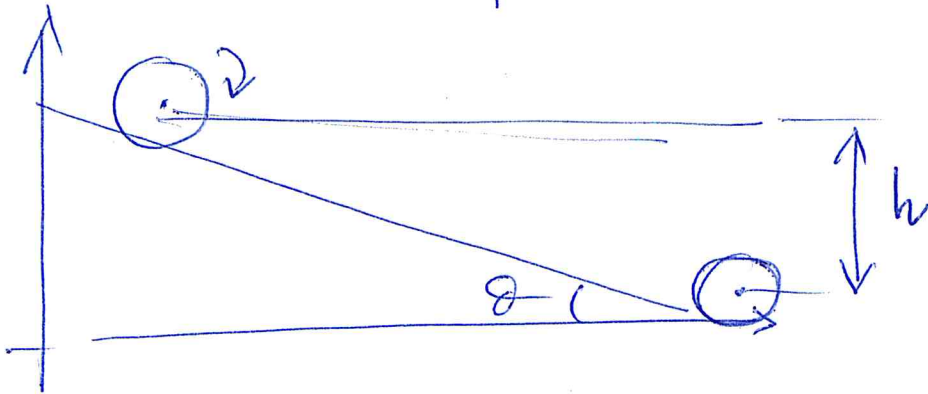


Esempio: Puro rotolamento su piano inclinato
(Carri rotolo fatti alla fine delle let. pcc.)

Si trovi σ_f , per $\sigma_i = 0$ e $\omega_i = 0$



Non c'è dissipazione di energia (puro rotolamento
 $\Delta S_{CH} = r \Delta \phi$): $\Delta E_K = \Delta E_P$ cioè:

$$\frac{1}{2} m \sigma_f^2 + \frac{1}{2} I \omega_f^2 = mgh$$

Ricorda che per il CR $E_P = mgh$ con $m = m_{\text{massa}}$

Per un CR generico di raggio r : $I = m k^2$

$$mgh = \frac{1}{2} m \sigma_f^2 + \frac{1}{2} m \frac{k^2}{r^2} \sigma_f^2 \quad (\sigma_f = \omega_f r)$$

$$= \frac{1}{2} m \left(1 + \frac{k^2}{r^2} \right) \sigma_f^2$$

$$\sigma_f = \left[\frac{2gh}{1 + k^2/r^2} \right]^{1/2} \leq \sqrt{2gh}$$

CASO DEL PIANO INCLINATO

σ_f è tanto maggiore quanto più la massa è concentrata vicino all'asse: $\left(\frac{k^2}{r^2} = 1 \text{ Anello, } 1/2 \text{ cilindro, } 2/3 \text{ guscio sferico, } 2/5 \text{ sfera} \right)$

Vi sono situazioni in cui $\vec{v}_c \neq 0$ e \mathcal{C}
 il moto iniziale non è di puro rotolamento.
 In questo caso la soluzione tramite la conservazione
 dell'energia non è possibile. Un caso
 caratteristico è quello di un oggetto messo
 in moto su un piano da una forza impulsiva

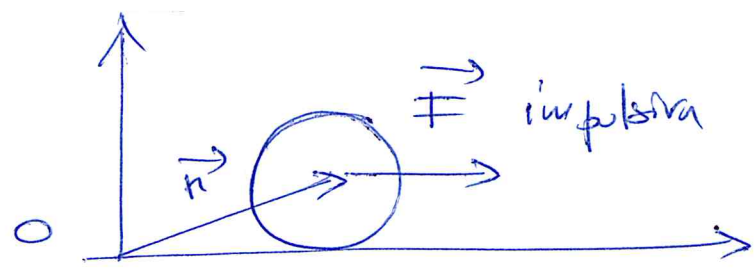
La forza impulsiva determina un momento
 impulsivo rispetto ad un polo. La legge del moto
 in forma integrale è:

$$\int_{t_1}^{t_2} \vec{M} dt = \Delta \vec{L}$$

forma integrale di
 $\vec{M} = d\vec{L}/dt$

Per \vec{M} generata da forza impulsiva, la posizione
 di applicazione della forza, \vec{r} (relative al polo non
 cambia nel breve istante di applicazione)

$$\int_{t_1}^{t_2} \vec{M} dt = \int_{t_1}^{t_2} \vec{r} \times \vec{F} = \vec{r} \times \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} dt = \vec{r} \times \vec{J} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$



$O =$ polo nel
 riferimento inerziale

(1) $\int \vec{J} = \Delta \vec{p}_{cm} \implies J_{cm}(0) = J/m$

(2) $\int \vec{M} = \int \vec{r} \times \vec{J} = \Delta \vec{L} \implies \Delta L_0 = \Delta L' + \Delta L_{cm}$

$$(2) rJ = I\omega + r \cdot m v_{cm}$$

$$\Rightarrow \omega = 0 \quad (\text{dalla (1) e } rJ = r m v_{cm})$$

* La forza impulsiva determina un moto di puro strisciamento all'istante iniziale.

