

Riprendi da lezione precedente.

$$\vec{F}(r) = -G \frac{M\mu}{r^2} \hat{u}_r$$

$$M = m_1 + m_2$$

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

$$\begin{cases} \vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2 \\ \vec{R} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2} \end{cases}$$

pos. relativa
c. de mano

$$\begin{cases} M \vec{R} = m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 \\ m_2 \vec{r} = m_2 \vec{r}_1 - m_2 \vec{r}_2 \end{cases}$$

$$(opp. \quad m_1 \vec{r} = m_1 \vec{r}_1 - m_1 \vec{r}_2)$$

$$\begin{cases} \vec{r}_1 = \vec{R} - \left(\frac{m_2}{M} \right) \vec{r} \\ \vec{r}_2 = \vec{R} + \frac{m_1}{M} \vec{r} \end{cases}$$

nota: Problema di due corpi ridotto
al problema di 1 pt. mlt in un campo di
forze centrali (eff. inestich)

Terra-Sole

$$M_S \gg m_T$$

$\vec{R}$ coincide
con pos. Sole

$$\vec{r}_1 \approx \vec{R}$$

$$\vec{r}_2 \approx \vec{R} + \vec{r}$$

$$m_1 = M_S$$

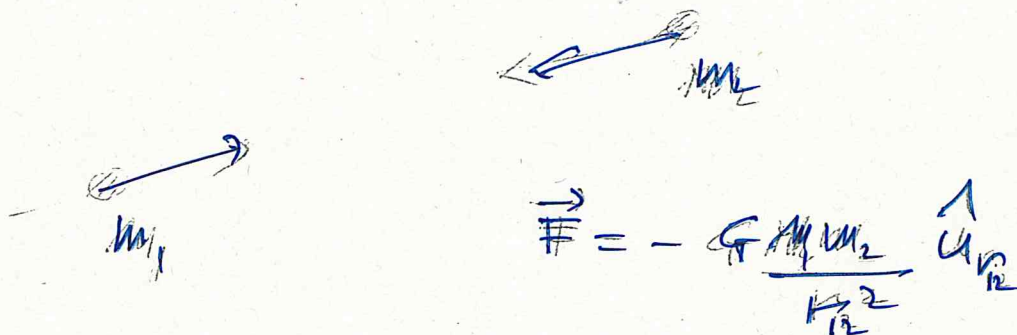
$$m_2 = m_T$$

descrizione di Keplero, conif. ellittico
o k.

GRAVITAZIONE 2.

sistemi di due corpi soggetti a mutua interazione gravitazionale:

③



Problema: ennesi risultati usando le variabili:

$$(a) \begin{cases} \vec{R} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2} & \text{CM} \\ \vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2 & \text{posizione relativa dei due corpi} \end{cases}$$

$$\vec{F} = -G \frac{\mu M}{r^2} \hat{u}_r \quad \begin{cases} \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \\ M = m_1 + m_2 \end{cases}$$

Forza ~~radiale~~ centrale, con centro della forza in CM, agente su massa ridotta μ — Risolvendo per μ e $\vec{r}$ si trova $\vec{F}_1$ e $\vec{F}_2$ invertendo (a)

- Nel limite $m_1 \gg m_2$

$$M \approx m_1$$

$$\mu \approx m_2$$

$$\vec{R} \approx \vec{r}_1$$

$\Rightarrow$ sistema "elocentrico"

Imp.
$$\begin{aligned} \vec{r}_1 &= \vec{R} + \frac{m_2}{M} \vec{r} \\ \vec{r}_2 &= \vec{R} - \frac{m_1}{M} \vec{r} \end{aligned}$$

Le forze centrali ha alcune proprietà generali (indip. dalla dipendenza specifica come $1/r^2$) : (2)

e) Il momento angolare è una costante del moto

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{F}$$

Scegliendo il polo nel centro della forza

$\vec{r}$ è parallelo a $\vec{F} = F(r)\hat{u}_r$, dunque

$$\vec{L} = 0 \quad \text{e} \quad \vec{L} = \text{cost}$$

1) $\Rightarrow$ Il moto è piano (costa place in un piano) perché $\vec{L} = \text{costante}$ in direzione fissa perp. a $\vec{L}$

$\Rightarrow$ La velocità angolare è costante

$\vec{L} = m \vec{r} \times \vec{v}$ si identifica con il momento angolare della particella.

