Analizziamo due esempi notevoli (pendolo fisico e rotolamento) sfruttando l'equazioni della dinamica rotazionale per trovare le caratteristiche del moto.

Richiamiamo alcuni elementi del moto di un CR:

La dinamica è descritta dalle equazioni:

$$\vec{F}^{(E)} = m\vec{a}_{CM} \qquad \qquad 6 \text{ eq. per } 6 \text{ incognite}$$

$$\vec{M}^{(E)} = \frac{d\vec{L}}{dt} \qquad \qquad 3 \text{ posizioni e } 3 \text{ angoli!}$$

Queste equazioni sono in generale indipendenti, ma in alcune condizioni (definite da vincoli) non lo sono.

Il moto in generale può essere scomposto in una traslazione (del CM) e una rotazione attorno ad un asse (asse istantaneo di rotazione)

1) Nella traslazione (pura) tutti i punti hanno lo stesso moto del CM (il CR è "collassabile" nel CM).

Rispetto ad un riferimento inerziale:

$$E_k = \frac{1}{2} m v_{CM}^2$$

$$\vec{L} = \vec{r}_{CM} \times m\vec{v}_{CM}$$

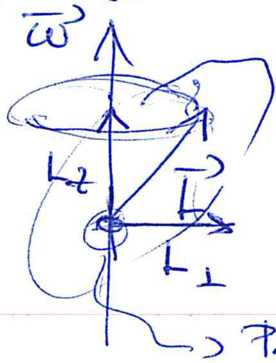
L'eq. dinamica che descrive il moto è $\vec{F} = m\vec{a}_{CM}$, mentre la seconda eq. non aggiunge informazioni indipendenti (è banalmente $\vec{r}_{CM} \times \vec{F}^{(E)} = \vec{r}_{CM} \times \frac{d\, m\vec{v}_{CM}}{dt}$)

2) Nella rotazione pura attorno a un asse (istantaneo) di rotazione, conviene scrivere l'eq. del moto rotazionale nelle componenti assiale e trasversa: 2

$$M_z = \frac{dL_z}{dt}$$

$$M_\perp = \frac{dL_\perp}{dt}$$

z = asse di rotazione.



2a) Se $\vec{L} \parallel \vec{\omega}$ (rotazione // ad un asse di simmetria del corpo)

$$L_\perp = 0 \quad \Longrightarrow \quad M_\perp = 0$$

$$L = L_z = I_z \omega \Longrightarrow M = I_z \alpha \qquad \alpha = \frac{d\omega}{dt}$$

$\Rightarrow \vec{M}$ e $\vec{\alpha}$ sono // a $\vec{L}$ e $\vec{\omega}$. L'equazione del moto è monodimensionale

2b) Se $\vec{L}$ non è // a $\vec{\omega}$ (come in figura)

$$M_z = I_z \alpha$$ ← definisce l'accelerazione angolare

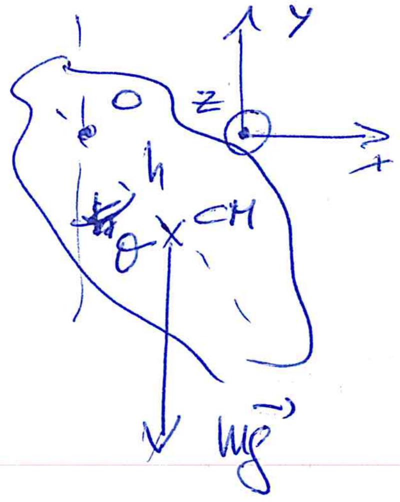
$$M_\perp = \frac{dL_\perp}{dt}$$ ← definisce le condizioni sui momenti affinché la rotazione avvenga secondo l'asse specifico (reazioni vincolari)

- Nel moto del punto materiale si ha una situazione analoga per $\vec{F} = m\vec{a}$:
La componente tangenziale definisce la variazione dell'accelerazione in modulo. La comp. ortogonale (centripeta) definisce la forza necessaria affinché il moto segua quella traiettoria.

