Lezione 3 GRAVITAZIONE

Energia potenziale gravitazionale tra un punto materiale di massa m e una sfera cava di massa $M = 4\pi a^2 \mu$

$$E_p(R) = \begin{cases} -\dfrac{GMm}{a} & R < a \\ -\dfrac{GMm}{R} & R \geq a \end{cases}$$

Poichè per $R < a$ l'energia potenziale è costante (indip. da R) la forza è nulla per $R < a$. Per $R > a$ la forza è radiale e con intensità

$$F(R) = -\frac{dE_p}{dR} \; ;$$

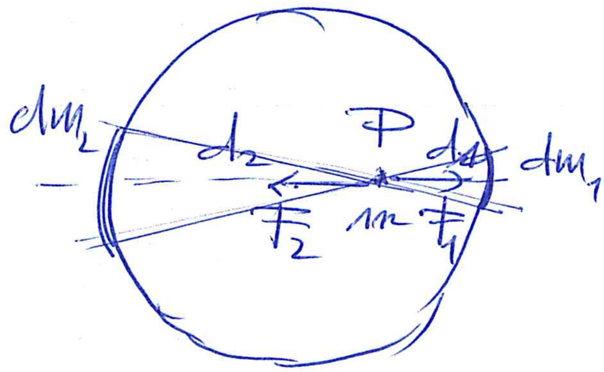
$$F(R) = \begin{cases} 0 & R < a \\ -\dfrac{GMm}{R^2} & R \geq a \end{cases}$$

Equivalente alla forza di una massa M puntiforme. (NOTA: l'equivalenza è vera solo per $R \geq a$

Osservazioni sul risultato

La risultante delle forze all'interno del guscio è nulla. Possiamo ottenere qs. risultato con un semplice ragionamento che sfrutta la simmetria del problema e il fatto che $F \div \frac{1}{r^2}$

Consideriamo un punto generico P all'interno del guscio di raggio a.

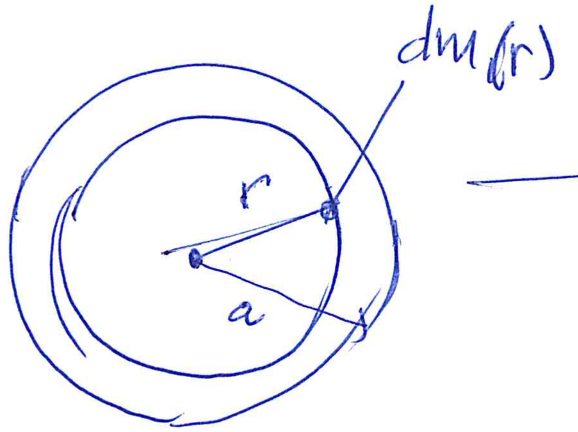


$$F_i = G\frac{m\,dm_i}{d_i^2}$$

La massa dm_i della calotta sferica è $dm_i = \mu\pi r_i^2$ con μ = densità di massa e r_i raggio della calotta. Poiché le calotte in disegno sottendono lo stesso angolo solido $r_i = \vartheta d_i$ e dunque $dm_i \div \pi\vartheta^2 d_i^2$. Quindi F_1 e F_2 sono identiche in intensità e opposte in direzione. Qs. risultato consegue direttamente dal fatto che $F \div 1/r^2$.

Si può ripetere il ragionamento lungo ogni direzione ottenendo che $\vec{R}_i = 0$

SFERA PIENA OMOGENEA



→ Somma (infinita) di gusci sferici (di spessore infinitesimo) e massa dm (infinitesima)

$$M = \int_0^a dm(r)$$

Per ciascun guscio, la forza su un punto materiale di massa m ha l'espressione

$$dF_c(dm) = \begin{cases} 0 & \text{per } R < r \\ -\dfrac{G m \, dm}{R^2} & \text{per } R > r \end{cases}$$

