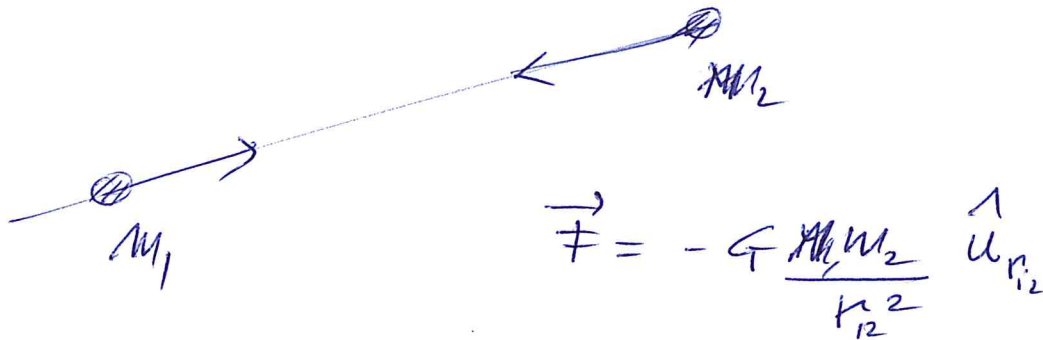


Sistema di due corpi soggetti a mutua interazione gravitazionale: (1)



Il moto può essere descritto usando le variabili:

$$\vec{R} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2}$$

$$\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$$

← distanza relativa tra i punti

$$\vec{F} = -G \frac{\mu M}{r^2} \hat{u}_r$$

$$\begin{cases} \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \\ M = m_1 + m_2 \end{cases}$$

Forza ~~radiale~~ centrale, con centro delle forze in CM, agente su massa ridotta μ -

- Nel limite $m_1 \gg m_2$

$$M = m_1$$

$$\mu = m_2$$

$$\vec{R} = \vec{r}_1$$

$\Rightarrow$ descrizione "eliocentrica"

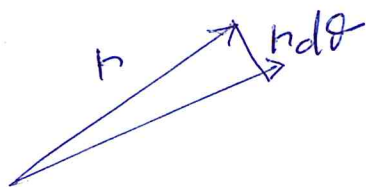
(2)

La forza centrale ha alcune proprietà generali
(indip. dalle dipendenze specifiche come $1/r^2$) :

a) Il momento angolare è una costante del moto : $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{F}$ -
Scegliendo il polo nel centro delle forze
 $\vec{r}$ è parallelo a $\vec{F} = F(r) \hat{u}_r$, dunque
 $\vec{L} = 0$ c.v.d.

$\Rightarrow$ Il moto è piano (orbita giace in un piano) perché $\vec{L}$ costante in modulo

$\Rightarrow$ Nel caso (semplice) di moto circolare troviamo una giustificazione della 2^a legge di Keplero :



$$\begin{aligned}\vec{L} &= \vec{r} \times m \vec{v} \\ &= \vec{r} \times m \omega r \hat{u}_\theta \\ &= m \omega r^2 \hat{u}_\phi \text{ cost}\end{aligned}$$

$$dA = \frac{1}{2} r^2 d\theta \quad \Rightarrow \quad \frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} \omega r^2 = \frac{1}{2} \frac{L}{m}$$

La dimostrazione generale, per orbite non circolari, la vedremo più avanti

La FORZA GRAVITAZIONALE E' CONSERVATIVA: (3)
 conseguenza del risultato generale ottenuto per le
 forze centrali.