- Esempio per 2b): $M_z = 0 \implies \alpha = 0 \quad \omega = cost$
L_z è costante in modulo, e così $\vec{L}$:
$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt} \implies \vec{M} = \vec{\omega} \times \vec{L}$ moto di precessione
$\vec{M}$ ha solo componenti trasverse a $\vec{\omega}$
$M_\phi = \frac{dL_\perp}{dt} = L_\perp \frac{d\phi}{dt} = L_\perp \omega$

- Per un moto di rotazione $E_k = \frac{1}{2} I_z \omega^2$ comunque
- Polo conveniente sull'asse fisso, o nel CM. Se $\vec{R}^{(E)} = 0$
$\vec{L}$ e $\vec{M}$ non dipendono dal polo

Il pendolo fisico (o composto)



CR oscillante attorno a un asse orizzontale non passante per il CM (in figura O è la traccia dell'asse in una sezione ortogonale all'asse e passante per il CM)

Sia l'asse fisso nel riferimento terrestre ("inerziale"): la reazione vincolare in O garantisce l'assenza di moto traslazionale di O. Il moto è puramente rotazionale attorno a O.

Il CM accelera: Fv - mg = ma. Non siamo interessati a questo moto, ma al moto rotazionale attorno a

scegliamo O come polo:

$$\vec{\tau}_v = \vec{OO} \times \vec{F}_v = 0 \quad \text{braccio nullo}$$

$$\vec{\tau}_p = \vec{r}_{CM} \times m\vec{g} = -mgh\sin\theta\,\hat{k}$$

Eq. del moto rotazionale:

$$M_z = I_z \alpha$$

$$I_z \frac{d^2\theta}{dt^2} + mgh\sin\theta = 0$$

(non è detto che L sia parallelo all'asse: dip. dalla forma del corpo. Se non lo è i momenti lungo x e y dovranno garantire un vincolo dell'asse)

Per oscillazioni $\theta \simeq 0$ $\sin\theta \simeq \theta$ e si ritrova l'equazione dell'oscillatore armonico semplice ($\theta \leq 10°$, si veda discussione per il pendolo semplice)

Eq. del moto (per ϑ piccoli)

$$\frac{d^2\vartheta}{dt^2} + \frac{mgh}{I_z}\vartheta = 0$$

Soluzione armonica

$$\vartheta = \vartheta_0 \sin(\Omega t + \varphi)$$

con periodo di oscillazione:

$$T = \frac{2\pi}{\Omega} = 2\pi\sqrt{\frac{I_z}{mgh}} \equiv 2\pi\sqrt{\frac{l_r}{g}} \qquad (*)$$

avendo posto $l_r = \frac{I_z}{mh}$ LUNG. RIDOTTA DEL PENDOLO COMPOSTO

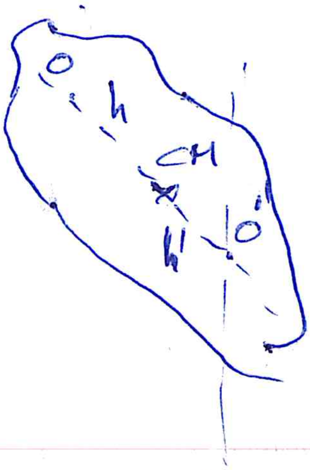
La lungh. ridotta corrisponde alla lunghezza del pendolo semplice equivalente (con stesso periodo)

Per ϑ grandi il moto è ancora periodico, ma non è armonico semplice. L'eq. (*) richiede la stessa correzione dell'equiv. equazione per il pendolo semplice.

La misura di $\frac{I_z}{mh}$ per un pendolo fisico è molto più complicata della misura di l in un pendolo semplice. Esiste però una notevole proprietà di simmetria in un pendolo fisico che permette la misura accurata di l_r. Ciò è sfruttato per misurare g con precisione

→

Si può far oscillare il pendolo attorno ad un asse passante per O' opposto a O rispetto al CM e distante da CM h'. Scegliamo O' in modo che il periodo T' = T



con $T' = 2\pi\sqrt{\frac{l'_r}{g}}$; $l'_r = \frac{I'_z}{m h'}$

Per il teorema di Huygens-Steiner:

$$I_z = I_{CM} + m h^2$$
$$I'_z = I_{CM} + m h'^2$$

Per le lunghezze ridotte si ha:

$$l_r = \frac{I_z}{m h} = \frac{I_{CM}}{m h} + h$$
$$l'_r = \frac{I'_z}{m h'} = \frac{I_{CM}}{m h'} + h'$$

La condizione $l_r = l'_r$ (ossia $T = T'$) è soddisfatta per $\frac{I_{CM}}{m h} = h'$ ovvero $\frac{I_{CM}}{m h} = h'$ che forniscono

$$l_r = h + h' = l'_r$$

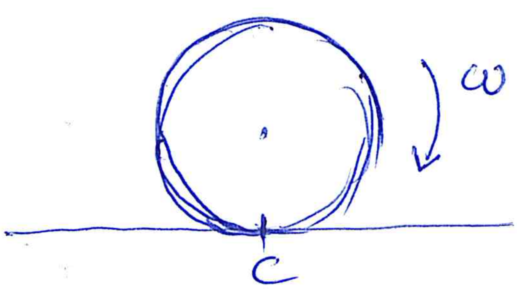
[NOTA: in generale $h \neq h'$. Uguaglianti solo se CR simmetrico rispetto a CM