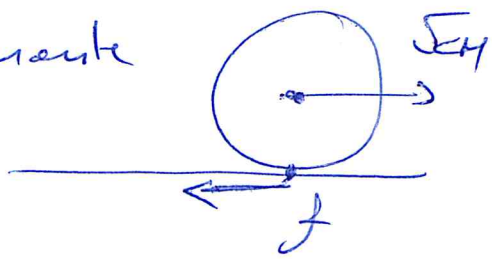
* Si noti che in (1) & (2) non compare f ebbene perche' rispetto alla forza impulsiva e' trascurabile (non sarebbe trascurabile con vincolo fissa).

Dopo l'effetto della forza impulsiva il moto e' definito dalle eq. del moto:

$$(3) \begin{cases} m a_{cm} = -f \\ r f = I \alpha \end{cases}$$

con condizioni iniziali $v_{cm}(0) = I/m \cdot \alpha_{in}$. Poiche' $v_{cm}(0) \neq \omega r$, l'acc. del cm e α non sono accoppiate.

L'oggetto sviluppa il rotolamento e continua l'esteso frenante fino al che $\omega r = v_{cm}$



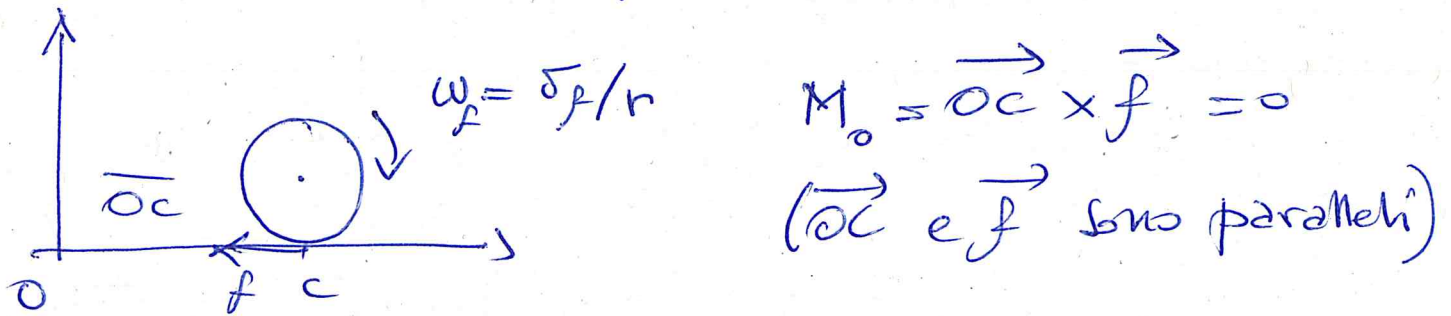
~~See~~ t^* tempo t^*
con $\omega = \alpha t^*$

$$= \frac{r f}{I} t^* \rightarrow \text{nota che l'acce. e costante}$$

(4)

Per $t \geq t^*$ il moto procede a velocità $v_{cm} = v_f$ costante, poiché nel moto di puro rotolamento non c'è dissipazione di energia.

Sfruttiamo la conservazione di L_o (mom. angolare rispetto al polo O) per calcolare v_f . La conservazione di L_o consegue da $M_o = 0$:



$$\Delta L_o = L_o(f) - L_o(i) = 0$$

$$\begin{cases} L_o(i) = rJ & \text{(dalla Eq. (2))} \\ L_o(f) = I\omega + r m v_{cm}(f) \end{cases}$$

$$r^2 J = I\omega r + m r^2 v_f$$

Da cui:

$$\begin{aligned} v_f &= \frac{J r^2}{I + m r^2} = \frac{J}{m} \left[\frac{1}{1 + k^2/m^2} \right] \\ &= v_{cm}(0) \left[\frac{1}{1 + k^2/m^2} \right] < v_{cm}(0) \end{aligned}$$

