* L'eq. di D'Alembert (EQ. D'ONDA) è l'equazione che descrive la dinamica di una vasta classe di fenomeni ondulatori. Oltre al caso qui discusso, la stessa equazione si trova nella descrizione dei campi $\vec{E}$ e $\vec{B}$ mutuamente accoppiati in elettromagnetismo.

* Soluzione generale eq. d'onda:

$$y(x,t) = f(x-ct) + g(x+ct)$$

dove f e g rappresentano onde progressive e regressive della forma trovata con l'analisi cinematica precedente.

* Si dimostra che sono soluzioni per sostituzione

$$f(x \pm ct) \equiv f(z)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial z}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t} = \pm c\frac{\partial f}{\partial z}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\pm c\frac{\partial f}{\partial z}\right)\frac{\partial z}{\partial t} = c^2\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} =$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} - \frac{c^2}{c^2}\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0$$

cvd

Si dimostra anche (ma non lo dimostreremo) che le soluzioni dell'eq. d'onde di D'Alembert sono solo e soltanto del tipo

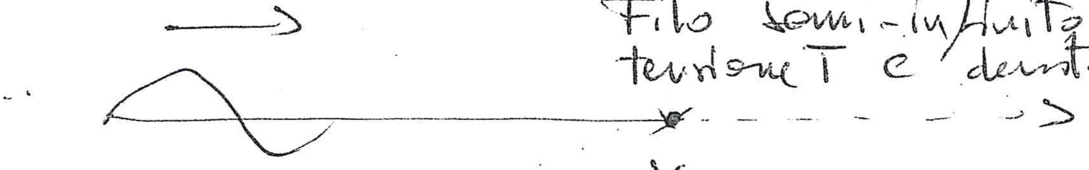
$f(x \pm ct)$ e quindi la forma generale per le soluzioni è quella indicata.

$$y(x,t) = f(x-ct) + g(x+ct)$$

NOTA : L'equazione di D'Alembert è lineare
compaiono solo derivate di ordine n
rispetto a x e t - Quindi
vale il PRINCIPIO DI SOVRAPPOSIZIONE

☐ <u>Soluzione generale</u> per <u>filo con estremo vincolato</u> (~~onde stazionarie~~ ⟶ NOTA l'estremo è punto di un <u>NODO</u>)

"Filo semi-infinito"
tensione T e densità $\mu = m/\ell$



$x = 0$

- onda da $x < 0$
- vincolo fisso a $x = 0$: $y(0,t) = 0$

Soluzione generale :

$$y(x,t) = f(x-ct) + g(x+ct) \qquad (1)$$

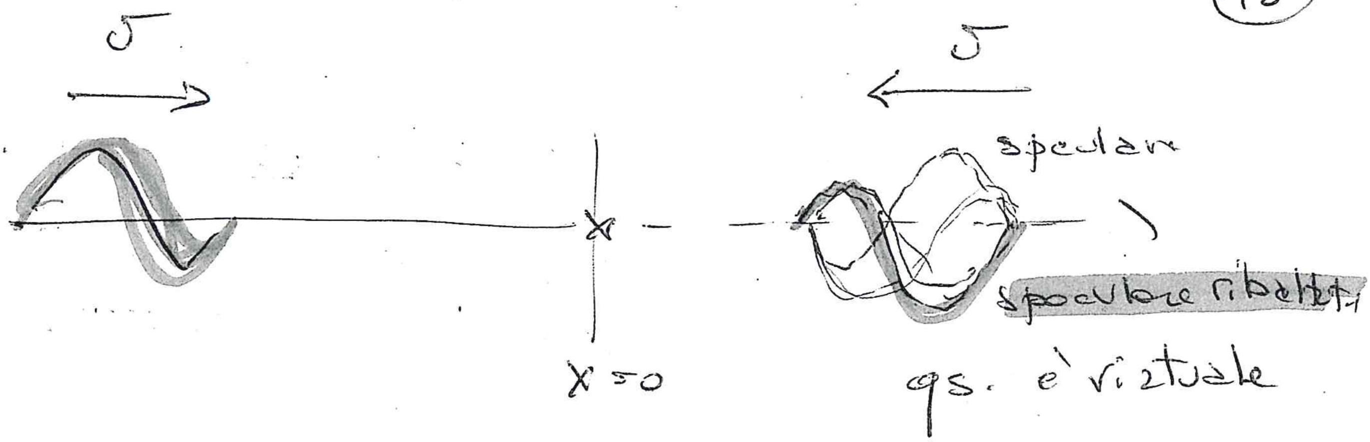
Condizione imposta dal vincolo

$$f(-ct) = -g(ct) \qquad [y(0,t) = 0]$$

Poiché le variabili sono mute, in generale deve valere $-f(-z) = g(z)$.