Senza conoscere I_{CM} e m è sufficiente trovare i punti O e O' che determinano $T = T'$ e misurarne la distanza ($\Longrightarrow$ PENDOLO REVERSIBILE DI KATER)

MOTO DI PURO ROTOLAMENTO

Caso interessante in cui l'asse di rotazione non è un asse materiale, con cuscinetti e supporti come negli esempi precedenti, ma un asse geometrico che si sposta parallelamente a se stesso assieme al CR.

Cilindro (RUOTA) rotola senza strisciare sotto l'azione di una forza esterna (esempio carrozza o ruota su piano inclinato) o di un momento.



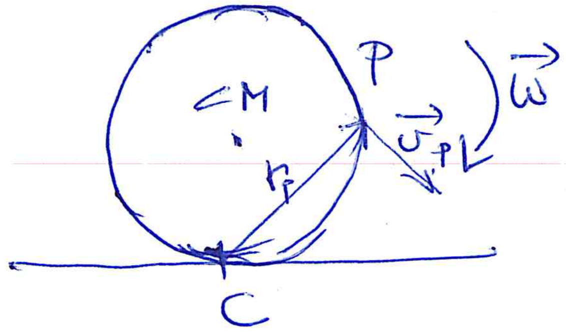
- Rotazione attorno all'asse della ruota (CM per CR a simmetria cilindrica)

Nel puro rotolamento il pto di contatto C è fermo nell'istante t, per un intervallo infinitesimo dt. In un istante successivo il punto di contatto cambia, ma è ancora un punto fisso rispetto al piano: $\vec{v}_C = 0$ e $\vec{v}_{C'} = 0$ nei rispettivi istanti di contatto con il piano di scorrimento.

→ L'asse geometrico trasla, ma il punto (linea) di contatto definisce un asse istantaneo di rotazione fisso nel riferimento inerziale

Il moto di rotazione attorno a C ha velocità angolare $\vec{\omega}$ (indip. dall'asse per assi //).

La velocità di ogni punto della ruota, riferita a C è: $\vec{v}_P = \vec{\omega} \times \vec{r}_P$



Poiché $\vec{\omega}$ è entrante nel foglio (verso come z per rotaz. destrorsa) $\vec{v}_P$ è ortogonale a $\vec{r}_P$ e con verso a dx nel disegno

Per il CM: $\vec{v}_{CM} = \vec{\omega} \times \vec{r}_{CM}$ // al piano di rotolamento

$\Rightarrow$ $\boxed{v_{CM} = \omega r}$ velocità di avanzamento del CM rispetto al rif. inerziale con r = raggio della ruota

Poiché r è ~~fisso~~ costante (definito dalla geom. del CR) vale anche $\boxed{a_{CM} = \alpha r}$ per l'accelerazione lineare e angolare

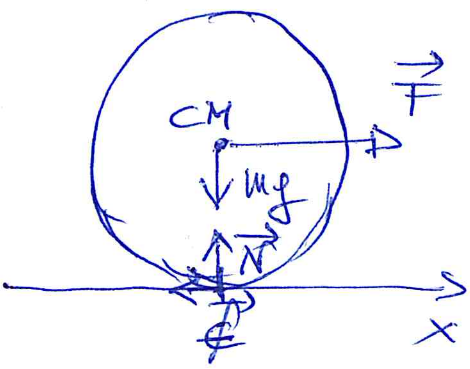
$\Rightarrow$ Nel moto di puro rotolamento, il <u>moto di rotazione attorno al CM</u> e il <u>moto di avanzamento del CM</u> <u>non sono indipendenti</u>

NOTA: ~~Nel caso~~ Il rotolamento avviene in virtù di una forza di attrito (statico!) applicata nel punto di contatto. In assenza di attrito il corpo rigido scivolerebbe sul piano con moto traslatorio ($v_P = v_{CM}$) per ogni punto.

