

$$v = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

prop. d'onda
prop. inerziali

Impedenza meccanica

$$\langle \Phi \rangle = \frac{1}{2} \mu v \omega^2 A^2$$

→ "impedenza meccanica"

Def. $Z(\omega) = \frac{F}{v}$

→ rapporto tra forza applicata e velocità con cui si muove il punto -

→ Analogo a R nel fenomeno elettrico

- In generale F e v non hanno la stessa fase.
e si usa la notazione complessa -

- Nel caso di onde sinusoidali

$$y(x, t) = A \sin(kx - \omega t)$$

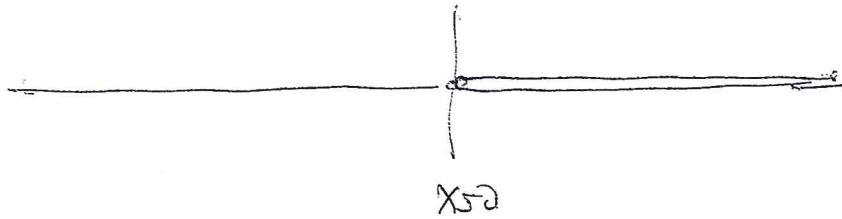
$$Z = - \frac{T \partial y / \partial x}{\partial y / \partial t} = \frac{T k}{\omega} = \frac{T}{v} = \underline{\underline{\mu v}}$$

Per onde generica $y = f(x \pm vt)$

$$Z = - \frac{T \partial y / \partial x}{\partial y / \partial t} = \frac{T f'}{v f'} = \frac{T}{v} = \underline{\underline{\mu v}}$$

- L'impedenza controlla la trasmissione di energia tra due mezzi -

Riflessione / Rifrazione lungo una corda



- * Sia T costante in tutta la corda (equilibrio lungo)
- * saldature ideali ma $\mu_1 \neq \mu_2$

$$\rightarrow v_1 = \sqrt{T/\mu_1} \neq v_2 = \sqrt{T/\mu_2}$$

$$\rightarrow Z_1 = v_1 \mu_1 \quad Z_2 = v_2 \mu_2$$

* CASO SEMPLICE :

CONDIZIONE INIZIALE :

ONDA SINUSOIDALE PROGREDIVA DA $x < 0$

$$y_i(x,t) = A_i \sin(\omega_1 t - k_1 x)$$

DOPO L'INCONTRO CON DISCONTINUITA' :

$$\text{trasmessa } y_t(x,t) = A_t \sin(\omega_2 t - k_2 x)$$

$$\text{riflessa } y_r(x,t) = A_r \sin(\omega_1 t + k_1 x)$$

~~→ stesso ω per tutte le onde perché si conserva v~~

1) Per $x = 0$:

$$A_i \sin(\omega t) = A_t \sin(\omega t) + A_r \sin(\omega t)$$

Condizione di
continuità deve
valere per ogni t

$$A_i = A_t + A_r$$

2) $\sum v_y$ deve essere identica $\Rightarrow \omega_1 = \omega_2 = \omega$ (si tiene alle piazze)
 $v = \omega A \sin(\omega t)$ etc.

3) Continuità nella derivata prima — stessa inclinazione —

In (1) ho somma di int riffr

$$\frac{\partial y_i}{\partial x} + \frac{\partial y_r}{\partial x} = \frac{\partial y_t}{\partial x}$$

$$-k_1 A_i + k_1 A_r = -k_2 A_t$$

—————> Questa condizione

significa $F_y(1) = F_y(2)$

Se così non fosse ci sarebbe nella
giuntura una forza finita o massa nulla

$\Rightarrow$ acc. infinita impossibile

$$k = \frac{\omega}{v} \quad \Rightarrow \quad -\cancel{\frac{\omega A_i}{v_1}} - \frac{\omega}{v_1} (A_t + A_r) = -\frac{\omega A_t}{v_2}$$

In sommario:

$$\begin{cases} A_i = A_t + A_r \\ A_i + A_r = \frac{v_1}{v_2} A_t \end{cases}$$

$$\text{Sommando: } 2A_i = \frac{v_1 + v_2}{v_2} A_t$$

$$\frac{A_t}{A_i} = \frac{2v_2}{v_1 + v_2}$$

$$\frac{A_r}{A_i} = \frac{v_2 - v_1}{v_1 + v_2}$$

Intensità $\propto \omega^2 A^2$

Poiché abbiamo assunto $T = \text{cost}$

$$Z_1 = \sigma_1 \mu_1 = T / \sigma_1$$

$$Z_2 = \sigma_2 \mu_2 = T / \sigma_2$$

$\rightarrow$ Possiamo sostituire Z_1 e Z_2 a σ_1 e σ_2

$\leadsto$ Ampiezza dell'onda riflessa

$$\frac{A_r}{A_i} = \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2}$$

$\leadsto$ Intensità (media) dell'onda riflessa

$$\frac{I_r}{I_i} = \frac{A_r^2}{A_i^2} = \frac{(Z_1 - Z_2)^2}{(Z_1 + Z_2)^2}$$

Argomenti di impedenza:

$\rightarrow$ Ecografia

$\rightarrow$ Oracchio

ONDE DI PRESSIONE (MONODIM.)

(27)

- o Fluido ~~non~~ completamente deformabile, la forza non può avere un significato geometrico preciso (eccetto alle superfici limite)

→ F è ortogonale ad ogni superficie che taglia il fluido (statico)

→ comp. tangenziale nulla (statico)

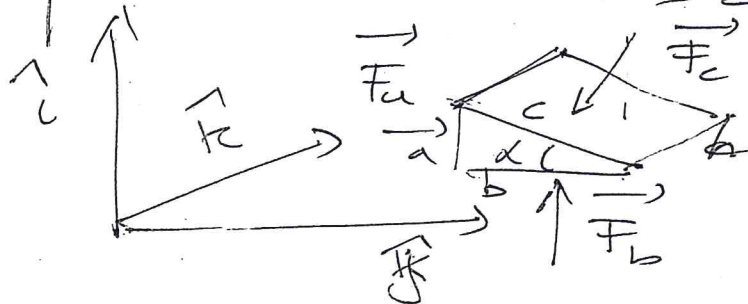
Altimenti sconimento senza possibilità di equilibrio

- o Pressione = grand. scalare:

$$p = \frac{\vec{F} \cdot \vec{n}}{S}$$

ogni superficie interna IDENTICA IN OGNI SUPERF. INT. (indip. orientazione)

Esempio Considero elem. infinitesimo di fluido in equilibrio statico → $\sum \vec{F} = 0$



$$\vec{F}_a + \vec{F}_b + \vec{F}_c = 0$$

$$p_a = F_a / ah = F_a / c \sin \alpha h$$

$$p_b = F_b / bh = F_b / c \cos \alpha h$$

$$p_c = F_c / ch$$

$$\vec{F}_c = F_c \sin \alpha \vec{i} + F_c \cos \alpha \vec{j}$$

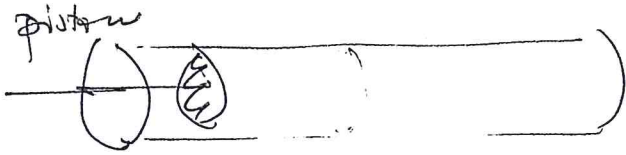
$$\text{Equilibrio lungo } \vec{i} \Rightarrow p_c = p_a$$

$$\text{" " } \vec{j} \Rightarrow p_c = p_b$$

$$p_c = p_a = p_b = p \quad \leftarrow \text{pressione identica e indep. dalla superficie}$$

ONDE IN TUBO $\rightarrow$ long. e monodim

(28)



Comprimibilità di un fluido (equiv. a modulo di Young) ma qui effetto con geom. def.

$$\Phi = -\beta \frac{dV}{V} \quad \left(\frac{\beta}{S} = E \cdot S \frac{dl}{l} \right)$$

Per liquidi $\beta \sim 10^9 \text{ Pa}$
 gas $\beta \sim 10^5 \text{ Pa}$ (pneumatici)

[NOTA $[\Phi] = \left[\frac{\beta}{S} \right] \rightarrow 1 \text{ Pa} = \frac{1 \text{ N}}{1 \text{ m}^2}$]

Densità $\rho = \frac{dm}{dV} \leadsto \rho = \frac{m}{V} \leadsto \frac{d\rho}{\rho} = -\frac{dV}{V}$

