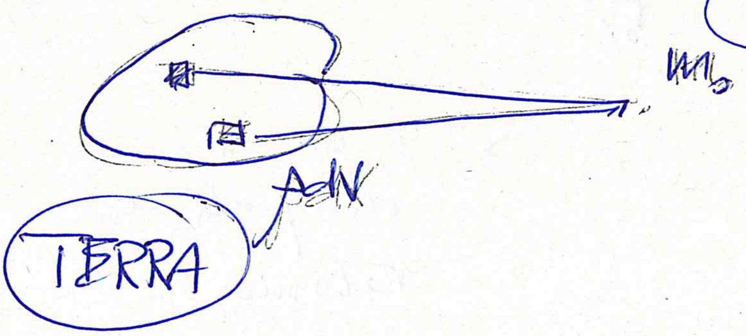
Forza di gravità tra corpi estesi

- Abbiamo visto che la forza agente su una massa m_0

$$\vec{F} = \sum_i \vec{F_i} = -\sum_i \frac{G m_0 m_i}{r_{i0}^2}\hat{u}_{r_i}$$

$$= -G\frac{m_0 m_1}{r_{10}^2} - G\frac{m_0 m_2}{r_{12}^2} - \dots$$

Per una distribuzione continua $m_i = \rho dV$



ρ = densità

$\rho = \frac{M}{V}$ per un mezzo omogeneo, ma

in generale può anche essere $\rho = f(r)$

$$\vec{F}_{m_0} = -G\int_V \frac{m_0 \rho dV}{r^2}\hat{u}_r$$

r è variabile di integrazione

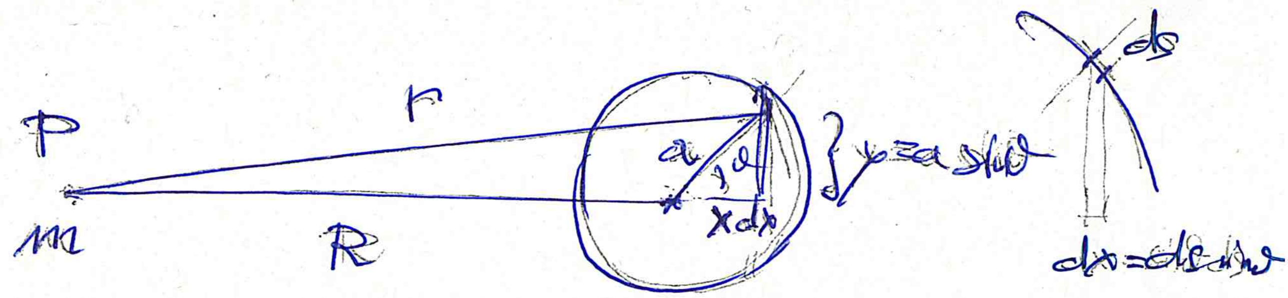
Se m_0 è altresì un corpo esteso, la F gravitazionale tra i due corpi va ~~espressa~~ calcolata dal doppio integrale di volume su l'uno e l'altro oggetto

$$\vec{F} = \int_{M_0} \vec{F}_{m_0} dm_0 = \int_V \vec{F}_{m_0} \rho dV$$

Non si capisce

L'espressione è semplice nel caso di corpi a <u>SIMMETRIA SFERICA</u> omogenei (buona approssimazione per pianeti e corpi celesti)

Ricordando che $\vec{F} = -\vec{\nabla} E_p$, calcoliamo l'energia potenziale di un punto di massa m a distanza R dal centro di una Guscio (SFERA CAVA) di raggio a (calcolo Halliday)