La diminuzione di velocità è dovuta alle dissipazioni di energia per effetto dell'attrito dinamico ~~diretto~~ nel moto di "strisciamento". Calcoliamo in modo esplicito la variazione di en. cinetica:

$$\begin{aligned} \Delta E_k &= E_k(f) - E_k(i) = \\ &= \frac{1}{2} m v_f^2 + \frac{1}{2} I \omega_f^2 - \frac{1}{2} m v_i^2 = \\ &= \frac{1}{2} m v_f^2 + \frac{1}{2} m \frac{k^2}{r^2} v_f^2 - \frac{1}{2} m v_i^2 = \\ &= \frac{1}{2} m \left(1 + \frac{k^2}{r^2} \right) v_f^2 - \frac{1}{2} m v_i^2 = \\ &= \frac{1}{2} m \left(1 + \frac{k^2}{r^2} \right) \frac{1}{(1 + k^2/r^2)} v_i^2 - \frac{1}{2} m v_i^2 = \\ &= - \frac{k^2}{r^2 + k^2} E_k(i) = - \frac{1}{1 + r^2/k^2} E_k(i) < 0 \end{aligned}$$

La dissipazione è tanto maggiore quanto minore è r^2/k^2 , ossia tanto meno le masse concentrate vicino all'asse di rotazione.

$\frac{k^2}{r^2} =$	{	1	Anello
		$2/3 \approx 0.66$	Guscio sferico
		$1/2 = 0.5$	Cilindro
		$2/5 = 0.4$	Sfera

NOTA: In realtà c'è dissipazione anche nel puro rotolamento **ATTRITO VOLVENTE** (Pto di contatto non è pto ideale)

Giroscopio : CR con punto fisso \rightarrow non c'è (6)
 moto traslatorio (in virtù delle reazioni vincolari
 nel punto fisso), ma pure rotazione.

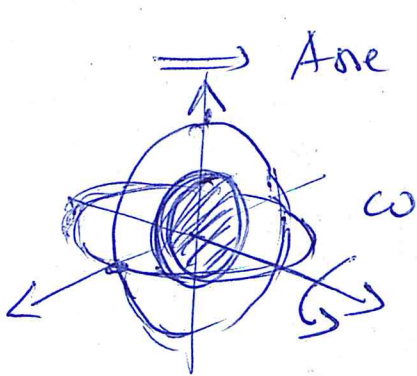
Soluzione generale complessa. Eq del moto

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt} \quad \text{con polo nel punto fisso}$$

(scelta ragionevole, se non ovvio)

Alcuni casi semplici esemplificativi:

1) Pto fisso nel CM, $\vec{M} = 0$, $\vec{L} = I\vec{\omega}$



\Rightarrow Asse di rotazione fisso nel tempo
 (L conservato)

\rightarrow \perp i supporti (vincolati al corp estero) si muovono, cambia l'orientazione relativa del giroscopio ~~\Rightarrow~~

\Rightarrow sensi di direzione (giroscopio nei telefonini)

2) Corpo a simmetria sferica in rotazione
 attorno al proprio asse, con $\vec{F}_E \neq 0$
~~esterno~~ \Rightarrow Moto di PRESSIONE.

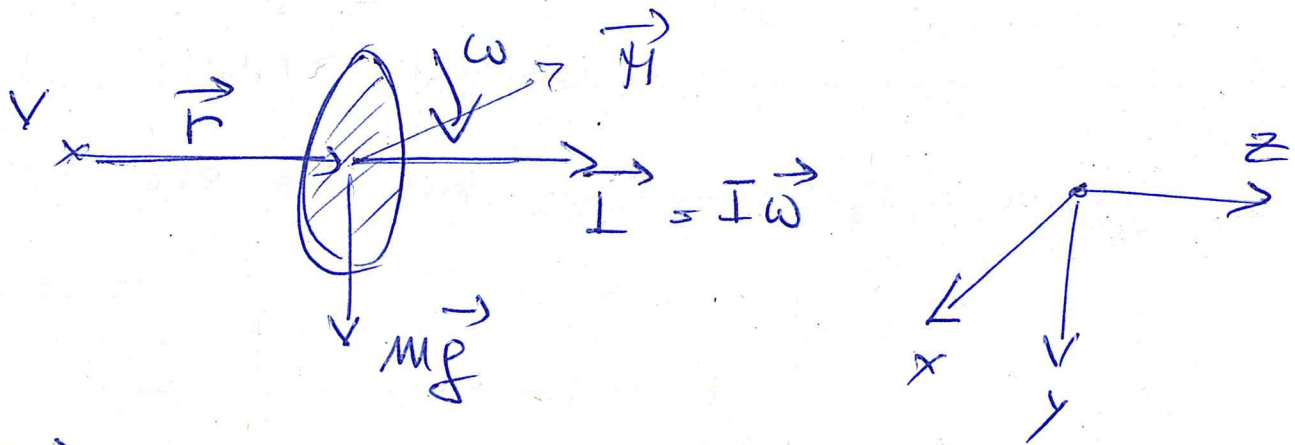
Esempio

Esempio

Disco / ruota in rotazione

(7)

attorno ad asse, vincolato ad un estremo.



