

(1)

FENOMENI ONDULATORI E ONDE MECCANICHE

Le onde meccaniche, che studieremo in questa e nelle successive lezioni, sono un esempio di una ampia classe di FENOMENI ONDULATORI nei quali ~~in genere~~ caratterizzati da una PERTURBAZIONE COORDINATA su larga scala

- di molte particelle (onde meccaniche)
- di campi variabili (onde e.m.)

Lo studio delle onde meccaniche dunque, oltre ad essere interessante di per sé, è necessario per la descrizione di alcune situazioni, introduce anche gli strumenti matematici utili allo studio dei fenomeni ondulatori in generale.

~~Il caso dei fenomeni~~ Con il termine di PERTURBAZIONE COORDINATA su larga scala si intende che esiste

una grandezza fisica (ad esempio posizione di una corda, pressione, ...) definita nello spazio per la quale è dato un valore di equilibrio

$$s = s(\vec{x}) \quad [s \text{ può essere scalare o vettoriale a seconda della natura del fenomeno}]$$

Per qualche causa (forza esterna) il valore di s viene modificato in qualche punto rispetto all'equilibrio (che è "perturbato"). La perturbazione si propaga

Esempi (onde meccaniche)

(2)

- x ~~Spazio~~ d'acqua piatto (calmo) in equilibrio, idrostatico. Sasso $\rightarrow$ onde circolari 2D
- x Sfera isolata, gas all'equilibrio $\rightarrow$ alterazioni locali della pressione $\rightarrow$ onde acustica nel gas (3D)
- x Sfera metallica a riposo, percossa da un martello $\rightarrow$ onde di compressione
- x Filo teso con Tensione T , pizzicato in un punto $\rightarrow$ onde 1D
- x Corde perturbate al vincolo esterno

In tutti gli esempi di ONDE MECCANICHE la perturbazione si propaga a causa delle PROPRIETÀ ELASTICHE del mezzo (c'è bisogno di un supporto materiale perché l'onda viaggi)

- $\rightarrow$ Trasferimento di energia senza spostamento macroscopico (trasf.) di materia
- $\rightarrow$ Le particelle in mezzo sono ferme (oscillano attorno al punto di equilibrio) (Es. galleggianti)

x Dagli esempi ^(che) abbiamo elencato ci deduciamo che le onde possono avere natura differente

x Onde 1D (onde), 2D (superficie), 3D (scottiche)

x Longitudinali o trasversali (la perturbazione avviene nella direzione di prop. dell'onda o trasversalmente) - le onde su una corda sono trasversali; le onde di pressione o compressione sono longitudinali; le onde sulla superficie dell'acqua sono di entrambi i tipi (moti ellittici)

In ogni caso è possibile descrivere l'onda con la metodologia rappresentativa matematica

1) Una grandezza che rappresenta l'ampiezza della perturbazione (omogenea alla grandezza in studio), sia essa trasversale o longitudinale

2) Una grandezza spaziale che individua la direzione di prop.

3) Il tempo ~~per~~ rappresentare l'evoluzione della perturbazione

→ $y = y(x, t)$

x Per semplicità descriviamo fenomeni 1D. La generalizzazione a fenomeni 2D, 3D non è complicata