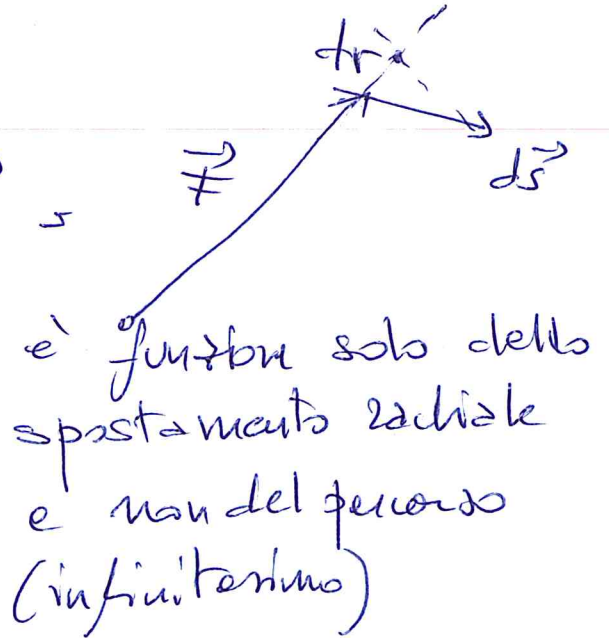
$$\vec{F} = F(r) \hat{u}_r$$

dipendenza di F puramente
 radiale e direzione radiale

Lavoro: $dW = \vec{F} \cdot d\vec{s} =$

$$= F(r) \hat{u}_r \cdot d\vec{s} =$$

$$= F(r) dr$$



$$W_{AB} = \int_A^B \vec{F}(r) \cdot d\vec{s} = \int_A^B F(r) dr = U(r_A) - U(r_B)$$

~~energia~~ potenziale

Definiamo (abbiamo definito) energia potenziale

$$W_{AB} = - (E_p(B) - E_p(A))$$

Nota 1) Avevamo già dimostrato, con un calcolo esplicito che la forza peso è conservativa. Quel risultato è un caso particolare del risultato appena ottenuto.

Nota 2) Nel caso di distribuzione di masse, la forza gravitazionale totale è ottenuta dalla somma vettoriale delle singole forze:

$$\vec{F}_{TOT} = \sum_i \vec{F}_i$$

dove $\vec{F}_i$ sono dovute (al limite) tutte a masse puntiformi. Il lavoro complessivo

$$\begin{aligned} dW = \vec{F}_{TOT} \cdot d\vec{s} &= \sum_i \vec{F}_i \cdot d\vec{s} \\ &= \sum_i (\vec{F}_i \cdot d\vec{s}) = \sum_i dW_i \end{aligned}$$

Poiché ciascuno termine della somma è conservativo, la forza gravitazionale è conservativa per ciascuna configurazione delle masse -

$$\text{Inoltre: } \vec{F} = -\text{grad } E_p = -\left(\frac{\partial E_p}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial E_p}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial E_p}{\partial z} \hat{k} \right)$$

$$\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i = -\sum_i \text{grad } E_p(i) = -\text{grad} \left(\sum_i E_p(i) \right)$$

oltre al risultato generale, ci interessa il ~~risultato~~ calcolo esplicito dell'energia potenziale per una ~~coppia di~~ ~~meno~~ ~~fonti~~ formiche -

L'energia potenziale di un insieme di masse è ottenibile dalla somma (integrali) delle singole en. potenziali -

$$\mathbb{F} = - G \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

(Ricorda:
 $\frac{dx^x}{dx} = x x^{x-1}$)

$$W_{AB} = - \int_{r_A}^{r_B} G \frac{m_1 m_2}{r^2} dr = \left[- G \frac{m_1 m_2}{r} \right]_{r_A}^{r_B}$$

$$= - G \frac{m_1 m_2}{r_B} + G \frac{m_1 m_2}{r_A} = - \Delta \mathbb{F}_p$$

- L'energia potenziale è definita a meno di una costante arbitraria - ~~potenziale~~ ~~$\mathbb{F}_p$~~

$$\mathbb{F}_p(r) = - G \frac{m_1 m_2}{r} + \text{cost} \quad \leftarrow \text{NON HA IMPATTO NEL CALCOLO DI } \Delta \mathbb{F}_p$$