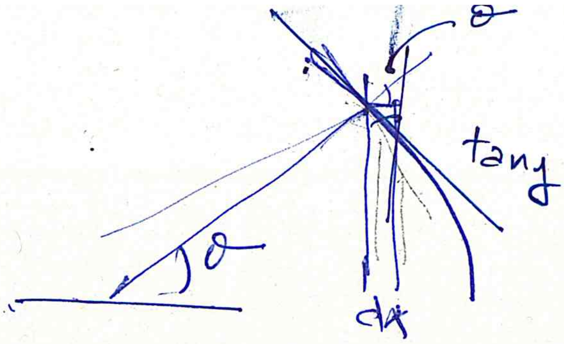


Sia $\mu = \frac{M}{4\pi a^2}$ densità superficiale di massa

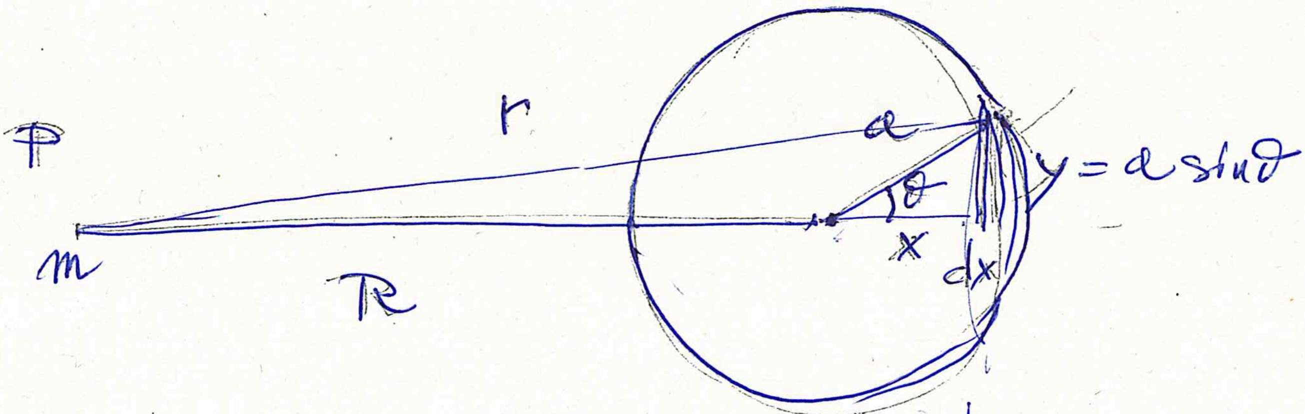
F_p, per motivi di simmetria, è diretta lungo R. Calcoliamo E_p iniziando dal calcolo di <u>un anello</u> di spessore $ds = dx/\sin\theta$ ~~lungo il guscio~~ e di raggio y lungo il guscio

MASSA ANELLO:

$$dM = \mu \cdot 2\pi y \, ds$$
$$= \mu \cdot 2\pi (a \sin\theta) \, ds$$
$$= \mu \, 2\pi a \, dx$$



Guscio sferico cavo



$dx = ds \sin\theta$ (θ = angolo tra tang e verticale $\equiv$ angolo raggio e horiz)

$y = a \sin\theta$

sia $\mu = M/4\pi a^2$

↳ Anello tutto a dist. r dal P lungo R per ragioni di simm.

E_P = contributo di tutte le masse della calotta

Per motivi di simm. da un anello → forza diretta verso il centro (lungo R). Calcoliamo dM

MASSA ANELLO:

$$dM = \mu \, 2\pi y \, ds = \mu \, 2\pi a \sin\theta \, ds = 2\pi \mu a \, dx$$

DISTANZA ANELLO:

$$r^2 = (R+x)^2 + y^2 = R^2 + 2Rx + a^2$$

$$d(r^2) = 2r\,dr = 2R\,dx \rightarrow dx = \frac{r}{R} dr$$

R = cost

a = cost

DISTANZA DEI PUNTI DELL'ANELLO DA P :

$$r^2 = (R+x)^2 + y^2 = R^2 + 2Rx + \cancel{x^2} + a^2 - \cancel{x^2}$$

$$= R^2 + 2Rx + a^2$$

VARIAZIONE DISTANZA (DIFFERENZIALE):

$$d(r^2) = 2r\,dr = d(R^2 + 2Rx + a^2)$$

$$= 2R\,dx$$

(R e a sono fissi, x cambia al cambiare di r)