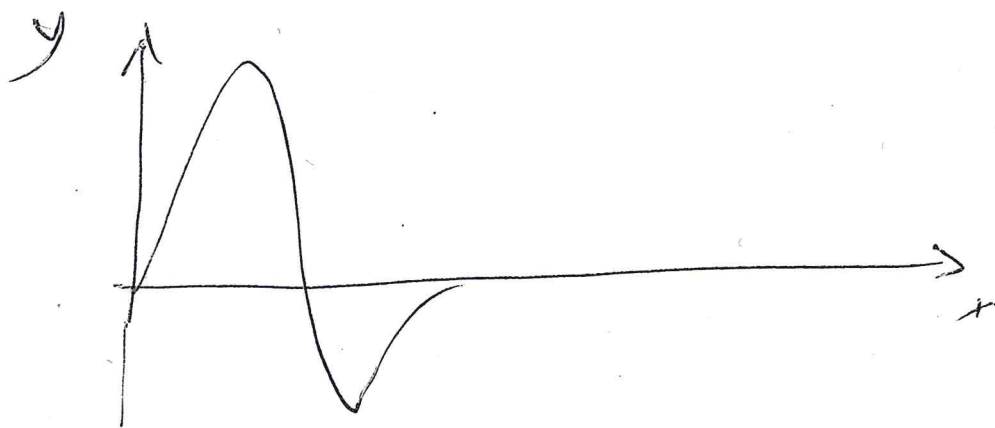
x Trattiamo la RAPPRESENTAZIONE CINEMATICA e poi vedremo le condizioni INAMICHE che determinano

Consideriamo (più esplicita)
~~l'immagine~~ un fenomeno non dissipativo
 e non dispersivo

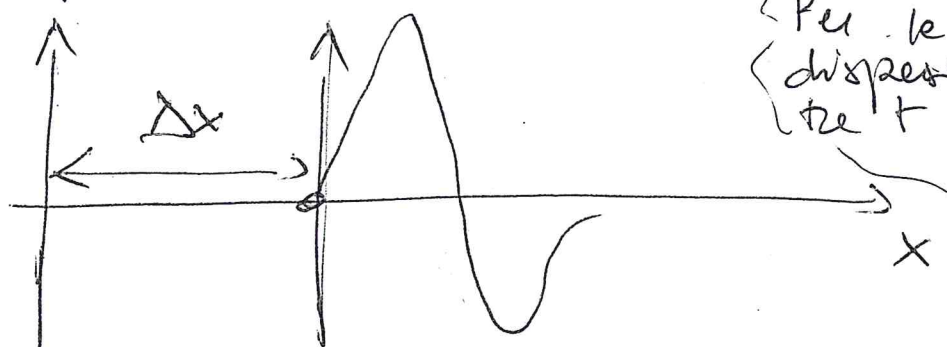
→ onda si PROPAGA lungo x IDENTICA A
 SE^{sta} STESSA

Per fissare le idee sia $t=0$

$y(x, 0) = f(x)$ la "fotografia" ~~di~~ "istantanea"
 della perturbazione che si propaga lungo
 una corda



A un tempo successivo ~~di~~ la perturbazione (onda)
 si sposta di un tratto Δx . Se rappresentato



Per le Hp di non
 dispersivo, la relazione
 tra t e x' resta a tutte
 le fasi

l'onda rispetto a un sistema di assi coordinati che
 si sposta assieme all'onda stessa; la forma
 funzionale ~~è invariata~~ dell'onda rimane

invariata: $y' = f(x')$

(5)

D'altronde y' coincide con y , mentre tra la coordinata x e x' sussiste la relazione

$$x = x' + \Delta x \Rightarrow x' = x - \Delta x$$

Sappiamo (e ho evidenza sperimentale che per una vasta classe di fenomeni) $\Delta x = v \Delta t$ cioè che lo spostamento Δx ha prop. a Δt .

Sostituendo, si ottiene:

$$\begin{aligned} y(x, t) &= f(x') = f(x - \Delta x) \\ &= f(x - v \Delta t) \end{aligned}$$

Poiché per ogni Δt intervallo t vale la relazione

$$y_+(x, t) = f(x - vt) \quad \text{onda PROG}$$

$$y_-(x, t) = f(x + vt) \quad \begin{array}{l} \text{onda REGR} \\ \text{(si propaga in senso} \\ \text{opposto)} \end{array}$$

Perché NON DISPERSIVA:

FASE: Ogni punto specifico dell'onda che si "muove" con essa è caratterizzato dalla condizione

$$y = \text{cost} \Leftrightarrow f(x \pm vt) = \text{cost}$$

* Perché q.s. condizione sia soddisfatta deve essere $x \pm vt = \text{cost}$

* Derivando: $\boxed{\frac{dx}{dt} = \pm v}$

VELOCITA' DI
FASE DELL'ONDA

• La VELOCITA' DI FASE rappresenta la velocità con cui si propaga l'onda (nella ~~condi~~ ipotesi fatta che si propaghi "inalterata").