La forza complessiva è la somma (integrale) di tutte le forze dovute a ciascun guscio (poiché e comunque permane la simmetria del problema)

$$F = \int_0^R dF(r) = -\frac{G m}{R^2}\int_0^R dm$$

Si hanno due casi a seconda che il punto si trovi ad una distanza R maggiore o minore di a – (Punto interno o esterno)

Caso A: Punto esterno alla sfera $R \geq a$

$$F = -\frac{Gm}{R^2}\int_0^a dm = -\frac{GmM}{R^2}$$

Il risultato è equivalente alla forza esercitata da un punto materiale di massa M nel centro della sfera. Il risultato è ovvio, indipendentemente dagli aspetti formali dell'integrazione: il punto è esterno a tutti ~~le~~ i gusci e F di ciascun guscio dipende solo da R e dalla massa del guscio, ma non dal raggio del guscio. Dunque per la sfera l'unica dipendenza è dalla somma delle masse dei gusci, cioè la massa totale

CASO B: Punto interno alla sfera $(R \leq a)$

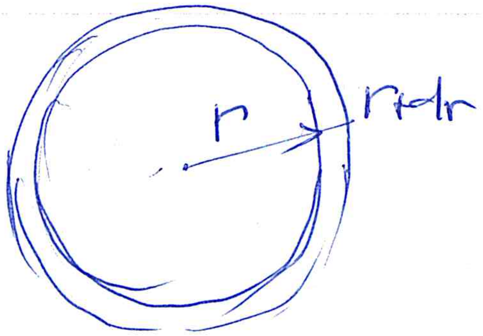
I gusci a $r > R$ non danno contributo alla forza (vedi caso del guscio sferico: $F=0$ per i punti interni). Dunque solo la massa a raggi minori di R contribuisce alla forza:

$$F = -\frac{Gm}{R^2}\int_0^R dm$$

somma dei contributi dei gusci con $r<R$

Per una sfera omogenea, la densità è costante pari a $\rho = M/V = \left[M/\frac{4\pi}{3}a^3\right]$.

Per un guscio di raggio r e spessore dr, la massa è $dm = \underbrace{\rho}_{\text{densità}} \cdot \underbrace{4\pi r^2 dr}_{\text{Volume del guscio}}$



Volume = Superficie × spessore

$$\text{Volume} = \underbrace{\text{Superficie}}_{4\pi r^2} \times \underbrace{\text{spessore}}_{dr}$$

Dunque la forza complessiva è:

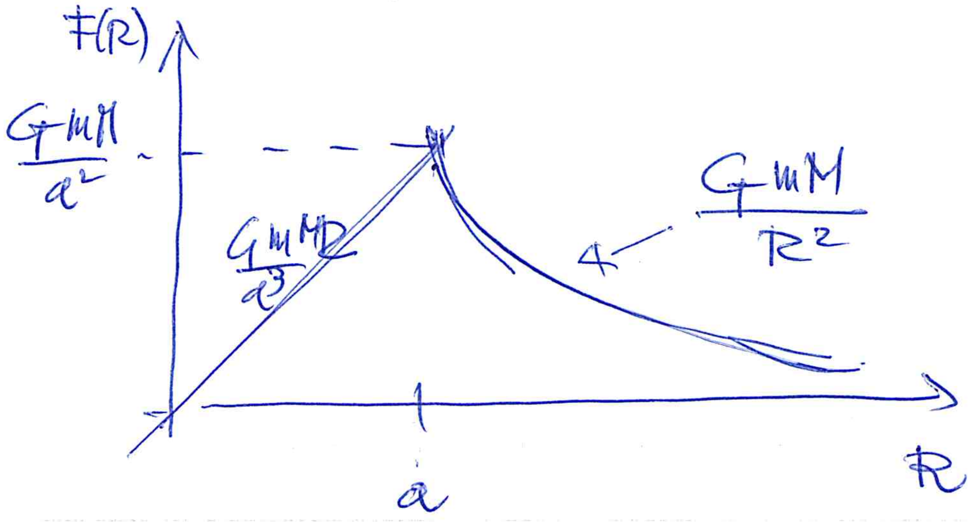
$$F = -\frac{Gm}{R^2}\int_0^R \rho\, 4\pi r^2 dr =$$