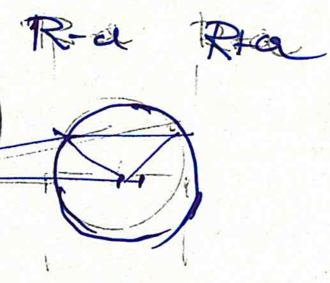
$$\Longrightarrow \boxed{dx = \frac{r\,dr}{R}}$$

En potenziale di un anello :

$$E_p(r) = -\frac{Gm\,dM}{r} = -\frac{Gm\,2\pi a\,\mu\,dx}{r}$$

$$= -\frac{Gm\mu\,2\pi a}{R}\,dr$$

En potenziale del guscio (per pto esterno)

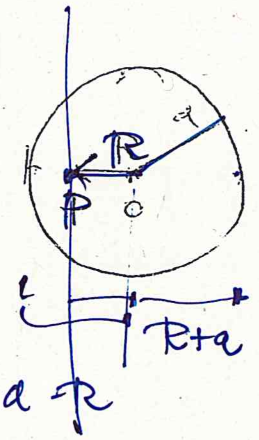


$$E_p = -\frac{Gm\mu\,2\pi a}{R}\int_{R-a}^{R+a} dr = -\frac{Gm\,\mu 4\pi a^2}{R}$$

$$= -\frac{GmM}{R}$$

← En. potenziale equiv. a un punto di massa M nel centro del guscio

CASO di Punto interno alla sfera:



$$E_p = -\frac{G m \mu 2\pi a}{R} \int_{a-R}^{R+a} dr$$

$$= -G m \mu 4\pi a = \frac{-G m M}{a} \quad \text{cost}$$

E_p = costante indip. da R

quindi $\begin{cases} F(R) = 0 & \text{per } R < a \\ F(R) = -G\dfrac{m M}{R^2} & R \geq a \end{cases}$

Nota per R = a il risultato per P interno e esterno coincide

– Next Distribution sfera piena

~~Lezione 3 GRAVITAZIONE~~ Sommario foto appunti

Energia potenziale gravitazionale tra un punto materiale di massa m e una sfera cava di massa $M = 4\pi a^2 \mu$

$$E_p(R) = \begin{cases} -\dfrac{GMm}{a} & R < a \\[2ex] -\dfrac{GMm}{R} & R \geq a \end{cases}$$

Poiché per $R < a$ l'energia potenziale è costante (indip. da R) la forza è nulla per $R < a$. Per $R > a$ la forza è radiale e con intensità $F(R) = -\dfrac{dE_p}{dR}$;

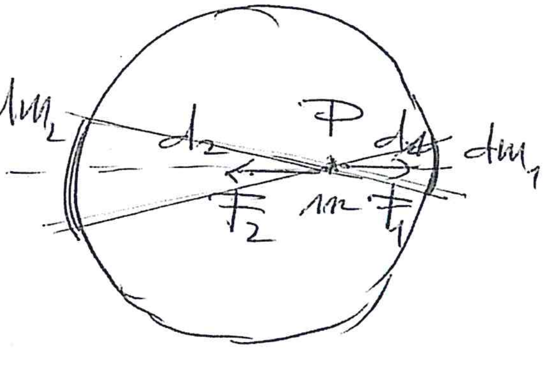
$$F(R) = \begin{cases} 0 & R < a \\[2ex] -\dfrac{GMm}{R^2} & R \geq a \end{cases}$$

Equivalente alla forza di una massa M puntiforme. (NOTA: l'equivalenza è vera solo per $R \geq a$

Osservazioni sul risultato

La risultante delle forze all'interno del guscio è nulla. Possiamo ottenere questo risultato con un semplice ragionamento che sfrutta la simmetria del problema e il fatto che $F \div \frac{1}{r^2}$

Consideriamo un punto generico P all'interno del guscio di raggio a.