Avremo dimostrato nel caso generale

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{1}{2} \vec{r} \times \vec{v} = \vec{r} \times m \vec{v} \frac{d\theta}{dt}$$

$$= m \omega r^2 \frac{d\theta}{dt}$$

$$\text{quindi } \frac{1}{2} r^2 \frac{d\theta}{dt} = \frac{dL}{2m} \quad \text{oppure } \frac{L}{2m} = \frac{1}{2} \omega r^2$$

(per moto piano)

La dimostrazione generale, per orbite non circolari, fa $\frac{dL}{dt} = \text{cost.}$ per $L = \text{cost}$

b) La FORZA GRAVITAZIONALE E' CONSERVATIVA: 3
 (proprietà generale delle forze centrali) le
 forze centrali

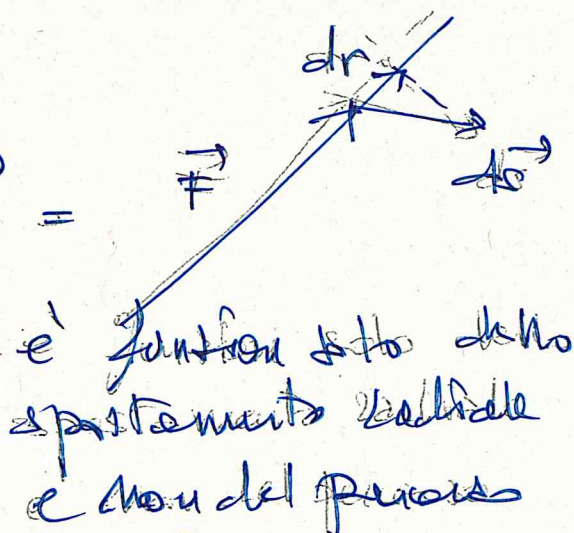
$$\vec{F} = F(r) \hat{u}_r$$

dipendenza di F ~~quadratica~~ ^{potenziale}
 radiale e direzione radiale

lavoro: $dW = \vec{F} \cdot d\vec{s} =$

$$= F(r) \hat{u}_r \cdot d\vec{s} =$$

$$= F(r) dr$$



e' funzione solo dello
 spostamento radiale
 e non del percorso
 (conservativa)

$$W_{AB} = \int_A^B \vec{F}(r) \cdot d\vec{s} = \int_A^B F(r) dr$$

Funzione del posto
 $= U(r_A) - U(r_B)$
 energia potenziale

Definiamo (abbiamo definito) energia potenziale

$$W_{AB} = - (E_p(B) - E_p(A))$$

Nota 1) Avevamo già dimostrato, con un calcolo esplicito che la forza pes è conservativa. Quel risultato è un caso particolare del risultato generale appena ottenuto.

Nota 2) Nel caso di distribuzione di massa, la forza gravitazionale totale è ottenuta dalla somma vettoriale delle singole forze:

$$\vec{F}_{\text{tot}} = \sum_i \vec{F}_i$$

dove $\vec{F}_i$ sono dovute (al limite) tutte a masse puntiformi. Il lavoro complessivo

$$\begin{aligned} dW &= \vec{F}_{\text{tot}} \cdot d\vec{s} = \sum_i \vec{F}_i \cdot d\vec{s} \\ &= \sum_i (\vec{F}_i \cdot d\vec{s}) = \sum_i dW_i \end{aligned}$$

Poiché ciascun termine della somma è conservativo, la forza complessiva (puntiforme) è conservativa per qualsiasi configurazione delle masse -

$$\begin{aligned} \text{Inoltre: } \vec{F} &= - \text{grad } E_p = - \left(\frac{\partial E_p}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial E_p}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial E_p}{\partial z} \vec{k} \right) \\ \vec{F} &= \sum_i \vec{F}_i = - \sum_i \text{grad } E_{p,i} = - \text{grad} \left(\sum_i E_{p,i} \right) \end{aligned}$$

Oltre al risultato generale, ci interessa il
~~risultato~~ calcolo esplicito dell'energia potenziale
 per una ^{coppia di} masse puntiformi -
 L'energia potenziale di un insieme di masse
 è ottenibile dalla somma (integrale) delle
 singole en. potenziali -

$$F_{12} = - G \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

[Ricorda:
 $\frac{dx^\alpha}{dx} = \alpha x^{\alpha-1}$]

$$W_{AB} = - \int_A^B G \frac{m_1 m_2}{r^2} dr = \left[G \frac{m_1 m_2}{r} \right]_A^B$$

$$= - G \frac{m_1 m_2}{r_A} + G \frac{m_1 m_2}{r_B} = - \Delta E_p$$

- L'energia potenziale è definita a meno
 di una costante arbitraria - ~~potenziale~~ E_p

$$E_p(r) = - G \frac{m_1 m_2}{r} + \text{cost} \quad \leftarrow \text{NON HA IMPATTO NEL CALCOLO DI } \Delta E_p$$