Per $z = x + ct$, sostituendo in (1) si ha

$$y(x,t) = \underbrace{f(x-ct)}_{\substack{\text{onda progressiva} \\ \text{data da } y(x,0)}} - \underbrace{f[-(x+ct)]}_{\substack{\text{onda regressiva} \\ \text{speculare } (x \to -x) \\ \text{ribaltata: } (f \to -f)}}$$



- Quando le due onde arrivano a $x = 0$ si sommano elidendosi.
- Poi l'onda progressiva si perde nel filo non esistente, l'onda regressiva entra nel filo

$\Longrightarrow$ RIFLESSIONE, $\frac{\text{RIBALTATA}}{\text{CAPOVOLTA}}$ (**)

- si può descrivere il fenomeno anche così
  - c'è solo l'onda progressiva
  - Quando l'onda progressiva arriva in $x = 0$, la perturbazione esercita una forza F_y sul vincolo
  - Il vincolo esercita una forza uguale e contraria (Azione - Reazione) determinando una perturbazione uguale e contraria a quella in arrivo.

(**) Poiché $y(0,t) = 0$ ~~POSSIAMO RAPPRESENTARE~~ IL FENOMENO DICENDO CHE C'È INTERF. DISTRUTTIVA COMPLETA TRA ONDA TRASV. INCIDENTE E ONDA RIFLESSA. QUINDI LE DUE ONDE SONO SFASATE DI 180° $\longrightarrow$ CAPOVOLTE

Se $f(x - vt)$ è sinusoidale:

$$f(x - vt) = A \sin(kx - \omega t)$$ ← "onda prog."

Soluzione generale:

$$y(x,t) = f(x - vt) - f(-x - vt) =$$

$$= A\sin(kx - \omega t) + A\sin(kx + \omega t)$$

SENO È FUNZ. DISPARI

$$= 2A \sin(kx) \cos(\omega t)$$

~~onde stazionarie con nodi~~

La riflessione di un'onda sinusoidale genera un'onda stazionaria

× Si sommano la sinusoide progressiva con la sinusoide regressiva

× non si tratta di un singolo impulso riflesso, ma di una sequenza infinita (periodica) di impulsi.

In generale, per un'onda periodica, tutte le componenti ~~stazion~~ sinusoidali generano una onda stazionaria ⟹ onda periodica con estremo fisso dà onda stazionaria

Corda vincolata in DUE estremi

- Lunghezza L $\quad y(0,t)=0=y(L,t)$

* Onda sinusoidale : la condizione su un estremo impone ~~la con~~ che sia stazionaria

$$y(x,t)=B\sin(kx)\cos(\omega t)$$

La condizione sul secondo estremo, mette vincoli sulla lungh. d'onda.

$$B\sin(kL)\cos(\omega t)=0 \qquad \forall t$$

$$\sin(kL)=0$$

$$\Rightarrow kL=n\pi \qquad \Rightarrow \frac{2\pi}{\lambda}L=n\pi$$

Soluzioni armoniche : $\boxed{\lambda_n=\frac{2L}{n}}$

$$\boxed{\nu_n=\frac{v}{\lambda_n}=n\frac{v}{2L}}$$

Nota : (STRUMENTI A CORDA)

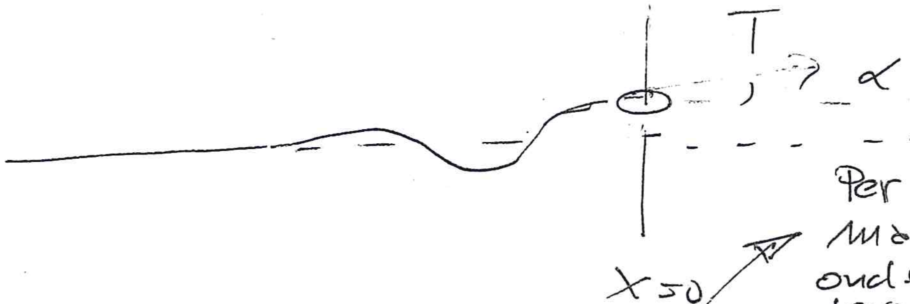
$$\nu_n=n\frac{v}{2L}=\frac{n}{2L}\sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

FREQ. PROPRIE
AUTO FREQ.