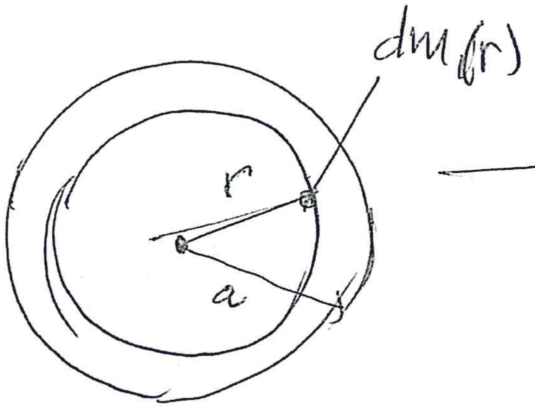


$$F_i = G\frac{m\, dm_i}{d_i^2}$$

La massa dm_i della calotta sferica è $dm_i = \mu\pi r_i^2$ con μ = densità di massa e r_i raggio della calotta. Poiché le calotte in disegno sottendono lo stesso angolo solido $r_i = \vartheta d_i$ e dunque $dm_i \div \pi\vartheta^2 d_i^2$. Quindi F_1 e F_2 sono identiche in intensità e opposte in direzione. Questo risultato consegue direttamente dal fatto che $F \div 1/r^2$.

Si può ripetere il ragionamento lungo ogni direzione ottenendo che $\vec{R} = 0$

SFERA PIENA OMOGENEA



→ Somma (infinita) di gusci sferici (di spessore infinitesimo) e massa dm (infinitesima)

$$M = \int_0^a dm(r)$$

Per ciascun guscio, la forza su un punto materiale di massa m ha l'espressione

$$dF_d(dm) = \begin{cases} 0 & \text{per } R < r \\ -\dfrac{G m\, dm}{R^2} & \text{per } R > r \end{cases}$$

La forza complessiva è la somma (integrale) di tutte le forze dovute a ciascun guscio (concentrici e dunque permane la simmetria del problema)

$$F = \int_0^R dF(r) = -\frac{G m}{R^2}\int_0^R dm$$

Si hanno due casi a seconda che il punto si trovi ad una distanza R maggiore o minore di a – (punto interno o esterno)

Caso A: Punto esterno alla sfera $R \geq a$

$$F = -\frac{Gm}{R^2}\int_0^a dm = -\frac{GmM}{R^2}$$

Il risultato è equivalente alla forza esercitata da un punto materiale di massa M nel centro della sfera. Il risultato è ovvio, indipendentemente degli aspetti formali dell'integrazione: il punto è esterno a tutti ~~da~~ i gusci e F di ciascun guscio dipende solo da R e dalla massa del guscio, ma non dal raggio del guscio. Dunque per la sfera l'unica dipendenza è dalla somma delle masse dei gusci, cioè la massa totale

CASO B: Punto interno alla sfera $(R \leq a)$

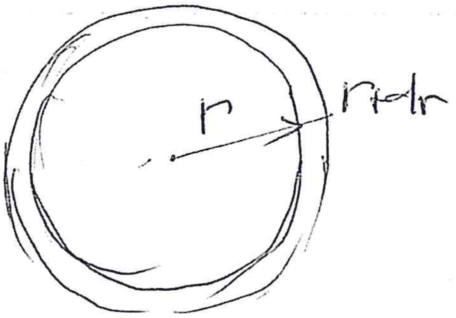
I gusci a $r > R$ non danno contributo alla forza (vedi caso del guscio sferico: $F=0$ per i punti interni). Dunque solo la massa a raggi minori di R contribuisce alla forza:

$$F = -\frac{Gm}{R^2}\int_0^R dm$$

← somma dei contributi dei gusci con $r<R$

Per una sfera omogenea, la densità è costante pari a $\rho = M/V = \left[M/\frac{4\pi}{3}a^3\right]$.