Conviene semplificare l'espressione scegliendo
 $\text{cost} = 0$ nel punto di riferimento $r = \infty$
 (dove il potenziale diventa nullo, dunque)

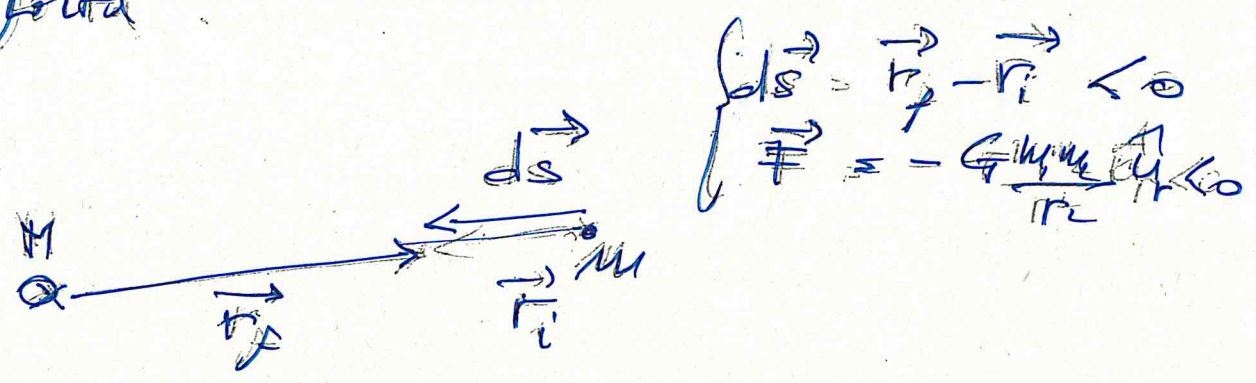
$$E_p(r) = - G \frac{m_1 m_2}{r}$$

Il segno negativo è conseguenza della natura attrattiva della forza gravitazionale (direzione verso il centro della Terra)

Immaginiamo di una massa m a distanza infinita da (M) - L'energia potenziale è $\rightarrow$ centro di forza

$$E_p(\infty) = -G \frac{M \cdot m}{r} \Big|_{r=\infty} = 0$$

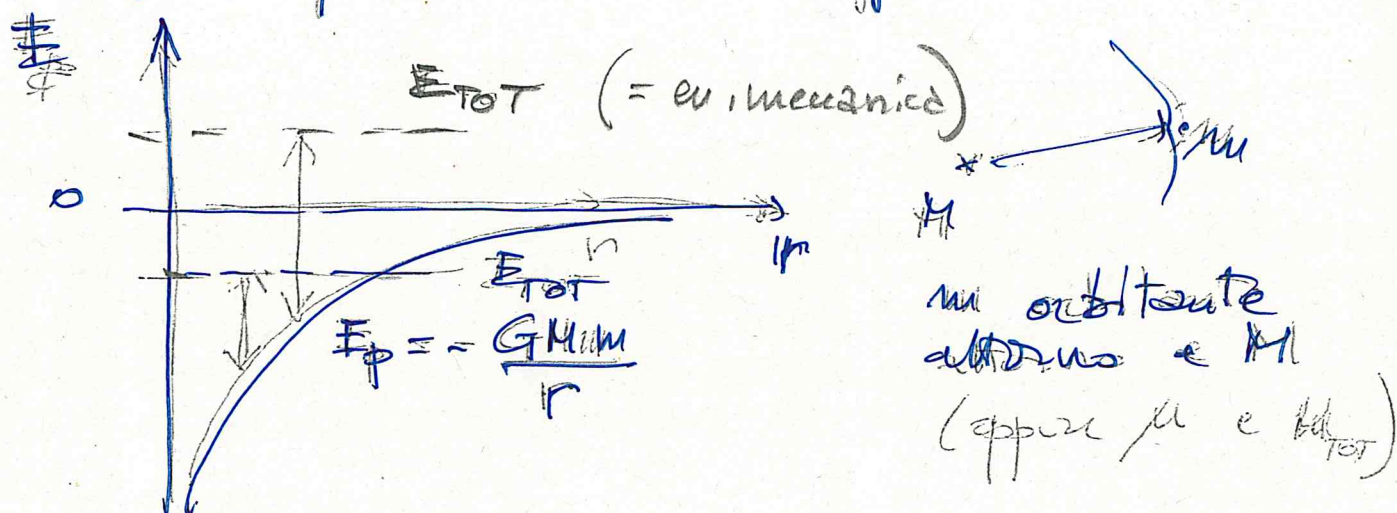
Sotto l'azione della forza (attrattiva) la massa si porta in un punto r - In q.s. tutto il lavoro della forza gravitazionale > 0 , perché lo spostamento è concordo alla direzione della forza.