Conviene semplificare l'espressione scegliendo $\text{cost} = 0$ nel punto di riferimento $r = \infty$ (dove il potenziale diventa nullo, dunque)

$$\mathbb{F}_p(r) = - G \frac{m_1 m_2}{r}$$

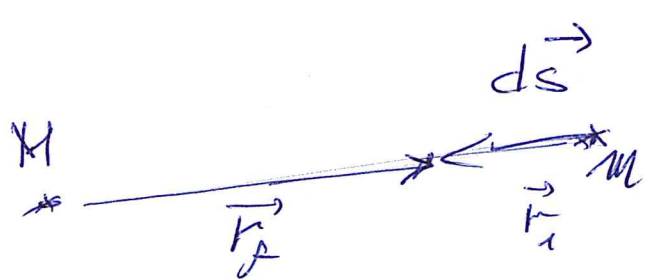
(6)

Il segno negativo è conseguenza del fatto che la forza gravitazionale è attrattiva -

Immaginiamo di una massa m a distanza infinita da M - l'energia potenziale è

$$\mathcal{E}_p(\infty) = -G \frac{Mm}{r} \Big|_{r \rightarrow \infty} = 0$$

Sotto l'azione delle forze (attrattive) le masse si porta in un punto r . In q.s. tutto il lavoro delle forze gravitazionali è > 0 , perché lo spostamento è concorde alla direzione della forza.

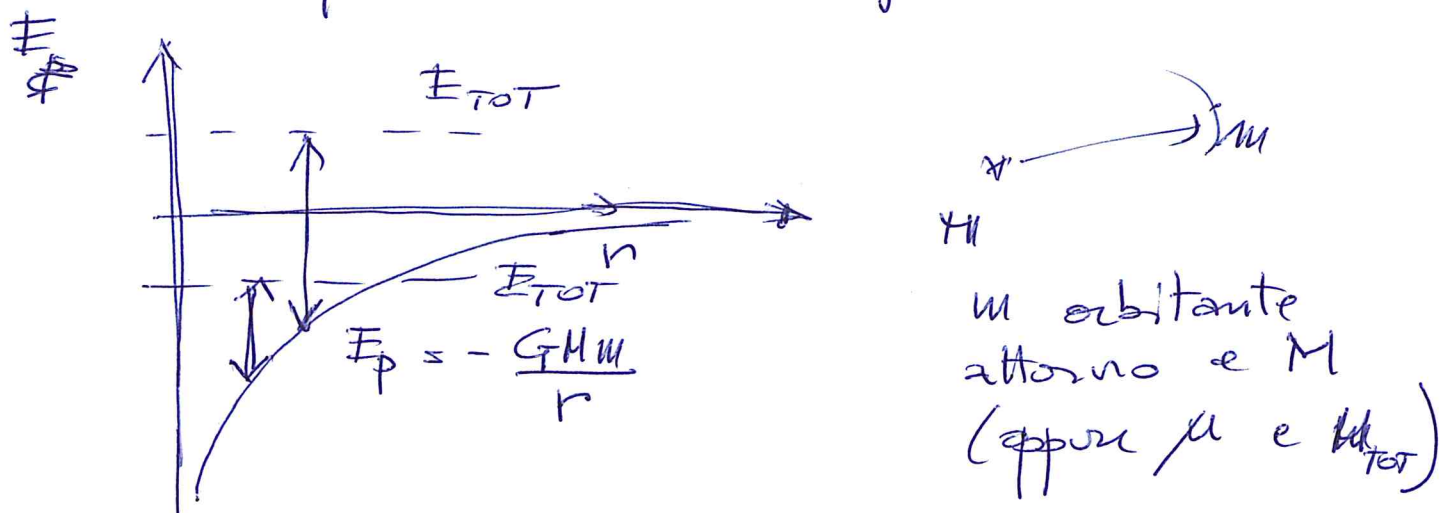
$$\begin{aligned} d\vec{s} &= \vec{r}_f - \vec{r}_i < 0 \\ \vec{F} &= -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \vec{e}_r < 0 \end{aligned}$$


Dunque $W = \Delta \mathcal{E}_k$ (teorema en. cinetica) è positivo. Ma in un sist. conservativo l'energia meccanica $\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_k + \mathcal{E}_p$ è costante