Per un guscio di raggio r e spessore dr, la massa è $dm = \underbrace{\rho}_{\text{densità}} \cdot \underbrace{4\pi r^2 dr}_{\text{Volume del guscio}}$



$$\text{Volume} = \underbrace{\text{Superficie}}_{4\pi r^2} \times \underbrace{\text{spessore}}_{dr}$$

Dunque la forza complessiva è:

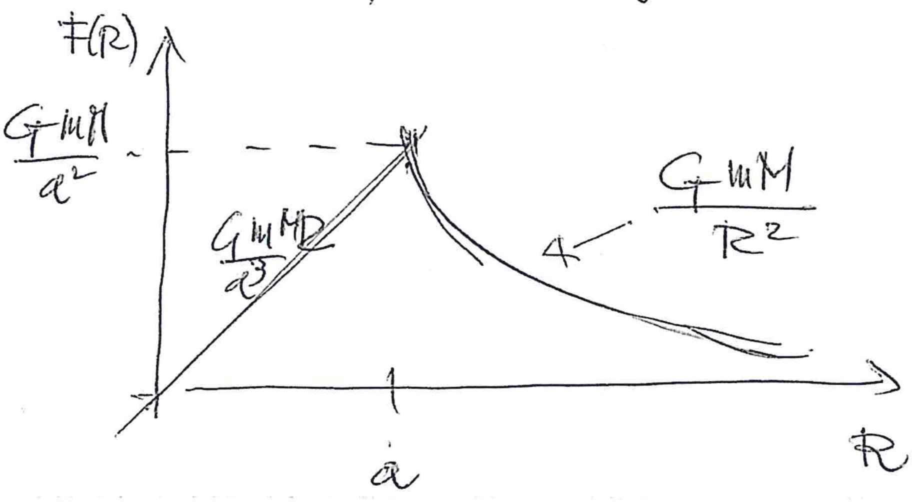
$$F = -\frac{Gm}{R^2}\int_0^R \rho\, 4\pi r^2 dr =$$

$$= -\frac{Gm}{R^2} \cdot 4\pi\rho \int_0^R r^2 dr =$$

$$= -\frac{Gm}{R^2} 4\pi\rho \left[\frac{R^3}{3} - \cancel{\frac{0^3}{3}}\right] =$$

$$= -\frac{GmM}{a^3} \cdot R$$

Forza per sfera omogenea:



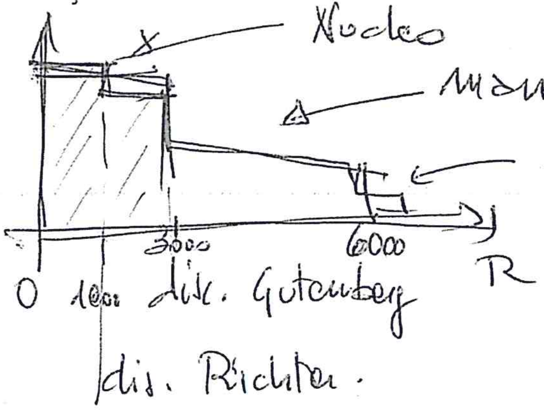
$$F(R) = \begin{cases} -G\dfrac{Mm}{a^3}R & R<a \\ \dfrac{GMm}{R^2} & R \geq a \end{cases}$$

All'interno della sfera c'è una forza elastica (in ~~la~~ ~~for~~ tlin 3D) rivolta verso il centro e di intensità proporzionale alla distanza radiale.

Per un punto esterno, una sfera omogenea è equivalente a un punto materiale.
Qs. risultato, che consegue dal risultato ottenuto per il guscio sferico, si fonda nel fatto che la forza dipende da $1/R^2$ —