Risolviamo il problema dinamico per due casi differenti: i) Forza esterna parallela al piano di rotolamento (ricarro tirato, oppure ruota su piano inclinato), ii) Momento torcente assiale (es: ruota azionata da motore)

i) Forza esterna

Diagramma delle forze



Eq. del moto:

1) $\vec{F} + \vec{R} + m\vec{g} = m a_{CM}$

$\vec{R}$ ≡ reazioni vincolari: forza normale e forza di attrito

2) $M_z = I_z \alpha$

Scomposizione negli assi:

Asse x: $F - f = m a_{CM}$

Asse y: $N - mg = 0$ ← non c'è accelerazione nel piano verticale

Per il momento assiale possiamo scegliere il polo in due modi convenienti: nel CM o in C. La dinamica non dipende dalla scelta del polo, mentre M e L ne dipendono.

Polo in CM: $rf = I\alpha \equiv I \frac{a_{CM}}{r}$ (Z1)

Polo in C: $rF = I_c \alpha = I_c \frac{a_{CM}}{r}$ (Z2)

Imp: L'attrito statico f è un incognita del problema. La sua intensità non è definita a priori, ma dipende da F

Attrito statico: $f \leq \mu_s N$ $\quad$ f dipende da F

" dinamico $f = \mu_d N$

Possiamo ricavere f combinando (Z1) e (Z2):

$$\frac{rf}{rF} = \frac{I\alpha}{I_c} \Longrightarrow f = \frac{I}{I_c} F$$

$$\begin{cases} f = \dfrac{I}{I_c} F \\ a_{cm} = \dfrac{F-f}{m} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_{cm} = \dfrac{F}{m}\left(1 - \dfrac{I}{I_c}\right) \\ f = \dfrac{I}{I_c} F \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_{cm} = \dfrac{F}{m} \dfrac{mr^2}{I+mr^2} \\ f = \dfrac{I}{I+mr^2} F \end{cases}$$

Esiste una forza limite, al di sopra della quale il moto non è di puro rotolamento, ma la ruota "striscia" o "scivola" sul piano.

$$F_{\cancel{max}} = \frac{I+mr^2}{I} f_{\cancel{max}} \leq \left(1 + \frac{mr^2}{I}\right) \mu_s mg$$

Per un cilindro omogeneo $I = \frac{1}{2} M r^2$ e

$F = 3f \le 3\mu_s mg$

In generale $I = mk^2$ con k^2 = RAGGIO GIRATORE (raggio per I equiv. con massa a distanza K dall'asse)

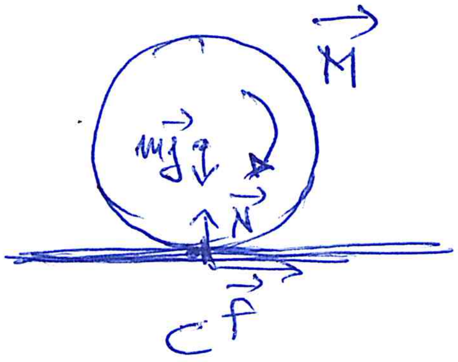
$$f = \frac{mk^2}{mk^2 + Mr^2} F \longrightarrow F = \left(1 + \frac{r^2}{k^2}\right) f$$

—

Verificare per esercizio che la soluzione del problema non dipende dalla scelta del polo, risolvendo esplicitamente il sistema usando per la rotazione l'eq. (21) o (22) - [si veda Mazzoldi]

(Noi abbiamo ~~assunto da~~ sfruttato la non dipendenza dal polo, per scrivere un sistema più rapido da risolvere)

ii) <u>M torcente applicato all'asse della ruota</u>



In assenza di attrito la ruota scivolerebbe sul piano e non ci sarebbero forze esterne tali da determinare il moto di avanzamento della ruota –

La $\vec{f}$ di attrito deve dunque essere rivolta nello <u>stesso verso</u> del moto. Questo esempio chiarisce che l'espressione comune "l'attrito è sempre opposto al verso del moto" non è precisa. Una formulazione più precisa è: "l'attrito è opposto al verso di scorrimento tra le superfici di contatto". (espressione valida anche nel caso precedente) –

Eq. del moto

Asse x
Asse y
Moto di rotazione

$$\begin{cases} f = m\,a_{CM} \\ N - mg = 0 \\ M - rf = I\,\dfrac{a_{CM}}{r} \qquad \text{Polo in CM} \\ \text{oppure } M = I_C\,\dfrac{a_{CM}}{R} = (I + mr^2)\,\dfrac{a_{CM}}{r} \qquad \text{Polo in C} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_{CM} = \dfrac{Mr}{I + mr^2} \\ f = \dfrac{Mmr}{I + mr^2} \le \mu_s\, mg \end{cases}$$

Caso generale, sia $\vec{F}$ sia $\vec{M}$ $\Rightarrow$ il verso di $\vec{f}$ non è determinato a priori, ma va ricavato dalle soluzioni del problema.
La forza può essere acceleratrice o frenante, ...