$$= -\frac{Gm}{R^2} \cdot 4\pi\rho \int_0^R r^2 dr =$$

$$= -\frac{Gm}{R^2} 4\pi\rho \left[\frac{R^3}{3} - \cancel{\frac{0^3}{3}}\right] =$$

$$= -\frac{GmM}{a^3} \cdot R$$

Forza per sfera omogenea:



$$F(R) = \begin{cases} -G\dfrac{Mm}{a^3}R & R<a \\[2ex] \dfrac{GMm}{R^2} & R\geq a \end{cases}$$

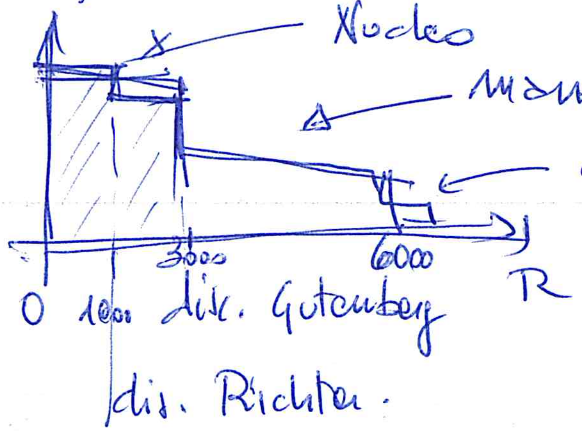
All'interno della sfera c'è una forza elastica (in ~~la~~ tutte 3D) rivolta verso il centro e di intensità proporzionale alla distanza radiale.

Per un punto esterno, una ~~guscio~~ sfera omogenea è equivalente a un punto materiale.

Qs. risultato, che consegue dal risultato ottenuto per il guscio sferico, si fonda sul fatto che la forza dipende da $1/R^2$ —

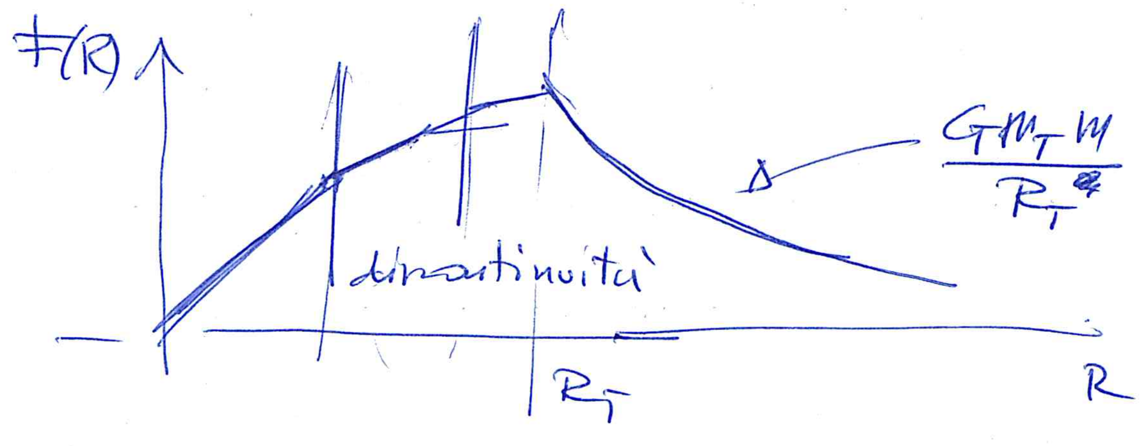
Sfera non-omogenea (Terra) :

~~Recentemente~~ non fosse noto al tempo di Newton, la ~~g~~ Terra non è omogenea, ma ha un profilo di densità variabile con il raggio —