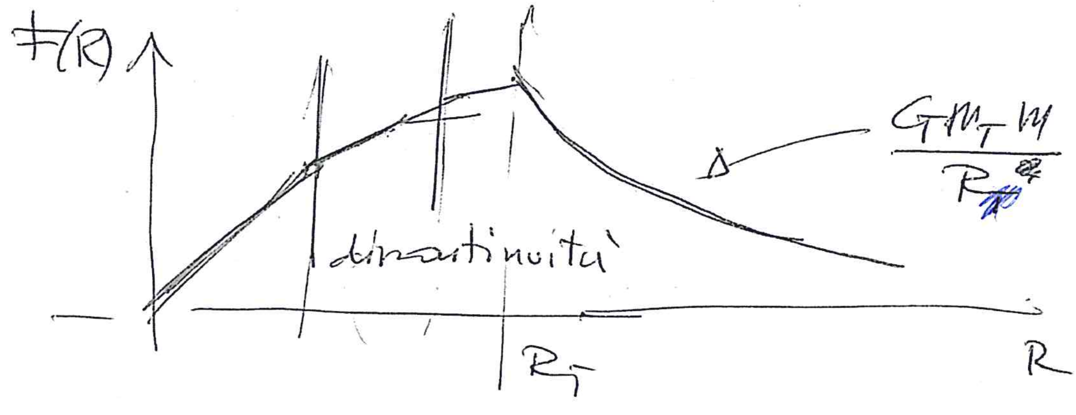
Sfera non-omogenea (Terra):

~~[illegible]~~mente non fosse noto al tempo di Newton, la Terra non è omogenea, ma ha un profilo di densità variabile con il raggio —

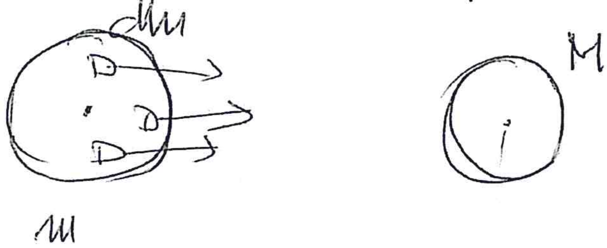


Tuttavia, ignorando le asimmetrie di densità locale, la terra è a simmetria sferica.

Dunque per $R > R_T$, vale la legge dell'inverso del quadrato, con M = massa totale della terra. Per $R < R_T$ la forza non è esattamente lineare perché il profilo di densità non è costante.



Azione tra due corpi sferici (omogenei)



1) Per ogni dm, M è equivalente al pto materiale nel centro

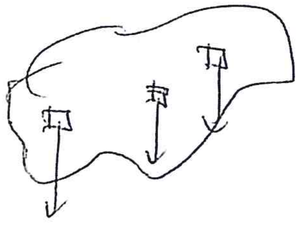
2) Az.-Reaz. devo calcolare la forza tra M e m sferico

3) ~~Ho~~ più dimostrato che questa forza è equivalente a $F = -G\frac{mM}{R^2}$ → dove R^2 distanza tra i centri

[Nota: d'altronde vale un criterio di reciprocità, in virtù del principio di azione e reazione]

Azione tra corpi non sferici

— Esempio; calcolo della ~~potenziale di un~~ forza peso di un corpo rigido ~~nel campo~~ ~~sotto l'azione della forza peso~~



$$\vec{P} = \sum_i d\vec{P}_i = \sum_i m_i \vec{g} = M\vec{g}$$

Vera poiché $\vec{g}$ è indip. da m e dalla posizione.

Qs. relazione è vera in prima approssimazione, ma sufficientemente buona per confrontare la caduta della mela e della luna.

Ricapitolando abbiamo:

1) Dedotto la natura della forza gravitazionale

$$\vec{F} = -\frac{G m_1 m_2}{r^2} \hat{u}_r$$

dalla terza legge di Keplero (*)

2) Abbiamo dimostrato che la legge vale anche per sistemi orbitanti con masse "confrontabili" pur di descrivere il sistema orbitante in termini di massa ridotta $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$

$$\vec{F}_\mu = -\frac{G \mu M}{r^2} \hat{u}_r \qquad M = m_1 + m_2$$

3) Abbiamo mostrato che corpi estesi a simmetria sferica sono (al loro esterno) equivalenti a pti materiali in relazione alla forza di gravitazione (conseguenza di $F \div 1/r^2$)

Per corpi non sferici sulla Terra, poichè $\vec{g} = -\frac{G M}{R_T^2} \hat{\jmath}$ è sostanzialmente uniforme e diretto ~~per~~ sulla verticale, la forza di gravità (peso) è indip. dalla forma dell'oggetto

