

~~Abbiamo~~ Abbiamo

(1)

o) DALLE LEGGI DI KEPLERO, USANDO LE LEGGI DELLA DINAMICA, ABBIAMO RICOSTRUITO LA LEGGE DELLA FORZA

$\vec{F} = m\vec{a}$: c'è una ~~forza~~ accelerazione, allora c'è una forza: trovare!

o) AVENDO TROVATO $\vec{F} = - \frac{G m_1 m_2}{r^2} \hat{u}_r$ VOGLIAMO ~~TROVARE~~ RISOLVERE IL MOTO E CIOÈ TROVARE LE TRAIETTORIE.

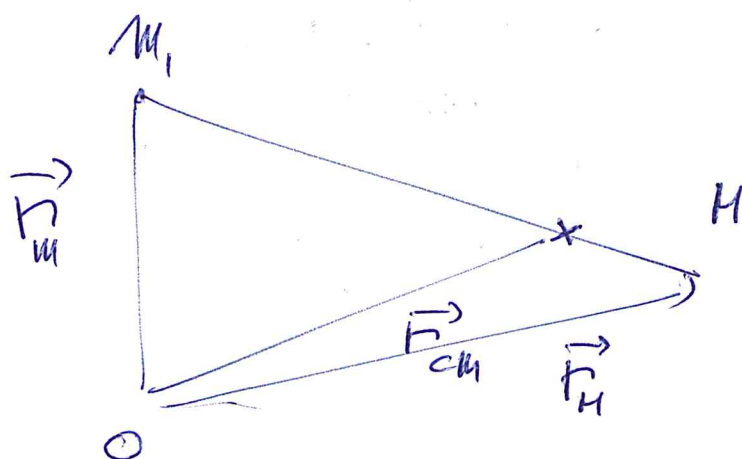
Risolviamo il problema nel caso generale per due masse m_1, m_2 ~~non~~ e descriviamo il moto relativo - Ricordiamo che è comodo nel caso generale, risolvere il moto per

$$\vec{R} = \frac{\vec{r}_1 m_1 + \vec{r}_2 m_2}{m_1 + m_2} \quad \text{e} \quad \vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$$

e $\vec{r}$ contiene la dinamica relativa alle forze interne. Avremo mostrato che per la dinamica relativa vale $\vec{F} = \mu \vec{a}$ con $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$

• FAREMO OB DI L e E_{tot} . Troviamo l'espressione in termini di $r, \dot{r}, \ddot{r}$.

Calcolo del momento angolare rispetto al CdM.



$$\vec{r}_{cm} = \frac{\vec{r}_m m + \vec{r}_H M}{M + m}$$

$$\vec{r} = \vec{r}_m - \vec{r}_H$$

Distanza relativa:

Si è visto (ma si ritrova rapidamente per sostituzioni) che

$$\vec{r}_m = \vec{r}_{cm} + \frac{M}{M+m} \vec{r}$$

$$\vec{r}_H = \vec{r}_{cm} - \frac{m}{M+m} \vec{r}$$

La II legge di Newton è $\vec{F} = \mu \vec{a}$
 con $\vec{a} = \text{acc. relativa}$ ($\vec{a} = \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2}$)

$$\mu = \frac{m M}{m + M}$$

$$\vec{F} = - \frac{G m M}{r^2} \hat{u}_r \equiv - G \frac{m M}{r^2} \hat{u}_r \quad \text{Forza centrale}$$

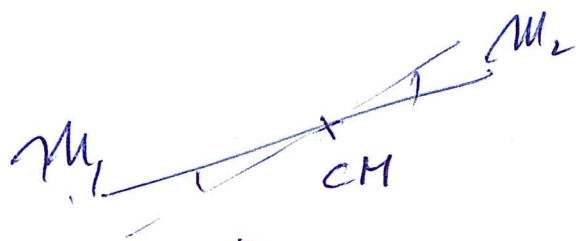
~~Verebbe da dire che il mom.~~

Sistema equivalente a una forza centrale per un pto materiale ~~orbitante~~ a ~~forza~~ ^{distanza} $\vec{r}$ rispetto al centro della forza e di massa ridotta μ .