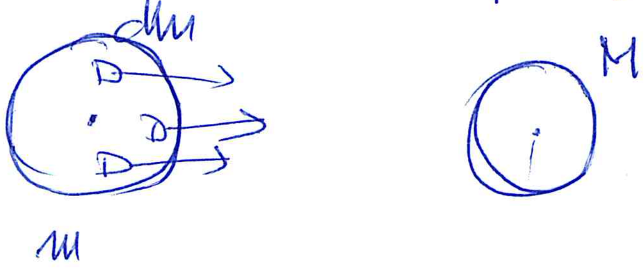


Tuttavia, ignorando le asimmetrie di densità locale, la terra è a simmetria sferica.

Dunque per $R > R_T$, vale la legge dell'inverso del quadrato, con M = massa totale della terra. Per $R < R_T$ la forza non è esattamente lineare perché il profilo di densità non è costante.



Azione tra due corpi sferici (omogenei)



1) Per ogni dm, M è equivalente al pt. materiale nel centro

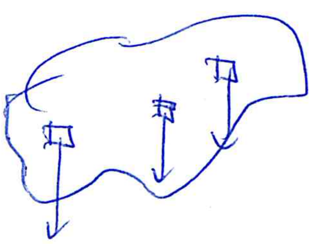
2) Az.-Reaz. devo calcolare la forza tra M e m sferico

3) ~~Sto~~ più dimostrato che gr. forza è equivalente a $F = \frac{G m M}{R^2}$ → ~~dove~~ R^2 distanza tra i centri

[Nota: d'altronde vale un criterio di reciprocità, in virtù del principio di azione e reazione]

Azione tra corpi non sferici

— Esempio; calcolo della ~~potenziale di un~~ forza peso di corpo rigido ~~nel campo~~ ~~sotto l'azione della forza peso~~



$$\vec{P} = \sum_i d\vec{P}_i$$
$$= \sum_i m_i \vec{g}$$
$$= M \vec{g}$$

Vero poichè ~~...~~ $\vec{g}$ è indip. da m e dalla posizione.

Qs. relazione è vera in prima approssimazione, ma sufficientemente buona per confrontare la caduta della mela e della luna —

Ricapitolando abbiamo:

1) Dedotto la natura della forza gravitazionale

$$\vec{F} = -\frac{G m_1 m_2}{r^2}\hat{u}_r$$

dalla terza legge di Keplero (*)

2) Abbiamo dimostrato che la legge vale anche per sistemi orbitanti con masse "confrontabili" pur di descrivere il sistema orbitante in termini di massa ridotta $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$

$$\vec{F}_\mu = -\frac{G \mu M}{r^2}\hat{u}_r \qquad M = m_1 + m_2$$

3) Abbiamo mostrato che corpi estesi e simmetria sferica sono (al loro esterno) equivalenti a pti materiali in relazione alla forza di gravitazione (conseguenza di $F \div 1/r^2$)

Per corpi non sferici sulla Terra, poiché $\vec{g} = -\frac{GM}{R_T^2}\hat{r}$ è sostanzialmente uniforme e diretto ~~per~~ sulla verticale, la forza di gravità (peso) è indip. dalla forma dell'oggetto

Applicazione 1 : Velocità di un sistema di punti orbitanti entro una distribuzione di massa omogenea sferica di raggio R_0

$R < R_0 \longrightarrow F(R) = \frac{GmM}{R_0^3} \cdot R$

Velocità di rotazione su orbita di raggio R

$m \frac{v^2}{R} = F_c$ 2ª legge NW

$m \frac{v^2}{R} = \frac{GmM}{R_0^3} \cdot R \Longrightarrow \boxed{v \div R}$

La velocità è proporzionale a R — In altri termini la velocità angolare è costante.
[Avremmo potuto ottenerlo in modo ~~naturale~~ ~~mm~~ diretto scrivendo $m\omega^2 R = \frac{GmM}{R_0^3} \cdot R$]