Rimanendo ai casi esemplificativi presentati, analizziamo il problema in termini di energia.

En. cinetica

× Teorema di König: en. cinetica nel riferimento inerziale è la somma dell'en. cinetica di traslazione del CM e dell'energia del moto relativo al CM.

$$E_k = \frac{1}{2} m v_{CM}^2 + \frac{1}{2} I \omega^2$$

× Possiamo esprimere E_k in riferimento al pto C. In quel caso il moto è di pura rotazione, poiché C è fisso rispetto al sistema inerziale:

$$E_k = \frac{1}{2} I_c \omega^2 = \frac{1}{2}(I + m r_{CM}^2)\omega^2 \quad \text{(H. Steiner)}$$

$$= \frac{1}{2} I \omega^2 + \frac{1}{2} m (r\omega)^2 \quad (v = \omega r)$$

Qs. espressione coincide con quella del teorema di Koenig. L'en. cinetica è la medesima per un asse parallelo all'asse di rotazione.

Si ricordi che, anche se E_k e W dipendono dal riferimento, il teorema dell'en. cinetica è sempre valido

Termini di lavoro e energia cinetica:

$$\Delta E_K = \Delta\left(\frac{1}{2} m v_{CM}^2\right) + \Delta\left(\frac{1}{2} I \omega^2\right) =$$

$$= m v_{CM} \Delta v_{CM} + I \omega \Delta \omega =$$

$$= m a_{CM} v_{CM} \Delta t + I \alpha \omega \Delta t =$$

$$= F_{tot} \Delta s_{CM} + M_{tot} \Delta \phi$$

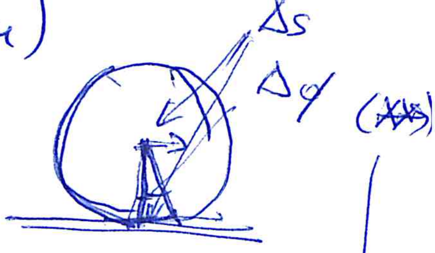
$$= W_F + W_M$$

lavoro della risultante di F_{est} (spost. del CM) — lavoro del momento torcente (rotazione angolare $\Delta\phi$)

Caso i) F // al piano di rotolamento

$$\Delta E_K = (F - f)\Delta s_{CM} + r f \Delta \phi$$

$$= F \Delta s_{CM} + f(r\Delta\phi - \Delta s_{CM})$$



*) Puro rotolamento $r\Delta\phi = \Delta s_{CM}$

→ ΔE_K coincide con il lavoro di F, non c'è dissipazione dovuta agli attriti (f non lavora, c'è punto fisso)

~~* $r\Delta\phi < \Delta s_{CM} \Rightarrow \Delta E_K$~~

(**) sappiamo che $v_{CM} = \omega r$ cioè

$$\frac{\Delta s_{CM}}{\Delta t} = \frac{\Delta \phi}{\Delta t} r \text{, poiché}$$

**) Se $r\Delta\phi < \Delta s_{CM}$ $\Longrightarrow$ $\Delta E_K < F \Delta s_{CM}$

c'è scivolamento e dissipazione di energia: non tutto il lavoro di F si traduce in energia cinetica

***) $r\Delta\phi > \Delta s_{CM}$ $\rightsquigarrow$ c'è rotolamento più rapido dello spostamento (ruote che slittano senza avanzamento). Questo caso si può realizzare solo con immissione di lavoro non incluso nell'analisi precedente (altrimenti si troverebbe $\Delta E_K >$ lavoro immesso), ~~tramite~~ ~~con~~ momento torcente applicato all'albero motore

ii) Momento torcente assiale:

$$\Delta E_K = f \Delta s_{CM} + (\tau - r f)\Delta\phi$$

$$= \underbrace{\tau \Delta\phi}_{\text{lavoro del momento torcente motore}} + f(\Delta s_{CM} - r\Delta\phi)$$

*) Puro rotolamento $\Delta s_{CM} = r\Delta\phi \Rightarrow \Delta E_K = \tau \Delta\phi$

**) $r\Delta\phi > \Delta s_{CM} \rightarrow \Delta E_K < \tau\Delta\phi$

energia dissipata, scivolamento delle ruote