Abbiamo visto che per una forza centrale
 $\vec{L} = \text{cost} \implies$ moto piano
 velocità angolare costante

Nella condizione trovata verrebbe da
 dire $L = \mu r^2 \left(\frac{d\theta}{dt} \right)$ — Verifichiamo in
 modo esplicito per un sistema di due corpi

$$\begin{aligned} L &= \vec{r} \times m \vec{v} = \vec{r} \times m \frac{d\vec{r}}{dt} \\ &= \vec{r} \times m \left(\frac{dr}{dt} \hat{u}_r + r \frac{d\hat{u}_r}{dt} \right) = \\ &= \underbrace{\vec{r} \parallel \hat{u}_r}_0 + \vec{r} \times m r \frac{d\theta}{dt} \hat{u}_\theta \\ &= m r^2 \frac{d\theta}{dt} \end{aligned}$$



$$L_{\text{TOT}} = L_1 + L_2 =$$

rotano attorno
 al centro di massa
 quindi $d\theta_1 = d\theta_2 = d\theta$

$$\begin{aligned} &= m_1 r_1^2 \frac{d\theta}{dt} + m_2 r_2^2 \frac{d\theta}{dt} \\ &= m_1 \left(r \frac{m_2}{m_1 + m_2} \right)^2 \frac{d\theta}{dt} + m_2 \left(r \frac{m_1}{m_1 + m_2} \right)^2 \frac{d\theta}{dt} \end{aligned}$$

$$= \frac{m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2} (m_1 + m_2) r^2 \frac{d\theta}{dt} = \mu r^2 \frac{d\theta}{dt}$$

Energia cinetica rispetto al CM. (caso opposto)

~~$\frac{1}{2} L' \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 = \frac{1}{2}$~~ componente

$$E_K = \frac{1}{2} m_1 \vec{v}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \vec{v}_2^2 =$$

$$= \frac{1}{2} m_1 \left(\frac{m_2}{m_1 + m_2} \right)^2 \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2} m_2 \left(\frac{m_1}{m_1 + m_2} \right)^2 \left(\frac{dr}{dt} \right)^2$$

$$= \frac{1}{2} \mu r^2 \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 = \frac{1}{2} L' \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2$$

$$= \frac{1}{2} \mu \left(\frac{d\vec{r}}{dt} \right)^2$$

— può essere
composta in
comp. radiale e tangente

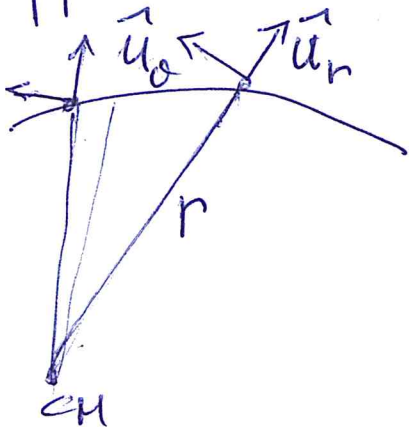
$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dr}{dt} \hat{r} + r \frac{d\theta}{dt} \hat{a}$$

$$E_K = \frac{1}{2} \mu r^2 \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2} \mu \left(\frac{dr}{dt} \right)^2$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2} L' \frac{d\theta}{dt}}_{\text{comp. tang.}} + \underbrace{\frac{1}{2} \mu v_r^2}_{\text{comp. radiale}} \longrightarrow \text{velocità Relativa}$$

E_K e L' sono equivalenti a quelli
del moto di una part. di massa ridotta μ

Per F centrale $F = F(\vec{r})$ comoda la rappresentazione in coordinate polari



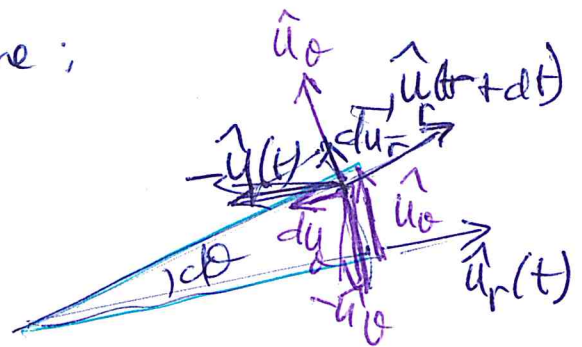
$$\vec{r} = r \hat{u}_r$$

$$\vec{v} = \frac{dr}{dt} \hat{u}_r + r \underbrace{\frac{d\theta}{dt} \hat{u}_\theta}_{= \frac{d\hat{u}_\theta}{dt}}$$