$$\vec{L} = I\omega \hat{k}$$
$$\vec{F} = mg \hat{j}$$

$$\vec{M} = r \hat{k} \times mg \hat{j} = -mgr \hat{i}$$

Il momento della forza è \perp a \vec{L} e, nell'esempio, diretto lungo x . L'equilibrio traslazionale è garantito dalla reazione vincolare in V . Eq. del moto:

$$\begin{cases} F_v - mg = 0 \\ \vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt} \end{cases}$$

La variazione di \vec{L} , $d\vec{L}$, è diretta come \vec{M} (Eq. vettoriale, con dt prodotto per uno scalare positivo). Dunque $d\vec{L}$ è ortogonale a \vec{L} , poiché \vec{M} è ortogonale a \vec{L} .

E' una situazione del tutto analoga al caso del moto circolare uniforme con $\vec{F} \perp \vec{v}$

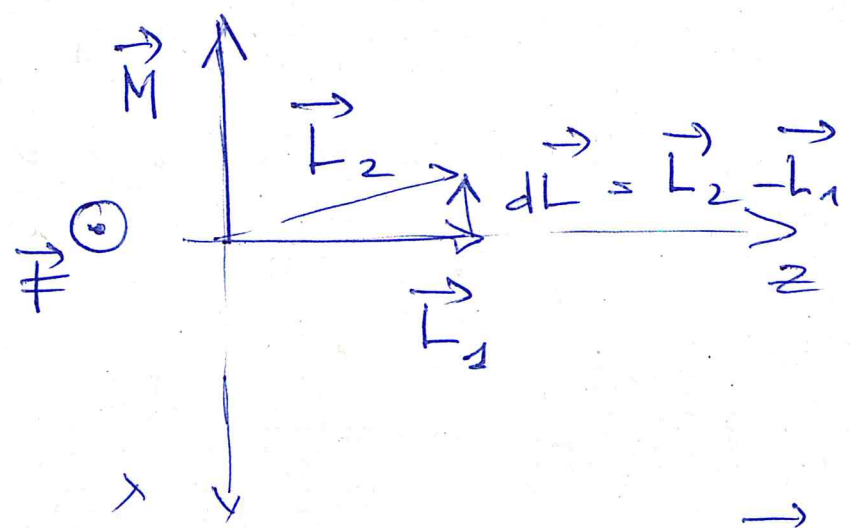
$\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{a}$ e' ortogonale a $\vec{v} \Rightarrow \vec{v}$ cambia

direzione (acc. centripeta), ma non modulo -

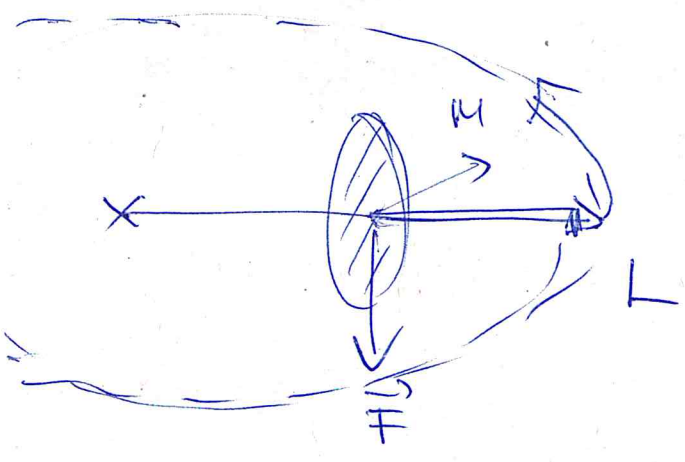
Analogamente qui \vec{L} cambia direzione, ma non modulo \rightarrow il corpo precece attorno a \vec{F}

(si noti che \vec{M} e \vec{L} ruotano assieme, come \vec{F} e \vec{v} , mantenendoli ortogonali)

VISTA NEL PIANO \vec{M} e \vec{L} :



\vec{F} non fa "cadere" il disco, che precece nel piano radiale orizzontale



D'altronde, in modo formale:

(9)