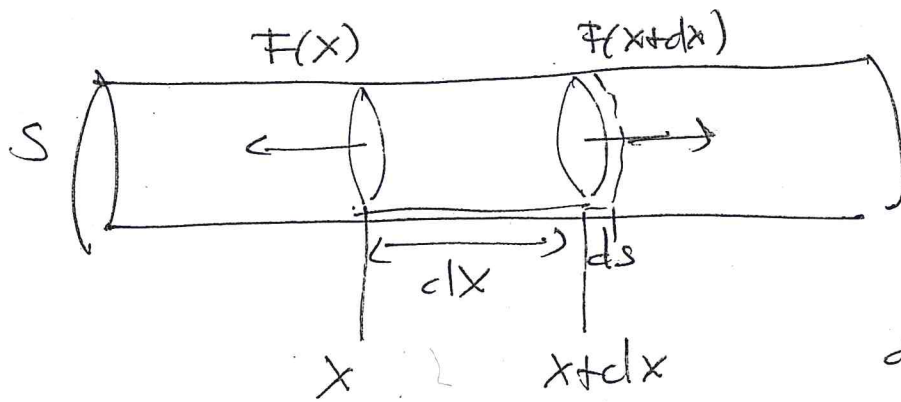
con q.s. osservabili posso studiare la propagazione di onde longitudinali $\rightarrow$ (acustiche) di pressione

Proprietà elastica: β
 " inerziale: ρ

$$\rightarrow v = \sqrt{\frac{\beta}{\rho}}$$

per analogia con i risultati precedenti

$\rightarrow$ calcolo esplicito con modello d'equilibrio



(29)

$$V = S dx$$

$$dV = S ds$$

Ricondotti: $\Phi = -\rho \frac{dV}{V} = \rho \frac{d\rho}{\rho}$ Variazione di densità

Forza su elemento dx di massa $dm = \rho S dx$

$$dF = S [p(x+dx) - p(x)] = S dp = + S \rho \frac{dV}{V}$$

$$= S \rho \frac{ds}{dx}$$

Legge di Newton per dm:

$$dF = (dm) \frac{\partial^2 s}{\partial t^2}$$

ASSUMO MASSA
COSTANTE CHE
OCCLUDE VOL. DIFF

$$\cancel{S} \rho \frac{\partial s}{\partial x} = \rho \cancel{S} dx \frac{\partial^2 s}{\partial t^2}$$

Derivando rispetto a x :

$$\rho \frac{\partial^2 s}{\partial x^2} = \rho \frac{\partial^2 s}{\partial t^2}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 s}{\partial x^2} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = 0$$

EQ. D'ONDA

$$v = \sqrt{\frac{\rho}{\rho}}$$

prop. elastica / prop. inerziale

- Ho trovato un'onda che rappresenta una "spostamento" (longitudinale del fluido (attorno a equilibrio)) $\rightarrow$ Perturbazione in realtà

- Relazioni con variazioni locali di pressione.

Input, $dm = \rho dx$

Pert., $dm = (\rho + d\rho) S(dx + ds)$

$$= (\rho + d\rho) S dx \left(1 + \frac{\partial s}{\partial x}\right)$$

$$= \left(\rho \cancel{S dx} + d\rho + \rho \frac{\partial s}{\partial x} \cancel{S dx} + \cancel{d\rho \frac{\partial s}{\partial x}} \right) S dx$$

$\rightarrow$ massa costante

Inf. 2° ordine
trascurato

Equagliando :

$$d\rho = -\rho \frac{\partial s}{\partial x} \quad \Rightarrow \quad \frac{d\rho}{\rho} = -\frac{\partial s}{\partial x}$$

D'altronde :

$$d\phi = +\beta \frac{d\rho}{\rho} = -\beta \frac{\partial s}{\partial x}$$

$$\boxed{\phi(x, t) = \phi_0 - \beta \frac{\partial s}{\partial x}}$$

Se $s(x,t)$ è sinusoidale, $p(x,t)$ è sinusoidale (con fase relativa di 90°)

$$\frac{d}{dx}(\sin x) \longleftrightarrow \cos(x)$$

Per onde stazionarie sinusoidali

Modi di $s \longleftrightarrow$ ventri di p

Ventri di $s \longleftrightarrow$ modi di p

Eq. d'onda per p :

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(-\rho \frac{\partial^2 s}{\partial x^2} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(-\rho \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} \right)$$

$$= \underset{\substack{\text{invertito} \\ \text{l'ordine} \\ \text{derivate}}}{-} \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial s}{\partial x} \right) = \frac{\rho}{\beta} \frac{\partial^2}{\partial t^2} p \quad (**)$$

$$\Rightarrow \left[\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - \frac{\rho}{\beta} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0 \right]$$

(**) ho usato eq. d'onda per s e

$$p = p_0 + \beta \frac{\partial s}{\partial x} \quad \text{ignorando } p_0 \text{ poiché}$$

p compare solo nelle derivate.