Dunque ΔE_k (teoricamente) è positivo. Ma in un sist. conservativo l'energia meccanica $E_m = E_k + E_p$ è costante.

Quindi se E_k cresce, E_p diminuisce, coerentemente con il segno trovato $E_p(r) = -\frac{G M m}{r} < 0$

Grafici (qualitativi) dell'energia -



$$E_{TOT} = E_K + E_p \quad \text{ma con } E_p < 0$$

Se $|E_K| < |E_p| \Rightarrow E_{TOT} < 0$ (vero sempre)

la massa m è confinata in una traiettoria chiusa attorno a M ; altrimenti segue una traiettoria aperta (può muoversi senza limitazioni di tempo fino a $r \rightarrow \infty$)

Determinando l'energia cinetica (cioè la velocità) si può "seguire" la traiettoria

Vedremo nel dettaglio la natura delle traiettorie quando ci occuperemo il problema dinamico in modo completo, ma potremmo già ora, in riferimento a E_K e E_p vedere alcuni esempi significativi

Esempio 1

Si trovi la velocità in un punto di un'orbita a distanza r , se a $r = \infty$ $v = v_0$ -

→ Cons. dell'energia

$$\frac{1}{2} m v_0^2 = \frac{1}{2} m v^2 - G \frac{mM}{r}$$

$$v^2 = v_0^2 + 2 \frac{GM}{r} \quad \leftarrow \text{soluzione}$$

Esempio 2

Al raggio Ter.

Si trovi la velocità di fuga della Terra ($v = v_f$)

→ Trovare l'energia cinetica corrispondente ad un'energia meccanica $E_m \geq 0$

$$E_m = \frac{1}{2} m v_{fuga}^2 - \frac{GMm}{r_T} \geq 0$$

$$v_{fuga}^2 \geq \frac{2 GM}{r_T} \Rightarrow v_f \geq \left[\frac{2 GM}{r_T} \right]^{1/2}$$
$$v_f \geq [2 g r_T]^{1/2}$$

Esempio 3

Calcolo del raggio di un'orbita geostazionaria

$$T = 24 \text{ h}$$

[Usa la 3^a legge di Keplero] $m \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 r = G \frac{mM}{r^2}$

$$r = \left[\frac{GMT^2}{4\pi^2} \right]^{1/3} \rightarrow r \approx 42000 \text{ km}$$

Esempio 4.

Satellite in orbita circolare r e con periodo T
~~e massa m~~ Sia M_T la massa della Terra.
Calcolare la massa del satellite, m , e l'energia
meccanica associata alla traiettoria -

Soluzioni Per traiettoria circolare

$$\cancel{m} \omega^2 r = G \frac{\cancel{M} \cancel{m}}{r^2}$$

La massa
del satellite
non ha ruolo

Si può mantenere un satellite di massa
qualsunque in una determinata orbita
di raggio r , purché l'energia cinetica
sia opportunamente calibrata.

$$\frac{v^2}{r} = \frac{GM}{r^2} \rightarrow v = \left[\frac{GM}{r} \right]^{1/2}$$

Energia $E_K = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} G \frac{Mm}{r}$ Energia cinetica
si calcola al
raggio r

$$E_K = -\frac{1}{2} E_P$$

Energia meccanica:

$$E_m = E_K + E_P = \frac{1}{2} G \frac{Mm}{r} - G \frac{Mm}{r}$$
$$= -\frac{1}{2} G \frac{Mm}{r} < 0$$

Traiettoria chiusa $\rightarrow$ ~~orbita legata~~
sistema legato

Esercizio

ste — condition iniziale v_i e r_i
su orbita circolare

— muove per spostarsi a r_f su orbita
circolare

→ calcolare il lavoro esterno

su orbita circolare

$$E_k = -\frac{1}{2} E_p$$

$$E_m = E_k + E_p = \frac{1}{2} E_p$$

$$E_p = -\frac{GMm}{r}$$

$$E_k = \frac{1}{2} \frac{GMm}{r}$$

$$L_{ext} + L_{Fc} = \Delta E_k$$

$$L_{ext} = \Delta E_p = \Delta E_k$$

$$L_{ext} = \Delta E_p + \Delta E_k = \underline{\underline{\Delta E_m}}$$

Sostituiamo per E_m si ha la soluzione