Per ricavare l'accelerazione in coordinate polari ricordiamo che;

$$d\hat{u}_r = d\theta \hat{u}_\theta$$

$$d\hat{u}_\theta = -d\theta \hat{u}_r$$



$$d\hat{u}_r = \hat{u}_r(t+dt) - \hat{u}_r(t)$$

$$= d\theta \hat{u}_\theta$$

$$\vec{a} = \frac{d}{dt} \left(\frac{dr}{dt} \hat{u}_r + r \frac{d\theta}{dt} \hat{u}_\theta \right) =$$

$$= \left(\frac{d^2 r}{dt^2} - r \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right) \hat{u}_r + \left(\cancel{\frac{dr}{dt} \frac{d\theta}{dt}} + \frac{dr}{dt} \frac{d\theta}{dt} + r \frac{d^2 \theta}{dt^2} \right) \hat{u}_\theta$$

$$= \left[\frac{d^2 r}{dt^2} - r \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right] \hat{u}_r + \underbrace{\left[\frac{1}{r} \frac{d}{dt} \left(r^2 \frac{d\theta}{dt} \right) \right]}_{= \text{cost}} \hat{u}_\theta$$

L'accelerazione è radiale, come μ
dove μ è una costante

Troviamo dunque l'accelerazione:

$$\vec{a} = \left[\frac{d^2 r}{dt^2} - r \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right] \hat{u}_r$$

al secondo termine possiamo sostituire il momento angolare $L = m r^2 \frac{d\theta}{dt} \Rightarrow \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = \frac{L^2}{m^2 r^4}$

$$\vec{a} = \left[\frac{d^2 r}{dt^2} - \frac{L^2}{\mu^2 r^2} \frac{1}{r} \right] \hat{u}_r \quad (\text{also})$$

È conveniente manipolare il primo termine
 in modo da esprimere $r = r(\theta)$, ~~cioè trovare~~
 al fine di trovare una descrizione delle traiettorie
 in cui la posizione radiale rispetto al punto di
~~operatività~~ ~~effettivo~~ (eventualmente non identico k a $m \in \mathbb{N}$)
 sia espressa in funzione di θ -

A tal fine:

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \frac{dr}{d\theta} \frac{1}{\mu r^2} = -\frac{1}{\mu} \frac{d}{d\theta} \left(\frac{1}{r} \right)$$

Dove r è usata il momento angolare del moto
e il fatto che la derivata le proprietà della
derivata di una funzione composta: $\frac{d}{dt}(r^{-1}) = -r^{-2} \frac{dr}{dt}$

Si avrà dunque, in esito, la descrizione delle posizioni radiali al "verriere" di θ (variazione $\longleftrightarrow$ derivata $\longleftrightarrow$ calcolo differenziale in θ):

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dr}{dt}\right) = \frac{d}{dt}\left[\frac{dr}{d\theta} \frac{d\theta}{dt}\right] =$$

$$= \frac{d}{dt}\left[\frac{dr}{d\theta} \frac{L}{\mu r^2}\right]$$

$$= -\frac{d}{dt}\left[\frac{L}{\mu} \frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{r}\right)\right]$$

$$= -\frac{d}{d\theta}\left[\frac{L}{\mu} \frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{r}\right)\right] \frac{d\theta}{dt}$$

$$= -\frac{L^2}{\mu^2 r^2} \frac{d^2}{d\theta^2}\left(\frac{1}{r}\right)$$

L'acce. radiale è dunque:

$$a = -\frac{L^2}{\mu^2 r^2} \left[\frac{d^2}{d\theta^2}\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{1}{r} \right]$$

L'equazione del moto, da $\vec{F} = \mu \vec{a}$, è

$$\frac{L^2}{\mu r^2} \left[\frac{d^2}{d\theta^2}\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{1}{r} \right] = \frac{GM}{r^2}$$

Equazione per la dinamica orbitale

Rappresenta l'equation di un oscillatore armonico per la variabile $z = \frac{1}{r}$, con una forzante costante (cioè $F = F \cos(\omega t)$ con $\omega = 0$) -

La solution dell'equation è una ~~stata~~ solution di moto armonico semplice per l'eq.

$$\frac{d^2}{d\theta^2}\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{1}{r} = 0 \rightarrow \frac{1}{r} = A \cos \theta$$

Plus una solution per l'eq. non omogenea.