- La freq. fond. e le armoniche di una corda tesa crescono con $\sqrt{T}$
- Corde spesse, freq. basse

CORDA FINITA CON ESTREMITÀ LIBERA

si osserva riflessione, ma con caratteristiche differenti. L'impulso non può propagare



Per corda libera $y(0,t)$ è max nel momento in cui onde inc. e riflesse si sovrappongono → INTERF. COSTRUTTIVA

nella regione a $x>0$, poiché non c'è supporto meccanico. Per non dissipare energia ci deve essere riflessione. Analisi → Poiché il capo della corda è libero, la componente y della forza al capo è nulla ad ogni tempo:

$$T_y(0) = 0 \qquad \forall t$$

$$T_y(0) = T \sin\alpha \simeq T\alpha \simeq T\frac{\partial y}{\partial x}(0,t) = 0$$

Questa relazione pone un vincolo sulle derivate di f e g per $x=0$ $\left(y(x,t) = f(x-vt) + g(x+vt)\right)$

* Capo vincolato: $g(z) = -f(-z)$
* capo libero: $g'(z) = -f'(-z)$

La condizione implica $g(z) = f(-z) + \text{cost}$

Riflessione senza ribaltamento. Inoltre, poiché a tempi iniziali e a tempi lunghi il capo è a riposo (prima e dopo la riflessione), la condizione

$$y_+(0,t) + y_-(0,t) = 0 \qquad \text{per } t \ll 0 \text{ e } t \gg 0$$

implica che la cost. $= 0$

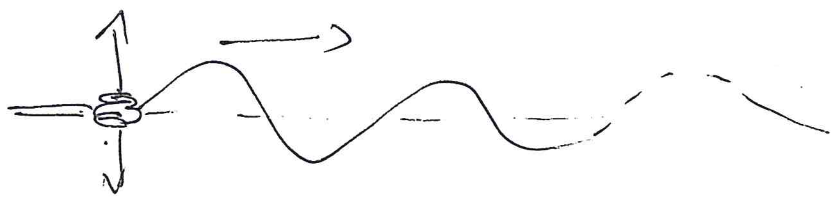
La soluzione generale è dunque:

$$y_+(x,t) = f(x - v t)$$
$$y_-(x,t) = f(-(x + v t))$$ onda regressiva speculare non capovolta

→ Equivalente della riflessione da uno specchio
FASE RIFL = FASE INC. VEDI PRIMA

POTENZA E INTENSITÀ DI UN'ONDA

* Immissione di lavoro, tramite forza esterna, per sostenere il treno di impulsi (onde) → trasporto di energia (e q.tà di moto) all'estremo di una corda assieme alla propagazione dell'onda



Flusso continuo di energia

* Calcolo della potenza trasportata dall'onda, tramite la potenza di un tratto dx per spostare l'onda dall'equilibrio di un tratto dy —

$$P = \vec{F}_y \cdot v_y$$

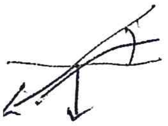
lo spostamento ~~netto~~ è lungo y, non c'è spostamento lungo x

La forza lungo y è ~~sempre una forza di richiamo verso~~ la ~~condizione di equilibrio~~ associata alla tensione della corda esercitata dal tratto prec. sul tratto succ. — La componente y

F_y

di questa forza è concorde con $v_y \Longrightarrow F_y v_y > 0$ in ogni punto → c'è flusso continuo di energia.

× Su ogni elemento $dm = \mu dx$ agisce la tensione della corda T, la cui componente y compie lavoro per spostare la corda lungo y –



$$F_y = T \sin\alpha \simeq T \operatorname{tg}\alpha = -T \frac{\partial y}{\partial x}$$

(segno neg. perché la ~~pendenza~~ F_y ha segno opposto a $\frac{\partial y}{\partial x}$)

× L'elemento dx esercita tensione sul successivo e così via → l'impulso si propaga e così l'energia.

× Potenza:

$$P = F_y v_y = -T \frac{\partial y}{\partial x} \cdot \frac{\partial y}{\partial t} =$$

$$= +T k\omega A^2 \cos^2(kx - \omega t)$$

Usando la relazione di dispersione $v = \omega/k$ e la relazione $T = v^2 \mu$ si ottiene

$$P = \mu v A^2 \omega^2 \cos^2(kx - \omega t)$$

× Potenza media su un periodo:

$$\langle P \rangle = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} P \, dt = \frac{1}{2} \mu v A^2 \omega^2$$

(si è usato $\frac{1}{T}\int_0^T (\cos^2 t + \sin^2 t)\,dt = 1$)