Dunque se $\mathcal{E}_k$ aumenta, $\mathcal{E}_p$ diminuisce coerentemente. Infine del segno trovato $\mathcal{E}_p(r) = -G \frac{Mm}{r} < 0$

(7)

Grafici (qualitativi) dell'energia -



$$E_{TOT} = E_K + E_P \quad \text{ma se } |E_K| < |E_P|$$

Se $|E_K| < |E_P|$ in valore assoluto ~~il sistema~~

la massa m è confinata in una traiettoria chiusa attorno a M ; altrimenti segue una traiettoria aperta (può muoversi senza immissione di lavoro fino a $r = \infty$)

Determinando l'energia cinetica (cioè la velocità) si può "scegliere" la traiettoria

Vedremo nel dettaglio la natura delle traiettorie quando risolveremo il problema dinamico in modo completo, ma possiamo già ora in riferimento a E_K e E_P vedere alcuni esempi significativi

Esempio 1

Si trovi la velocità in un punto di un'orbita a distanza r , se a $r \rightarrow \infty$ $v \rightarrow v_0$ -

→ Cons. dell'energia

$$\frac{1}{2} m v_0^2 = \frac{1}{2} m v^2 - G \frac{mM}{r}$$

$$v^2 = v_0^2 + 2 \frac{GM}{r} \quad \leftarrow \text{soluzione}$$

Esempio 2

Si trovi la velocità di fuga della terra ($r = r_T$)

→ Trovare l'energia cinetica corrispondente ad un'energia meccanica $E_m \geq 0$

$$E_m = \frac{1}{2} m v_{\text{fuga}}^2 - \frac{GMm}{r_T} \geq 0$$

$$v_{\text{fuga}}^2 \geq 2 \frac{GM}{r_T} \Rightarrow v_A \geq \left[2 \frac{GM}{r_T} \right]^{1/2}$$

Esempio 3

calcolo del raggio di un orbita geostazionaria

$$T = 24 \text{ h}$$

$$\left[\text{Usa la 3}^{\text{a}} \text{ legge di Keplero} \right] m \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 r = G \frac{mM}{r^2}$$

$$r = \left[\frac{GMT^2}{4\pi^2} \right]^{1/3} \rightarrow r \approx 42000 \text{ km}$$

Esempio 4

Satellite in orbita circolare r e con periodo T
~~e massa m~~ Sia M_T la massa della terra -
Calcolare la massa del satellite, m e l'energia
meccanica associata alla traiettoria -

Soluz. Per traiettoria definite:

$$\cancel{m} \omega^2 r = G \frac{\cancel{M} \cancel{m}}{r^2} \quad \leftarrow \text{La massa del satellite non ha* ruolo}$$

Si può mantenere un satellite di massa
qualsunque su una determinata orbita
di raggio r , purché l'energia cinetica
sia opportunamente calibrata:

$$\frac{v^2}{r} = \frac{GM}{r^2} \rightarrow v = \left[\frac{GM}{r} \right]^{1/2}$$

$$\text{Energia } E_K = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} G \frac{Mm}{r} \quad \text{En. cinetica in fondo dir}$$

Energia meccanica:

$$\begin{aligned} E_m &= E_K + E_p = \frac{1}{2} G \frac{Mm}{r} - G \frac{Mm}{r} \\ &= -\frac{1}{2} G \frac{Mm}{r} < 0 \end{aligned}$$