• Per t fisso $\rightarrow$ ISTANTANEA lungo x
 Per x fisso $\rightarrow$ moto del punto lungo y attorno alla condizione di equilibrio

ONDE PERIODICHE

* In molte situazioni, i fenomeni ondulatori non comportano un singolo impulso, ma una sequenza di impulsi che si susseguono a intervalli (periodo) regolari. Si parla di onde periodiche.

* ~~Tutti i fenomeni periodici possono essere superati~~
 come superposition

* Un caso particolare (e importante) di onda periodica è l'onda sinusoidale

$$y(x, 0) = A \sin kx \quad \text{per } t = 0$$

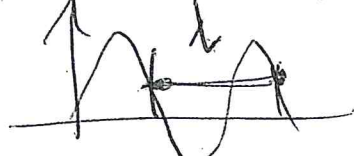
$\rightarrow A$ è detto ampiezza

$\rightarrow$ lo spostamento dall'equilibrio assume lo stesso valore per tutti i punti

$$kx_n = kx + 2n\pi$$

$$x_n - x = n \left(\frac{2\pi}{k} \right) \Rightarrow \lambda = \frac{2\pi}{k} \quad \text{"PERIODO SPAZIALE"}$$

$\rightarrow$ Il periodo spaziale si dà il nome di LUNGHEZZA D'ONDA



Per la dipendenza temporale, usando l'espressione funzionale generale trovata in precedenza:

$$y(x, t) = f(x \pm vt)$$

Dovendo quindi sostituire all'argomento del seno, x , il valore $x \pm vt$:

$$y(x, t) = A \sin[k(x \pm vt)]$$

$$= A \sin[kx \pm \omega t]$$

NOTA: $(kx \pm \omega t)$ cost
sono punti a fase
costante. Da cui

$$k \frac{dx}{dt} \pm \omega = 0$$

$$\Rightarrow v = \omega/k \text{ Velocità di fase}$$

Avendo posto $\boxed{\omega = kv}$

Si dà il nome di
**RELAZIONE
DI DISPERSIONE**

ω rappresenta la "pulsatrice" nel tempo. L'onda ha la stessa fase a x fisso, quando ai tempi

$$\omega t_m = \omega t + m 2\pi$$

$$(t_m - t) = m \left(\frac{2\pi}{\omega} \right)$$

Per $m = 1$ si ha il periodo $T = \frac{2\pi}{\omega}$

Definendo **FREQUENZA** $\nu = 1/T$ la relazione di dispersione per un'onda diventa:

$$\boxed{v_f = \frac{\omega}{k} = \lambda \nu}$$

In una rappresentazione più generale si ha

$$y(x,t) = A \sin(kx \pm \omega t + \phi)$$

"costante di fase"

Per $\phi \neq 0$ $y(0,0) = A \sin \phi$ e significa che la perturbazione non è necessariamente nulla per $\phi = 0$.

x Se ho una sola perturbazione, posso ~~sempre~~ scegliere l'origine in modo che $\phi = 0$, ma se ho situazioni più complesse non è necessariamente così.

x Due onde con la stessa costante di fase ~~FASE~~ si dicono "IN FASE".

x Altrimenti si ha sfasamento

x In generale i sistemi meccanici sono (come) ben descritti da equazioni lineari per le quali vale il PRINCIPIO DI SOVRAPPOSIZIONE:

CAUSA 1 $\rightarrow$ Effetto 1

CAUSA 2 $\rightarrow$ Effetto 2

CAUSA (1 e 2) $\rightarrow$ Effetto 1 + Effetto 2

$\Rightarrow$ Se due ~~forze~~ forze indip. perturbano il sistema le perturbazioni si commano

1) Fenomeni di interferenza

$$y_1 = A \sin(kx - \omega t + \phi_1)$$

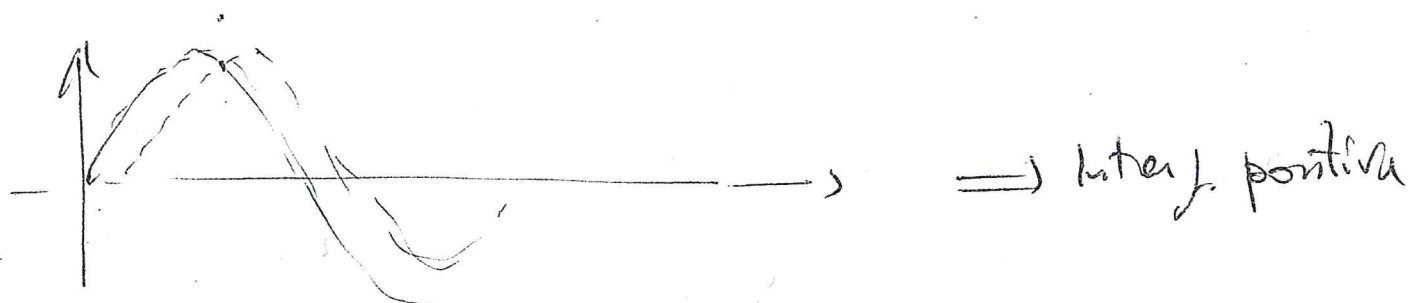
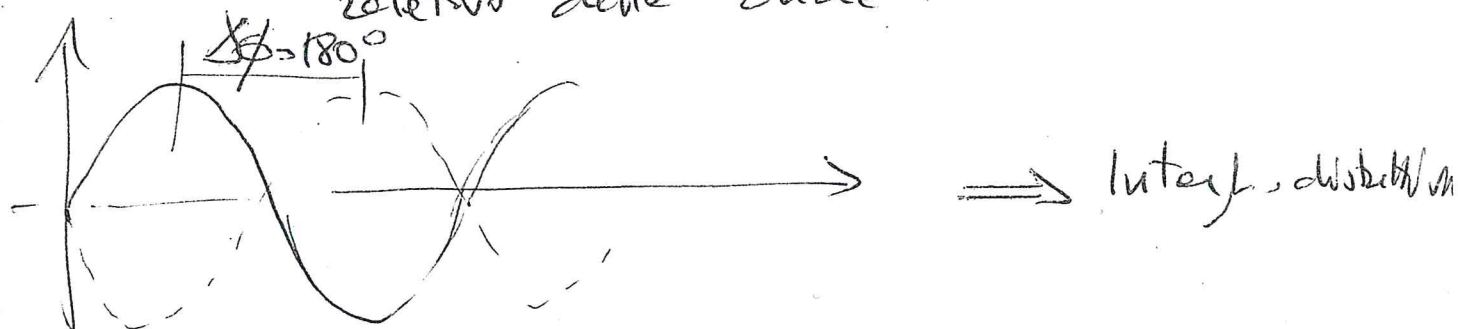
$$y_2 = A \sin(kx - \omega t + \phi_2)$$

La somma (ricordando $\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$)

$$y = y_1 + y_2 = 2A \cos \frac{\Delta \phi}{2} \sin(kx - \omega t + \phi')$$

$\underbrace{\hspace{1.5cm}}_{\Delta}$
 $\underbrace{\hspace{2.5cm}}_{\text{onde sinusoidali con } \lambda \text{ e } \nu \text{ invariate}}$

Amplitudine che dipende dallo sfasamento relativo delle onde.