Solution generale è la somma delle due (la solution omogenea fa zero $\frac{1}{r}$)

$$\frac{1}{r} = \frac{GM^2M}{L^2}$$

è solution (essendo una costante, la sua derivata è nulla -

Quindi la solution generale è:

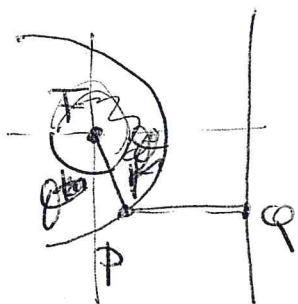
$$\frac{1}{r} = \frac{GM^2M}{L^2} + A \cos \theta$$

nota che $\frac{r_K}{r_M} = 1$

Rappresenta l'equation di una conica

INTERAZIONE

Definizione geometrica: Coniche - luogo di punti tale che ^{in rapporto} distanza da 1 punto (Focus) a una retta è costante e pari a $\epsilon = \text{Eccentricità}$



$$\epsilon = \frac{PF}{PQ} = \frac{r}{d + d \cos \theta} \quad (II)$$

N.B. INFILCURA
 $\theta > 90^\circ \Rightarrow$
 $\cos \theta < 0$

Tramite (II) si può scrivere l'equazione di una conica in coordinate polari come:

$$\frac{1}{\epsilon} = \frac{d}{r} + \frac{\cos \theta}{1} \Rightarrow \frac{1}{r} = \frac{1}{\epsilon d} - \frac{1}{d} \cos \theta$$

$\underbrace{\quad}_{\cos \theta} \quad \underbrace{\quad}_{\cos \theta}$

stabilisce $r = r(\theta)$

Se $\epsilon < 1$ ellipse

$\epsilon > 1$ iperbole

$\epsilon = 1$ parabola

Identificando i termini:

$$\frac{1}{\epsilon d} = \frac{G \mu m_1 m_2}{L^2} \Rightarrow \frac{1}{L^2} = G \mu m_1 m_2 \epsilon d$$

L'eccentricità e il parametro d della conica determinano L per un oggetto di massa m_1 in orbita attorno a m_2 .

Per orbite ellittiche: $L^2 = G \mu m_1 m_2 a (1 - \epsilon^2)$

Risultati sulle traiettorie e leggi di Keplero

1^a legge di Keplero $\rightarrow$ orbite ellittiche

2^a " " $\rightarrow L = \text{cost} \Rightarrow A = \text{cost.}$

in particolare $\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \dot{\vartheta} = \frac{L}{2m} \quad (1)$

3^a Legge di Keplero $\leftarrow$ sfruttata per orbite circolari per trovare la natura della forza

Dimostriamo la 3^a legge per un'orbita ellittica:

Usiamo (1), il fatto che $A = \pi a^2 \sqrt{1-e^2}$ e le relazioni trovate per $L^2 = G \mu^2 M a^3$

Per il periodo si ha:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{A}{T} = \frac{L}{2\mu}$$

$$T^2 = \left(\frac{2\mu}{L} \right)^2 A^2$$

$$= \frac{4\mu^2}{G\mu^2 M a (1-e^2)} \pi^2 a^4 (1-e^2)^3$$

$$= \frac{4\pi^2}{G M} a^3$$

$\rightarrow$ la costante $\frac{4\pi^2}{GM}$

Nota l'eccentricità è 0.989 per terra e 0.96 per Plutone

Risultati sulle traiettorie e leggi di Keplero

1^a legge di Keplero $\rightarrow$ orbite ellittiche

2^a " " $\rightarrow L = \text{cost} \Rightarrow A = \text{cost.}$

in particolare $\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\theta}{dt} = \frac{L}{2m} \quad (1)$

3^a Legge di Keplero $\leftarrow$ sfruttata per orbite circolari per trovare la natura della forza

Dimostriamo la 3^a legge per un'orbita ellittica:

Usiamo (1), il fatto che $A = \pi a^2 \sqrt{1-e^2}$ e la relazione trovata per $L^2 = G\mu^2 M e d$