traiettoria chiusa $\rightarrow$ ~~orbita legata~~
sistema legato

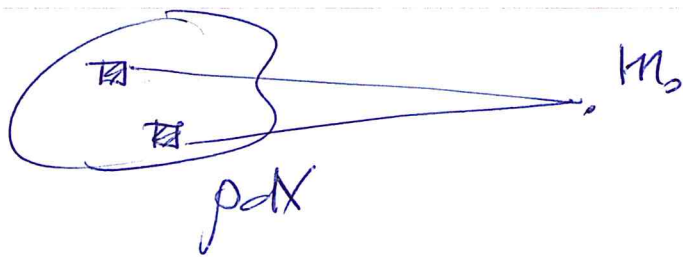
Forza di gravità tra corpi estesi

- Abbiamo visto che $\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i$

la forza agente su
me massa M_0

$$= -G \frac{M_0 m_1}{r_{10}^2} - G \frac{M_0 m_2}{r_{20}^2} - \dots$$

Per una distribuzione continua - $m_i = \rho dV$



$\rho = \text{densità}$

$\rho = \frac{M}{V}$ per un metro

omogeneo, ma

in generale può anche essere $\rho = \rho(r)$

$$\vec{F}_{M_0} = -G \int_V \frac{M_0 \rho dV}{r^2} \hat{u}_r$$

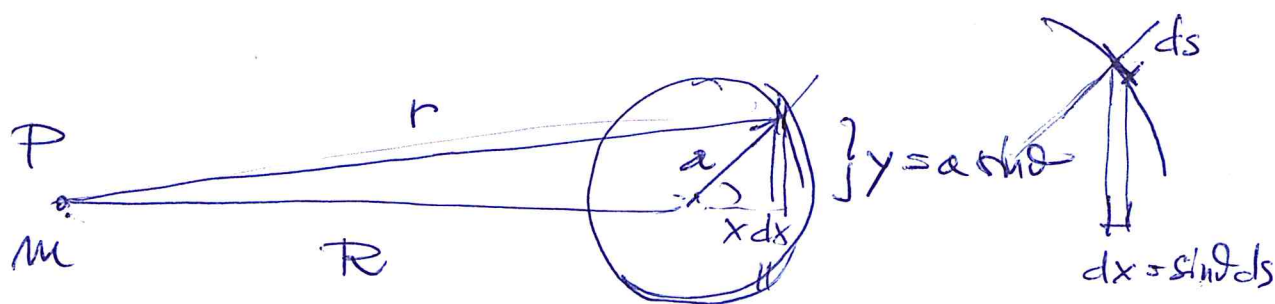
r è variabile
di integrazione

Se M_0 è altrettanto un corpo esteso, la F. gravitazionale tra i due corpi ~~si esprime come~~ calcolata dal doppio integrale di volume su l'uno e l'altro oggetti -

$$\vec{F} = \int_{M_{massa}} \vec{F}_{M_0} dM_0 = \int_V \vec{F}_{dm} \rho dV$$

L'espressione è semplice nel caso di corpi a simmetria sferica omogenei (buona approssimazione per i pianeti).

Ricordando che $\vec{F} = -\nabla E_p$, calcoliamo l'energia potenziale di un punto di massa m a distanza R dal centro di una guscio (SFERA CAVA) di raggio a (calcolo Halliday)



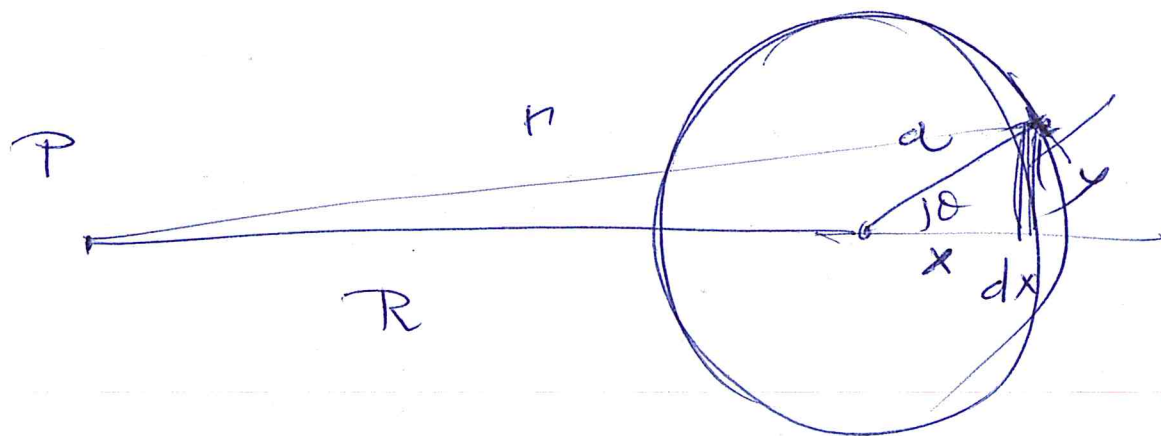
Sia $\mu = \frac{M}{4\pi a^2}$ densità superficiale di massa