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt} (L \hat{u}_{\parallel}) = \frac{dL}{dt} \hat{u}_{\parallel} + L \frac{d\phi}{dt} \hat{u}_{\perp}$$

$$\vec{M} = M_{\parallel} \hat{u}_{\parallel} + M_{\perp} \hat{u}_{\perp} = + m_{gr} \hat{u}_{\perp}$$

$$\Rightarrow \frac{dL}{dt} = 0 \quad (\text{comp. parallele molla})$$

$L = \text{cost}$ in modulo

$$L \frac{d\phi}{dt} = m_{gr}$$

$\frac{d\phi}{dt} = \Omega$ frequenza angolare di precessione

$$T = \frac{2\pi}{\Omega} = 2\pi \frac{L}{m_{gr}} = 2\pi \frac{I \omega}{m_{gr}}$$

* Questa soluzione è appross:

$\rightarrow \Omega$ attorno a \vec{F} sviluppo $L_y \neq 0$

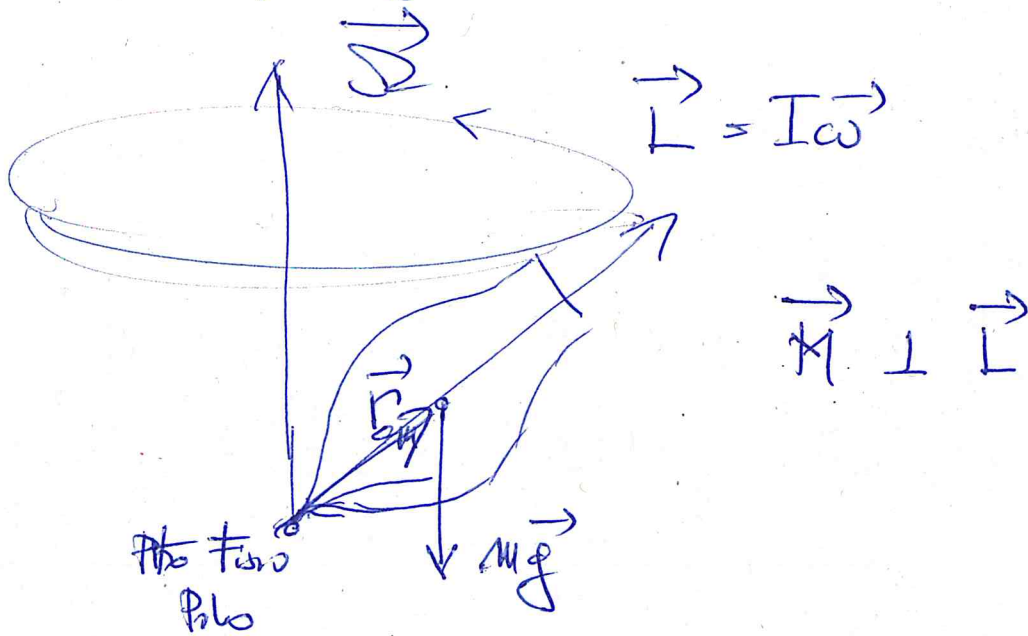
$$L_y = m \omega r^2 \quad (\text{se } dr \gg \text{Raggio disco})$$

Però $L_y = 0 \rightarrow L_y = \text{cost.}$

* Moto diverso da $\omega = 0 \rightarrow$ corpo cade.

Caso più generale della battole identico:

(10)



Valle sempre

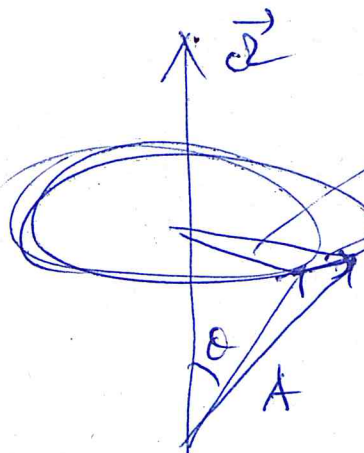
$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{dL}{dt} \hat{u}_{\parallel} + L \frac{d\phi}{dt} \hat{u}_{\perp}$$

e $|\vec{M}_{\parallel}| = 0$ $|\vec{M}_{\perp}| = r_{cm} mg$

Stesso risultato del caso particolare precedente

Averanno anche visto che per un vettore che precessa con modulo costante

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \vec{\Omega} \times \vec{A}$$



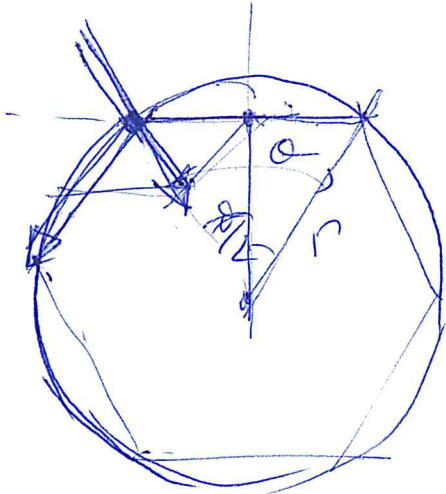
$$\frac{d\vec{A}}{dt} = A \sin\theta \frac{d\phi}{dt} = \vec{\Omega} \times \vec{A}$$