Applicazioni 1: Velocità di un sistema di punti orbitanti entro una distribuzione di massa omogenea sferica di raggio R_0

$R < R_0 \longrightarrow F(R) = \frac{GmM}{R_0^3} \cdot R$

Velocità di rotazione su orbita di raggio R

$m \frac{v^2}{R} = F_c$ 2ª legge NW

$m \frac{v^2}{R} = \frac{GmM}{R_0^3} \cdot R \Longrightarrow \boxed{v \div R}$

La velocità è proporzionale a R — In altri termini la velocità angolare è costante.

[Avremmo potuto ottenerlo in modo ~~naturale~~ immediato scrivendo $m\omega^2 R = \frac{GmM}{R_0^3} \cdot R$]

Dunque il sistema di punti si muove come se fosse un corpo rigido ⟹ SISTEMA COROTANTE —

Questo è il moto delle stelle nel centro delle galassie. A diff. di un corpo rigido, esse non sono vincolate in posizioni relative fisse, ma sono COROTANTI PERCHE' ALL'INTERNO di UNA DISTRIBUZIONE DI MASSE OMOGENEA

Applicazioni 2 : Velocità di un sistema di punti orbitanti per $R > R_o$

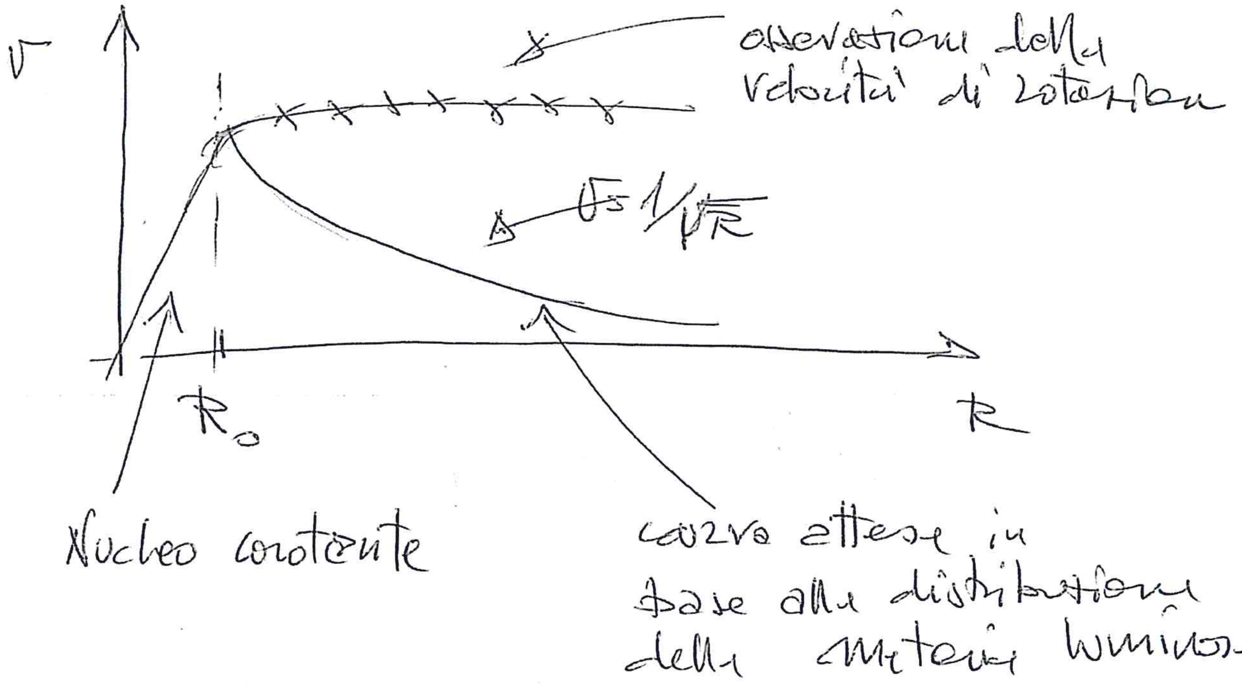
In modo analogo:

$$m \frac{v^2}{R} = \frac{G m M}{R^2} \Rightarrow v \div \frac{1}{\sqrt{R}}$$

La velocità di un sistema planetario diminuisce allontanandosi ~~dalla massa~~ dal sole. Questo risultato è equivalente alla 3ª legge di Keplero (nella forma per orbite circolari che abbiamo visto fino ad ora), ma espressa in termini di velocità.