E_p , per motivi di simmetria, è diretta lungo R - calcoliamo E_p iniziando dal calcolo di un anello di spessore $ds = dx / \sin \theta$ ~~lungo il guscio~~ e di raggio y lungo il guscio

MASSA ANELLO:

$$\begin{aligned} dM &= \mu \cdot 2\pi y ds = \\ &= \mu \cdot 2\pi (a \sin \theta) ds \\ &= \mu 2\pi a dx \end{aligned}$$

Guscio sferico cavo



$$dx = \sin \theta ds$$

$$y = a \sin \theta$$

$$\text{sia } \mu = M / 4\pi a^2$$

E_p = contributo di tutte le masse della calotta
Per motivi di simmetria da un anello $\rightarrow$ forza
diretta verso il centro (lungo R), Calcoliamo la
MASSA ANELLO!

$$dM = \mu \cdot 2\pi y ds = \mu 2\pi a \sin \theta ds \\ = 2\pi \mu a \underline{dx}$$

DISTANZA ANELLO!

$$r^2 = (R + x)^2 + y^2 = R^2 + 2Rx + a^2$$

$$d(r^2) = 2r dr = 2R dx \quad \Rightarrow \quad dx = \frac{r}{R} dr$$

DISTANZA DEI PUNTI DELL'ANELLO DA P :

$$r^2 = (R+x)^2 + y^2 = R^2 + 2Rx + \cancel{x^2} + a^2 - \cancel{y^2}$$

$$= R^2 + 2Rx + a^2$$

VARIAZIONE DISTANZA (DIFFERENZIALE)

$$d(r^2) = 2rdr = d(R^2 + 2Rx + a^2)$$

$$= 2Rdx$$

$$\Rightarrow \boxed{dx = \frac{rdr}{R}}$$

(R e a sono fissi, x cambia al cambiare di r)

En potenziale di un anello :

$$\Phi_p(r) = - \frac{Gm \, dM}{r} = - \frac{Gm \, 2\pi a \mu \, dx}{r}$$

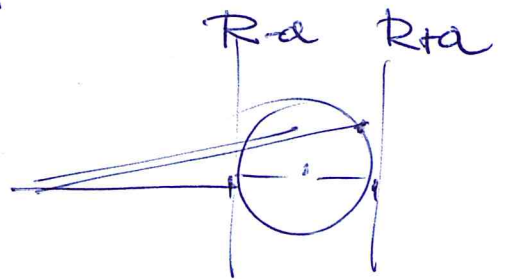
$$= - \frac{Gm \mu \, 2\pi a}{R} \, dr$$

En potenziale del guscio :

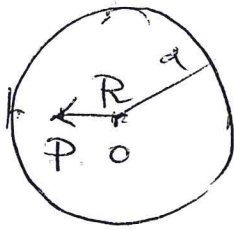
$$\Phi_p = - \frac{Gm \mu \, 2\pi a}{R} \int_{R-a}^{R+a} dr = - \frac{Gm \mu \, 4\pi a^2}{R}$$

$$= - \frac{GmM}{R}$$

En. potenziale equiv. a un punto di massa M nel centro del guscio



Caso di punto interno alla sfera:



$$\Phi_P = - \frac{G M \mu 2\pi a}{R} \int_{a-R}^{R+a} dr$$

$$= - G M \mu 4\pi a \quad = - \frac{G M M}{a}$$

$\Phi_P = \text{costante}$ indep. di R

quindi $\int \Phi(R) > 0$ per $R < a$

$$\int \Phi(R) = - \frac{G M M}{R^2} \quad R > a$$