Per il periodo si ha:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{A}{T} = \frac{L}{2\mu}$$

$$T^2 = \left(\frac{2\mu A}{L} \right)^2 \cdot \frac{1}{A^2}$$

$$= \frac{2\mu^2}{G\mu^2 M a (1-e^2)} \cdot \pi^2 a^4 (1-e^2)^3$$

$$= \frac{4\pi^2}{GM} a^3$$

$\rightarrow$ costante $\frac{4\pi^2}{GM}$

Nota, l'eccentricità è 0.989 per Terra e 0.96 per Plutone (più eccentrico)

Per definire la traiettoria occorrono due condizioni iniziali - Una può essere L , l'altra può essere v o l'energia - Chiamiamo la relazione tra i param. e l'energia ~~data~~ totale.

$$E_M = E_K + E_P$$

velocità relativa dei due corpi

$$= \frac{1}{2} \mu v^2 - \frac{G M_1 M_2}{r}$$

Si può scomporre E_M nel CM come somma di due termini doppi e un termine legato alle velocità relative (più vite)

$$E_M = \frac{1}{2} \mu \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2} \mu r^2 \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 - \frac{G \mu M}{r}$$

$$= \frac{1}{2} \mu \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2} \frac{L^2}{\mu r^2} - \frac{G \mu M}{r}$$

$$\mathbb{E}_K = \frac{1}{2} \mu \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2} \frac{L^2}{\mu r^2} - \frac{G\mu M}{r}$$

I termini angolare e $\mathbb{E}_p$ manifesterano una dip. da $1/r$ o da una potenza di $1/r$. Si conoche la solution della traiettoria per $1/r$ (conica).
Conviene explicitare il primo termine in modo che compaia una dip. da $1/r$ - :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{r} \right) = - \frac{1}{r^2} \frac{dr}{dt} \implies \frac{dr}{dt} = - r^2 \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{r} \right)$$

Dunque, usando la solution per la conica:

$$- r^2 \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{r} \right) = - r^2 \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\epsilon d} - \frac{\cos \theta}{d} \right) = - r^2 \frac{\sin \theta}{d} \frac{d\theta}{dt}$$

$$= - \frac{L}{\mu} \frac{\sin \theta}{d}$$

ove si e' sostituito
a $r^2 \frac{d\theta}{dt} = \frac{L}{\mu}$

I ~~primo~~ termini diventano:

$$\mathbb{E}_K(\text{radiale}) = \frac{1}{2} \mu \frac{L^2}{\mu^2} \frac{\sin^2 \theta}{d^2} = \frac{1}{2} \frac{L^2}{\mu} \frac{\sin^2 \theta}{d}$$

$$\mathbb{E}_K(\text{angolare}) = \frac{1}{2} \frac{L^2}{\mu r^2} = \frac{1}{2} \frac{L^2}{\mu} \left(\frac{1}{\epsilon d} - \frac{\cos \theta}{d} \right)^2 = \frac{L^2}{2\mu}$$

$$\mathbb{E}_p = - \frac{G\mu M}{r} = - \frac{L^2}{\mu \epsilon d} \left[\frac{1}{\epsilon d} - \frac{\cos \theta}{d} \right]$$

Sommando i termini

$$\begin{aligned}
 E_m &= \frac{1}{2} \frac{L^2}{\mu} \left[\frac{\sin^2 \vartheta}{d^2} + \frac{1}{(\varepsilon d)^2} - \frac{2 \cos \vartheta}{\varepsilon d^2} + \frac{\cos^2 \vartheta}{d^2} - \frac{2}{(\varepsilon d)^2} + \frac{2 \cos \vartheta}{\varepsilon d^2} \right] \\
 &= \sim = \sim \\
 &= \frac{1}{2} \frac{L^2}{\mu} \left[\frac{1}{d^2} - \frac{1}{(\varepsilon d)^2} \right] \\
 &= -\frac{1}{2} \frac{L^2}{\mu d^2} \frac{d^2 - \varepsilon^2}{\varepsilon^2}
 \end{aligned}$$

Sostituendo il risultato per $L^2 = G\mu^2 M \varepsilon d$

$$\boxed{E_m = -\frac{1}{2} G\mu M \frac{1 - \varepsilon^2}{\varepsilon d}} \quad \underline{\text{En Meccanica}}$$