Da cui: $\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\Omega} \times \vec{A}$

$$\Omega = \frac{|\vec{M}|}{|\vec{L}|}$$

Es. * Moto di un fto materiale su un poligono iscritto a un cerchio, con velocità v costante

* Urti elastici con le pareti

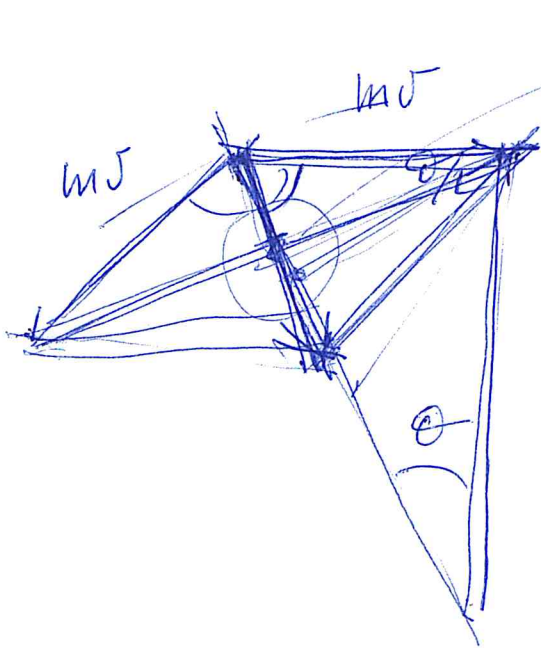


$$\vec{F} = m\vec{v}$$

Variazione urto elastico: $2mv \sin \theta$

$$\Delta \vec{p} = 2mv \sin \frac{\theta}{2} \hat{u}_r$$

Limite del continuo



$$2mv \sin \frac{\theta}{2}$$

Δt tra due urti

$$\Delta t = \frac{\Delta L}{v} = \frac{2r \sin \frac{\theta}{2}}{v}$$

$$\frac{\Delta \vec{p}}{\Delta t} = \frac{2mv \sin \frac{\theta}{2} \cdot n \cdot \delta}{2r \sin \frac{\theta}{2}} = \frac{mv^2}{r} \hat{u}_r$$

Legge NW :

$$\vec{F}_h = m\vec{a} = \left(\frac{mv^2}{r} \right) \hat{u}_r$$

Forza centripeta.

Moto generale:

$$\int \vec{F} = \frac{d\vec{P}_{CM}}{dt} \quad \text{Moto del CM}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt} \\ \vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt} \end{array} \right. \quad \text{moto rispetto al CM}$$

Abbiamo visto situazioni particolari in cui le due equazioni non sono completamente indipendenti. Nel caso generale le rotazioni possono essere complesse. In casi semplici si può ricorrere a leggi di cons. (se $\vec{M} = 0$ $\vec{L} = \text{cost}$, che significa $\vec{\omega} = \text{cost}$ solo se l'asse di rotazione è un asse principale di inerzia) -

statica : $\vec{F} = 0$
 $\vec{M} = 0$ 6 eq. definiscono le condizioni di equilibrio

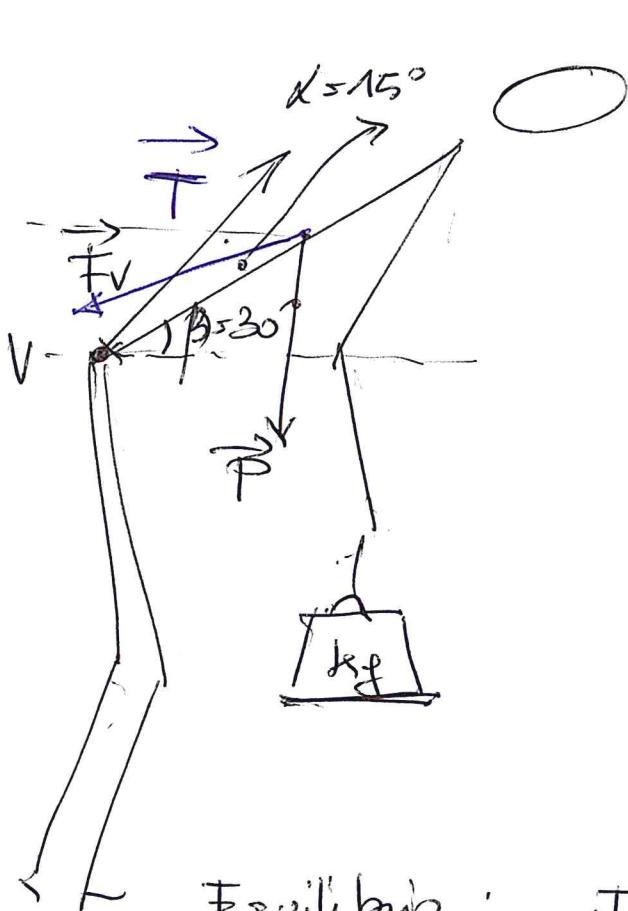
Se $\vec{F} = 0$, $\vec{v}_{CM} = 0$ e inoltre \vec{M} è indipendente dal polo, che può essere scelto in modo conveniente