Dunque il sistema di punti si muove come se fosse un corpo rigido $\Rightarrow$ SISTEMA COROTANTE —
Questo è il moto delle stelle nel centro delle galassie. A diff. di un corpo rigido, esse non sono vincolate in posizioni relative fisse, ma sono COROTANTI PERCHE' ALL'INTERNO DI UNA DISTRIBUZIONE DI MASSE OMOGENEA

Applicazione 2 : Velocità di un sistema di punti orbitanti per $R > R_0$

In modo analogo:

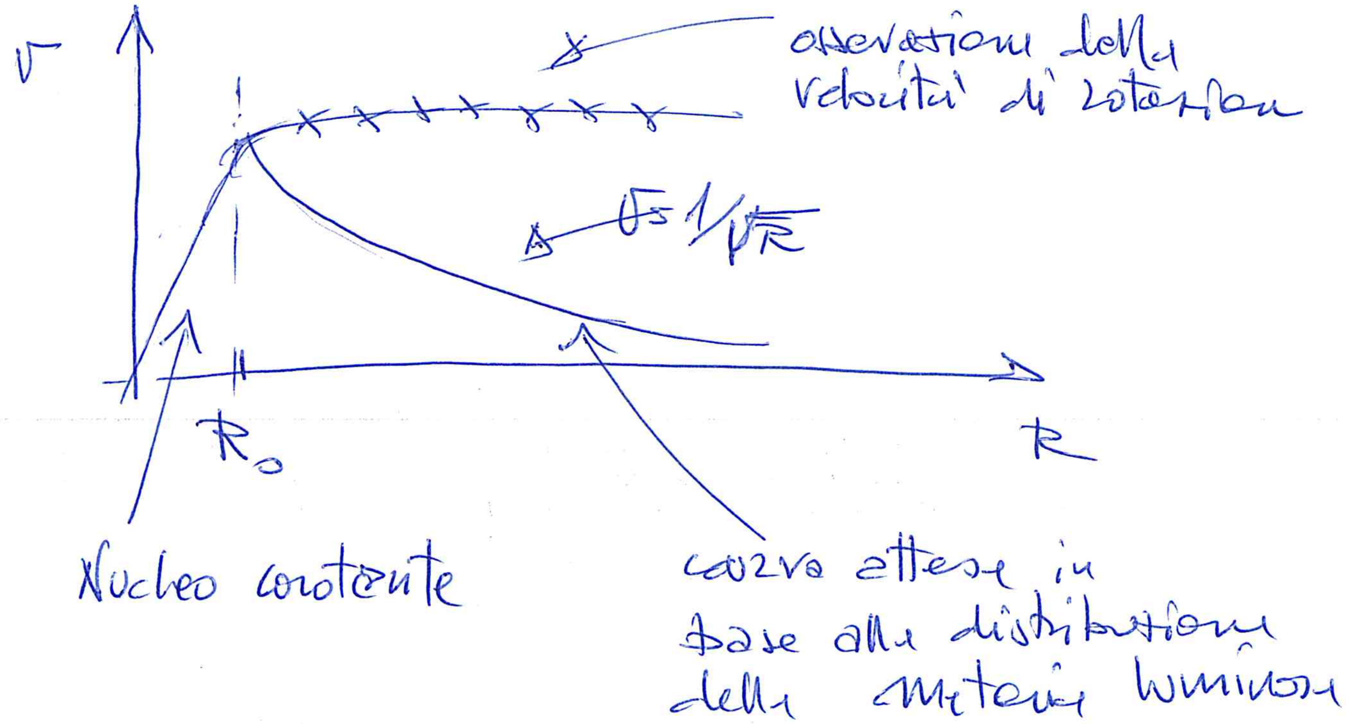
$$m \frac{v^2}{R} = \frac{G m M}{R^2} \Rightarrow v \div \frac{1}{\sqrt{R}}$$

La velocità di un sistema planetario diminuisce allontanandosi ~~dalla massa~~ dal sole. Questo risultato è equivalente alla 3ª legge di Keplero (nella forma per orbite circolari che abbiamo visto fino ad ora), ma espressa in termini di velocità.