Se le due onde non hanno la medesima ampiezza, l'interferenza è più complessa, e il caso di sfasamento $\Delta \phi = 180^\circ$ non è detto che dia intensità nulla. Da' comunque intensità minime.

2) Esempio onde stazionarie con stessa ampiezza, k e ω che si propagano in verso opposto (10)

$$y_+(x,t) = A \sin(kx - \omega t)$$

$$y_-(x,t) = A \sin(kx + \omega t)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Ricorda:} \\ \sin(\alpha \pm \beta) = \\ \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta \end{array} \right.$$

Somma:

$$y(x,t) = y_+(x,t) + y_-(x,t) =$$

$$= 2A \sin(kx) \cos(\omega t) \neq f(x - \omega t)$$

Non è un'onda che si propaga. ($\nabla f = 0$)

* Oscillazione del punto in x con ampiezza $2A \sin(kx)$

* Ampiezza nulla per $kx = n\pi$ Nodi

* Ampiezza max per $kx = (n + \frac{1}{2})\pi$ Ventri



ONDA STAZIONARIA: non trasporta energia

* È la forma di oscillazione di un'onda su una corda tesa vincolata a due estremi (vedremo l'analisi dinamica)

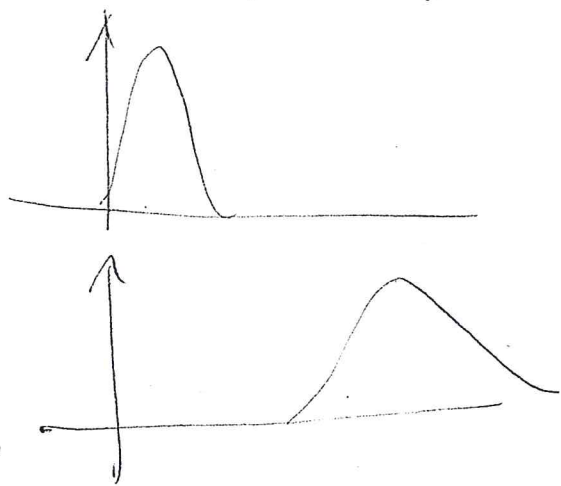
3) In termini generali, ogni onda periodica può essere rappresentata come sovrapposizione di onde sinusoidali di freq. multiple intere di una freq. fondamentale γ

$\Rightarrow$ Importanza della rappresentazione sinusoidale (TRAMITE PRINCIPIO DI SOVRAPP. consente lo studio dei fenomeni ondulatori scomposti in moti elementari)

$\Rightarrow$ Due onde periodiche che si propagano in verso opposto danno luogo ad onda stazionaria, poiché ogni comp. sinusoidale dà luogo ad onda stazionaria

$\rightsquigarrow$ stessa velocità di fase

$\rightsquigarrow$ se le onde si propagano con velocità di fase differente, l'impulso si dispersa



* Dispersivo $\neq$ dissipativo

* Fenomeni meccanici poco dispersivi

$\rightarrow$ Orchestra suona all'unisono

$\rightarrow$ le diverse freq. sono

percepita all'unisono

dall'ascoltatore.

NEL vuoto ~~non~~ ^{l'oscillazione} ~~disperdono~~

VELOCITA' DEI PUNTI $\neq$ VELOCITA' DELLA PERTURB. (12)

$$v_f = \frac{dx}{dt}$$

$$v_g = \frac{\partial y}{\partial t}$$

spostamento del punto dall'equilibrio
(derivata parziale, poiché $y = y(x, t)$)

Per onde sinusoidali: moto armonico
lungo y per ogni punto x

$$y(x, t) = A \sin(kx - \omega t + \phi)$$

$$\frac{\partial y}{\partial t} = -\omega A \cos(kx - \omega t + \phi)$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -\omega^2 A \sin(kx - \omega t + \phi)$$