Nella maggior parte dei problemi si presentano forze complanari, la descrizione delle forze può essere ridotta alle condizioni per le componenti $F_x = 0$ e $F_y = 0$ essendo tutte le F_z identicamente nulle. Poiché le forze giacciono tutte nello stesso piano, la scelta di un polo complanare garantisce che M_x e $M_y = 0$ e la condizione di equilibrio di cui occuparsi è solo $M_z = 0 \Rightarrow 3$ equazioni.

Nel caso di leve, un vincolo fuso garantisce 3 eq. dov'è il server solo 1 eq.

Esempio di forze coplanari: FORZE AGENTI SULLA SCHIENA —

Si calcoli la reazione vincolare esercitata dalla 5^a vertebra lombare quando si solleva un corpo addossando la schiena (vedi figura)



\vec{P} = peso complessivo del tronco + corpo da sollevare
 \vec{T} = tensione del muscolo scheletrico della schiena (agisce con un angolo di 15°)

\vec{F}_V = Reazione vincolare (incognita)

V - vincolo nella 5^a vertebra lombare (Polo per i Momenti)

Equilibrio:

$$F_{vx} = T \cos(\beta - \alpha) \quad \text{asse } x$$

$$F_{vy} = T \sin(\beta - \alpha) + P \quad \text{asse } y$$

$$M_z = P \sin\left(\frac{\beta}{2} - \beta\right) = T \sin(\alpha) \quad M_z = 0$$

$$\beta = 30^\circ, \alpha = 15^\circ$$

$$\beta - \alpha = 15^\circ$$

$$\frac{\beta}{2} - \beta = -60^\circ$$

Si ricavi T dalla terza equazione. Sostituendolo in (1) e (2) si trovano F_{vx} e F_{vy} . Da esse $F_V = \sqrt{F_{vx}^2 + F_{vy}^2}$

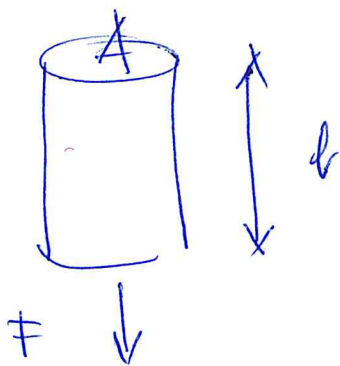
Fenomeni Elastici

(13)

CR è un'idealizzazione \rightarrow deformazioni

- x compressione / trazione
- x taglio e momenti torcenti
- x torsione

- x Deformazioni : $\Delta l / l$ ($\Delta x / x$)
- x sforzo F / A



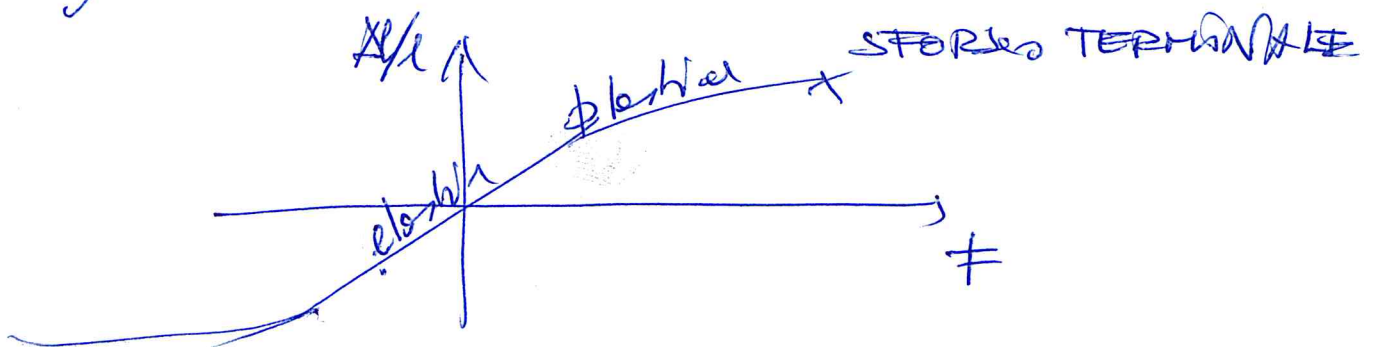
$$\vec{F} = -k \vec{\Delta l}$$

Forza elastica
(legge di Hooke)