× ~~Nelle~~ galassie a spirale sono caratterizzate da un disco piatto ~~e da un alone sferico~~ con un nucleo più luminoso, e da un alone sferico.
Si definisce raggio ottico R_0 la distanza dal centro del disco a cui la luminosità del disco diventa uguale a quella del fondo, cioè dove la materia luminosa non è più distinguibile.

× ~~In base alle osservazioni precedenti~~ ai risultati degli esempi ci si aspetta che per $R > R_0$ le velocità di rotazione degli oggetti celesti (rivelati in banda radio) attorno al nucleo diminuisca con la distanza

Risultati osservazionali, e attese sulla base della materia visibile (luminosa)



Si osserva che per $R > R_0$ $\underline{v \sim \text{costante}}$, contro le attese

Da cui si deduce:

$$m\frac{v^2}{R} = G\frac{m\,M(R)}{R^2}$$

$$v = \text{cost} \Longrightarrow M(R) \div R$$

La massa ~~cresce~~ entro un disco di raggio R cresce proporzionalmente a R (nella regione corotante la massa cresce con R^3) - Questa massa non è visibile $\Longrightarrow$ MATERIA OSCURA

Possibilità _

1) La legge di gravitazione richiede una modifica

2) La massa di oggetti non luminosi (pianeti o gas e polveri) è sottostimata

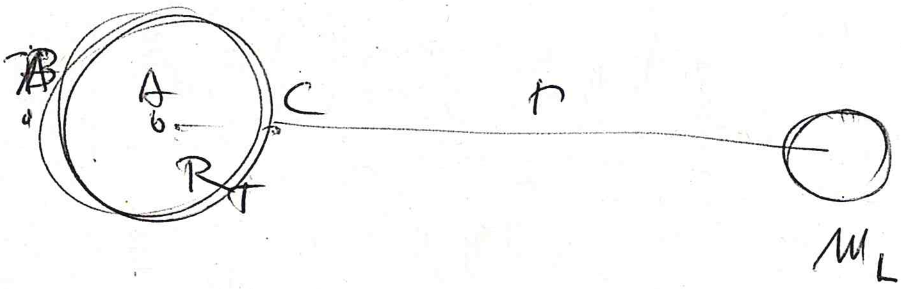
3) Esiste una forma di materia non nota

Vi sono altre indicazioni cosmologiche di materia oscura

Applicazione 4

FORZE DI MAREA. —

Particelle di massa in punti A, B, C: $m_A = m_B = m_C = m$



Luna è puntif. →

$$F_A = G\frac{m M_L}{r^2}$$

$$\left[(1 \pm a)^2 = 1 \pm 2a + a^2 \simeq 1 \pm 2a\right.$$

$$F_{B,C} = G\frac{m M_L}{(r \pm R_T)^2} \simeq G\frac{m M_L}{r^2}\left(1 \mp 2\frac{R_T}{r}\right)$$

— Δ di $F_{B,C} - F_A = G\frac{m M_L}{r^3}\, 2R_T \Big]$

La terra "cade" sulla luna come se tutta la massa fosse in A. Allora risp. alla luna F_{app} — La forza in A è $F_I + F_{APP} = F_A + F_A' = 0$, la forza in B e C è $(F_{B,C} + F_{APP})$ — con segni composti

⇒ Maree da due parti, dovute a forza centrifuga apparente

— Marea solare e lunare:

$$\cancel{G\frac{m M_s}{r_s^3}\, 2R_T}$$

$$\frac{M_L/r_L^3}{M_s/r_s^3} = \frac{\rho_L (R_L/r_L)^3}{\rho_s (R_s/r_s)^3} \simeq \frac{\rho_L}{\rho_s} \simeq 3$$