- Note:
- A) - $E_m < 0$ per $\varepsilon < 1$
 orbite chiuse (ellittiche) $\rightarrow$ sistemi
 "legati" o confinati - vedi grafici
 di E_m , E_k e E_p lezione precedente
 - B) $E_m \geq 0$ per $\varepsilon \geq 1$ - orbite aperte

Per il caso A), orbite ellittiche; semiasse maggiore
 $a = \frac{\varepsilon d}{1 - \varepsilon^2} \rightarrow \boxed{E_m = -\frac{1}{2} \frac{G\mu M}{a}}$

L'energia meccanica determina il valore del semiasse
 maggiore dell'orbita. (ossia tutte le orbite con lo stesso
 a hanno la stessa E_m) - L'eccentricità dipende da L

$$L^2 = G\mu^2 M a (1 - \varepsilon^2)$$

dipende da L
e peritici di E_m

↑
Fissato da E_m

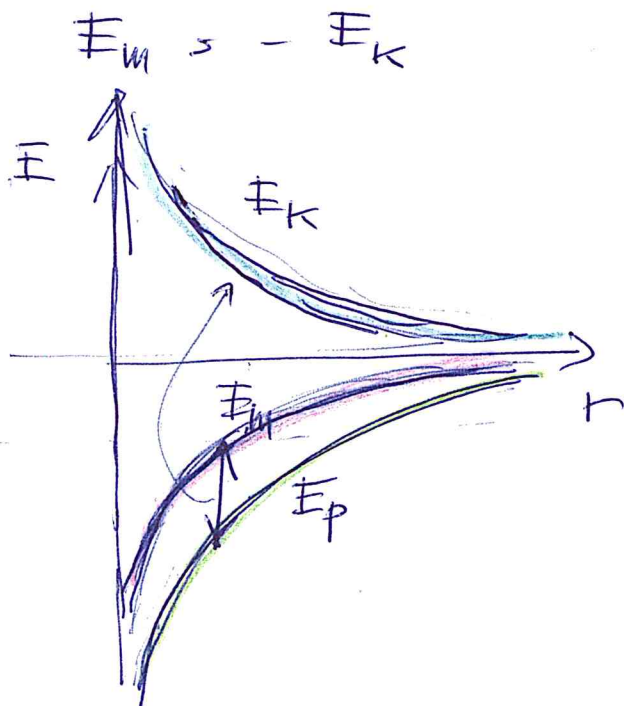
Per $\varepsilon = 0$, orbita circolare $b/a = \sqrt{1 - \varepsilon^2}$

Nel sistema solare $b/a = 0.999$ Terra $\varepsilon = 0.017$
 $b/a = 0.96$ Plutone $\varepsilon = 0.1$

Per orbite circolari (confinate)

$$E_m = - \frac{G\mu M}{2r} = \frac{1}{2} E_p < 0$$

$$E_k = E_m - E_p = - \frac{1}{2} E_p > 0$$



Fissando E_m o E_k
 E_{eff} (quindi v_ϕ) e
 fissato il raggio dell'orbita
 circolare

La relazione per orbite circolari:

$$E_K = -\frac{1}{2} E_P \rightarrow \boxed{2E_K + E_P = 0}$$

si dimostra vero anche per i valori medi dell'energia cinetica e potenziale di orbite qualunque (nota: E_K ~~è costante su un~~ e E_P sono costanti su una orbita circolare, ma non su un'orbita qualunque)

Inoltre la relazione è vera anche per un sistema di N -corpi in cui agisce solo $F \propto 1/r^2$

$$2\langle E_K \rangle + \langle E_P \rangle = 0$$

representa la condizione di equilibrio per il sistema ^(orbite stabili)
(teorema del viriale). ^($\approx 10^5$ stelle osservabili contengono tipicamente)
Per stelle nei dintorni del sole, si può scrivere

$$\sum_i m_i v_i^2 - \sum_{i < j} \frac{m_i m_j}{r_{ij}} = 0$$

Questa equazione può essere verificata usando la misura delle velocità relative delle stelle e delle distanze usando metodi trigonometrici (parallax) al variare della posizione della terra nell'orbita e stimando m_i delle luminosità stellari.
La relazione non è soddisfatta. La materia luminosa è circa $1/3$ della materia necessaria.