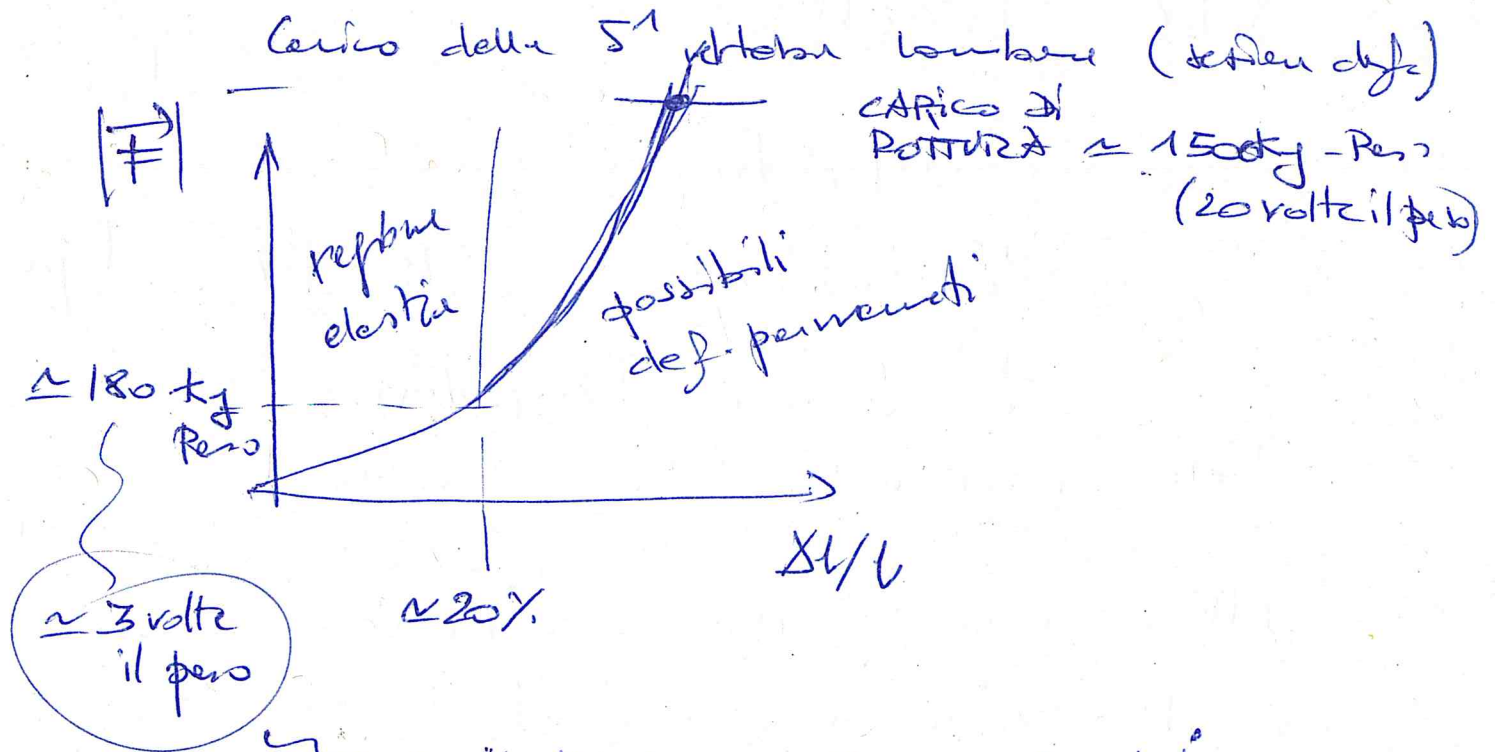
$$k = E \frac{A}{l}$$

\downarrow
costante elastica
 $E =$ modulo di Young

La cost. elastica è prop. alle sezioni, e dipende di materiale -
legge di Hooke, valida in un intervallo limitato di deformazioni



Es. Struttura delle colonne con dischi di diametro / sezione) cercata verso il basso \rightarrow maggior resistenza flessiva in legno della superficie



\rightarrow Al limite di allungamento del fuso con tutto piegato

~~Con l'andare in avanti...~~