Piccole oscillazioni attorno al punto di equilibrio
associate alla presenza di una forza di richiamo
elastica: $F = -kx$ (m) Ogni punto x ~~è~~

rappresentabile come un oscillatore armonico

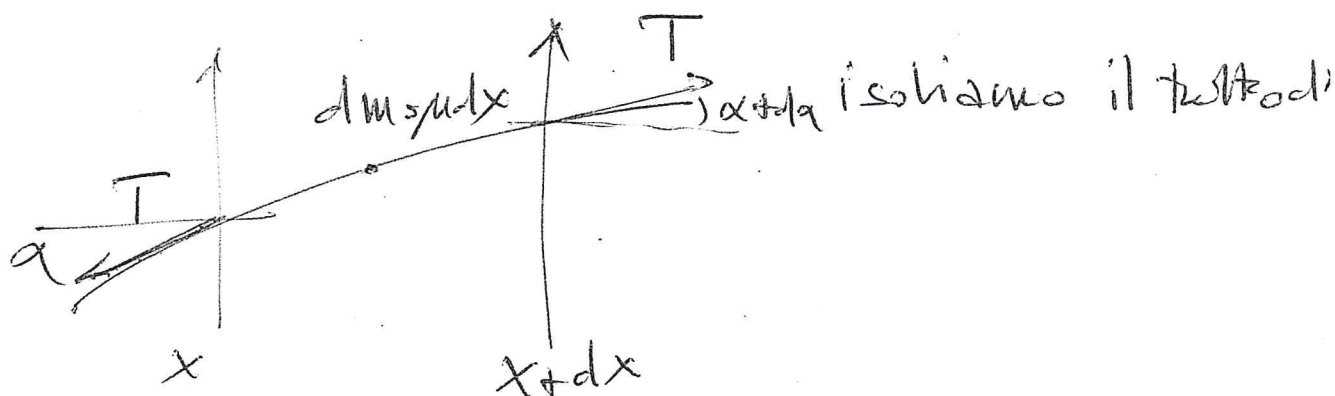
Abbiamo visto nel 1° semestre che l'oscillatore
armonico è un sistema lineare. ~~Qs. giustific~~
~~l'assunzione~~ la nostra assunzione di velocità
del principio di sovrapposizione

EQUAZIONE D'ONDA : DINAMICA DI UNA CORDA TESA

(13)

Analisi dinamica del moto di una corda in condizioni "idealizzate" ~~permette di~~

- corde estese indefinitamente
- tensione T costante e non alterata dallo spostamento dall'equilibrio (spostam. piccoli rispetto alla lunghezza corde) ~~forza~~ per corde infinite)
- Angoli infinitesimi : $\alpha = \partial y / \partial x$
- densità lineare $\mu = m/d$ uniforme (corda omogenea)



$$F_x = T \cos(\alpha + d\alpha) - T \cos \alpha$$

$$F_y = T \sin(\alpha + d\alpha) - T \sin \alpha$$

$$F_x \approx T \alpha dx \approx 0$$

entrambi infinitesimi

trascurabile, consistente
anche con l'idea che
non ci sia moto lungo x

(14)

$$F_y = T [\sin(\alpha + d\alpha) - \sin \alpha] =$$

$$= T [\cancel{\sin \alpha \cos d\alpha} + \cos \alpha \cancel{\sin d\alpha} - \sin \alpha]$$

$$\approx T d\alpha$$

infinitesimo del 1° ordine
rispetto a F_x che era
del secondo ordine ($d\alpha$)

Eq. dinamica di Newton:

$$T d\alpha = dm a_y$$

$$= \mu dx a_y$$

$$T \frac{d}{dx}(\alpha) = \mu a_y$$

$$T \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \mu \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

$\Rightarrow$ Eq. delle onde di D'ALEMBERT:

$$\left[\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0 \right]$$

$c =$ velocità di
fase

$$c = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

velocità di fase nelle corde
vibranti

$\hookrightarrow$ Rapporto tra proprietà elastica del mezzo
e proprietà inerziali