- ~~Nelle~~ galassie a spirale sono caratterizzate da un disco piatto ~~e da un alone sferico~~ con un nucleo più luminoso, e da un alone sferico. Si definisce raggio ottico R_o la distanza dal centro del disco a cui la luminosità del disco diventa uguale a quella del fondo, cioè dove la materia luminosa non è più distinguibile.
- In base ~~alle osservazioni precedenti~~ ai risultati degli esempi ci si aspetta che per $R > R_o$ le velocità di rotazione degli oggetti celesti (rivelati in banda radio) attorno al nucleo diminuisca con la distanza

Risultati osservazionali, e attese sulla base della materia visibile (luminosa)



Si osserva che per $R > R_0$ $\underline{v \sim \text{costante}}$, contro le attese

Da cui si deduce:

$$m\frac{v^2}{R} = G\frac{m\,M(R)}{R^2}$$

$$v = \text{cost} \implies M(R) \div R$$

La massa ~~cresce~~ entro un disco di raggio R cresce proporzionalmente a R (nella regione corotante la massa cresce con R^3) - Questa massa non è visibile $\implies$ MATERIA OSCURA

Possibilità –

1) La legge di gravitazione richiede una modifica

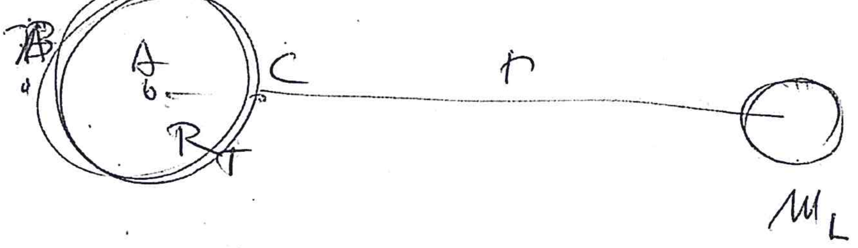
2) La massa di oggetti non luminosi (pianeti o gas e polveri) è sottostimata

3) Esiste una forma di materia non nota

Vi sono altre indicazioni cosmologiche di materia oscura

Applicazione 4

FORZE DI MAREA. — Particelle di massa in punti A, B, C
$m_A = m_B = m_C = m$



Luna è puntif. →

$$F_A = G\frac{m M_L}{r^2}$$

$$\left[(1 \pm a)^2 = 1 \pm 2a + a^2 \simeq 1 \pm 2a\right.$$

$$F_{B,C} = G\frac{m M_L}{(r \pm R_T)^2} \simeq G\frac{m M_L}{r^2}\left(1 \mp 2\frac{R_T}{r}\right)$$

$$\left. — \; F_{B,C} - F_A = G\frac{m M_L}{r^3} 2R_T \right]$$

La terra "cade" sulla luna come se tutta la massa fosse in A. Allora risp. alla luna F_{app} —
La forza in A è $F_I + F_{APP} = F_A + F_A' = 0$, la forza in B e C è $(F_{B,C} + F_{APP})$ — con segni opposti

⟹ Maree da due parti, dovute a forza $\boxed{\text{centrifuga}}$ apparente

— Marea solare e lunare:

$$\cancel{G\frac{M_S}{r_S^3} 2R_T}$$

$$\frac{M_L/r_L^3}{M_S/r_S^3} = \frac{\rho_L (R_L/r_L)^3}{\rho_S (R_S/r_S)^3} \simeq \frac{\rho_L}{\rho_S} \simeq 3$$