La potenza media dipende dal ~~quad~~

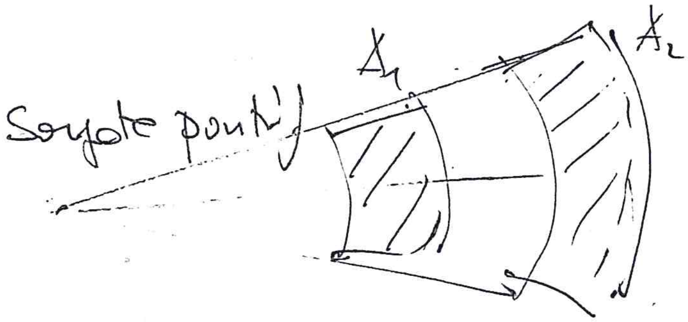
- quadrato dell'ampiezza
- quadrato della frequenza

$\boxed{\text{Risultato generale}}$ e non soltanto per le corde

x no - - -

x le onde 2D o 3D si usa l'intensità anziché la potenza per tener conto della geometria del sistema:

$I = \langle P \rangle / Area$ — potenza per unità di superficie



La potenza è costante. L'intensità diminuisce con $1/r^2$

Si può trovare espressione per onde ~~stazion~~ sferiche:

$I = \dfrac{\langle P \rangle}{4\pi r^2}$ ⤳ potenza per unità di superficie diminuisce

Poiché $I \div A^2 \implies f(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t) = \dfrac{A}{r} \sin(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)$

Ampiezza decrescente con $1/r$ onda sferica

ENERGIA DI UN'ONDA STAZIONARIA —

* In un'onda stazionaria non c'è trasporto di energia, poiché non c'è un'onda che si propaga. Tuttavia all'oscillazione della corda deve corrispondere una energia meccanica.

* Potremmo calcolarla come somma di $E_k + E_p$ trovando le espressioni di E_k e E_p per un tratto dx

È più semplice sfruttare il calcolo precedente osservando che possiamo rappresentare l'onda stazionaria come somma di un'onda sinusoidale progressiva e una regressiva. Ne sommiamo le potenze e calcoliamo l'en. $E_M = \langle P \rangle \cdot T$

— $y(x,t) = A \sin(kx)\cos(\omega t) =$

$$= \frac{A}{2}\sin(kx-\omega t) + \frac{A}{2}\sin(kx+\omega t)$$

— $$\langle P \rangle = \langle P_1 \rangle + \langle P_2 \rangle = \frac{1}{2}\left[\frac{A^2}{4}\omega^2 \mu v + \frac{A^2}{4}\omega^2 \mu v\right]$$

$$= \mu v \frac{A^2}{4}\omega^2$$

— $$E_M = \langle P \rangle T = \mu v T \frac{A^2}{4}\omega^2 = \mu L \frac{A^2\omega^2}{4}$$

metà di qs. energia è cinetica e metà è pot.

Note:

$\mu v T = \mu \lambda$ segue dalla relazione di dispersione $\lambda \nu = v$ –

$\mu \lambda = M$ è la massa della corda in un tratto di lunghezza λ (periodo spaziale dell'onda)

Dunque il risultato equivale a:

$$E_m = \frac{1}{4} M \omega^2 A^2 = \frac{1}{2}\Big[\underbrace{\frac{1}{2} M\omega^2 A^2}_{\text{En. di un oscillatore armonico di massa } M \text{ che oscilla con ampiezza } A}\Big]$$

$M\omega^2$ = costante elastica dell'oscillatore

Cioè l'en. meccanica associata ~~alla~~ a un'onda sinusoidale stazionaria in una corda è metà dell'energia meccanica di un oscillatore armonico con massa $M = \mu\lambda$ etc.

Il fattore 1/2 aggiuntivo si può capire in questo modo:

- tutti i punti della corda oscillano come un oscillatore armonico di massa μdx e freq ω
- l'ampiezza di oscillazione non è A, ma $A \sin(kx)$

$\Longrightarrow$ Energia in un tratto dx di massa μdx attorno a x

$$\langle E(x)\rangle_T dx = \frac{1}{2}\underbrace{\mu dx}_{\text{massa}}\ \underbrace{\omega^2}_{\text{pulsazione}}\ \underbrace{[A \sin(kx)]^2}_{\text{Ampiezza di oscillazione del tratto } dx \text{ attorno a } x}$$

L'energia di un tratto finito di lunghezza $\lambda = \frac{2\pi}{k}$ (lunghezza d'onda o periodo spaziale) è calcolabile dalla somma delle energie di ogni singolo oscillatore. Nel limite continuo, la somma è un integrale:

Somma dell'energia di un numero infinito di oscillatori armonici infinitesimi

$$\langle E_m \rangle_T = \int_0^\lambda \langle E(x) \rangle_T \, dx =$$

$$= \frac{1}{2} \mu \omega^2 A^2 \underbrace{\int_0^\lambda \sin^2(kx)\, dx}_{= \lambda/2} =$$

$$= \frac{1}{4} \mu \lambda \omega^2 A^2 \qquad \text{c.v.d.}$$