Di fatto l'equazione è per $\Delta p = p - p_0 = -\beta \frac{\partial s}{\partial x}$

* Onnda acustica di pressione

* spost. longitudinale

* variaz. di pressione sfasata 90°

* s e ϕ sono di natura diff. s è vetoriale (è uno spostamento) "appare" scalare nell'analisi 1-D - La grandezza ϕ è sempre scalare (anche in 2D e 3D), come deve essere per una grandezza che non dip. dalla geom.

* Il principio di sovrapp. vale per pressioni non per $\vec{s}$. È ONDA DI PRESSIONE

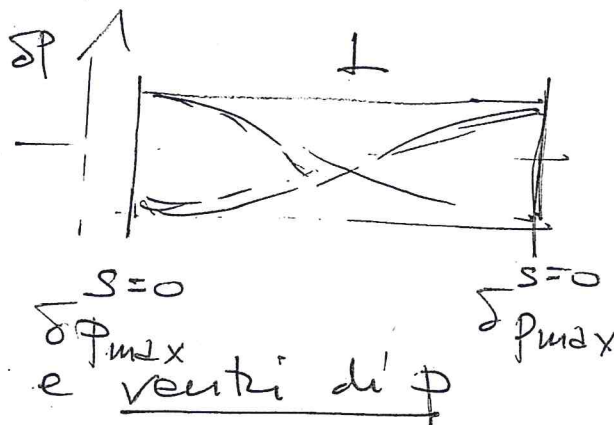
— ONDE IN TUBO:

1) TUBO CHIUSO

ONDA STAZ.

non c'è spostamento agli estremi:

→ modi di s



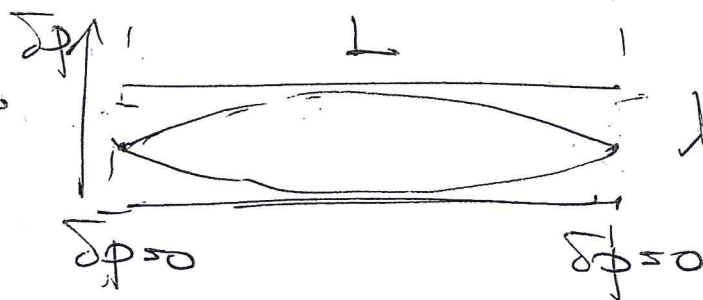
$$\lambda_1 = 2L$$

2) TUBO APERTO

ONDA STAZ.

$\delta \phi = 0$ dove è aperto all'esterno (equil. di pressione)

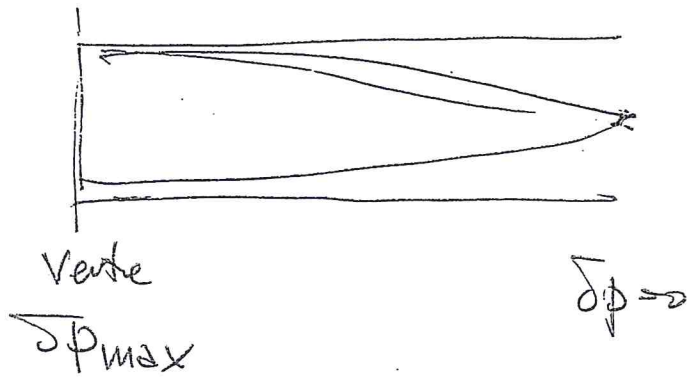
→ modi di ϕ , ventri di s



$$\lambda_1 = 2L$$

3) TUBO SEMI CHIUSO

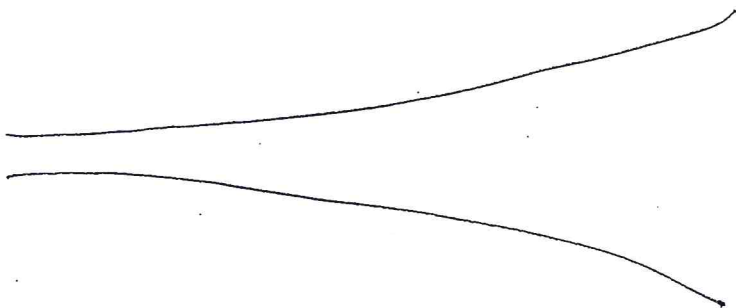
(33)



$$\lambda_1 = 4L$$

In realtà i tubi aperti non sono vincoli ideali per ϕ . (condizione $\Delta p = 0$ ~~non~~ "non è" "non è" "non è")
 → c'è trasferimento di energia all'esterno e l'onda acustica si propaga anche fuori dallo strumento -

— Forma delle bocche di uno strumento che massimizza il transf. di energia



Espressione ?