GRAVITAZIONE

Si tratta di un caso particolare e notevole e importante, associato ad una forza fondamentale, di un sistema di punti materiali sottoposti a mutua interazione.

Il problema può essere semplificato e risolto in modo analitico nel caso di DUE corpi "isolati" ad esempio sole-pianeta e pianeta-satellite (problema dei due corpi). Sistemi più complessi (many-body) risolvibili in modo approssimato o con tecniche numeriche, a partire dalla legge della forza e dalla distribuzione delle masse.

Nell'esposizione affronteremo il problema $\vec{F} = m\vec{a}$ $\Rightarrow$ da due punti di vista: $\vec{F} \Longleftrightarrow m\vec{a}$

1) Derivazione della legge di forza a partire dai dati osservativi sul moto dei pianeti e dalle leggi della dinamica

2) Derivazione della legge del moto (nello specifico delle traiettorie per corpi orbitanti) a partire dalla legge di forza e dalle leggi della dinamica

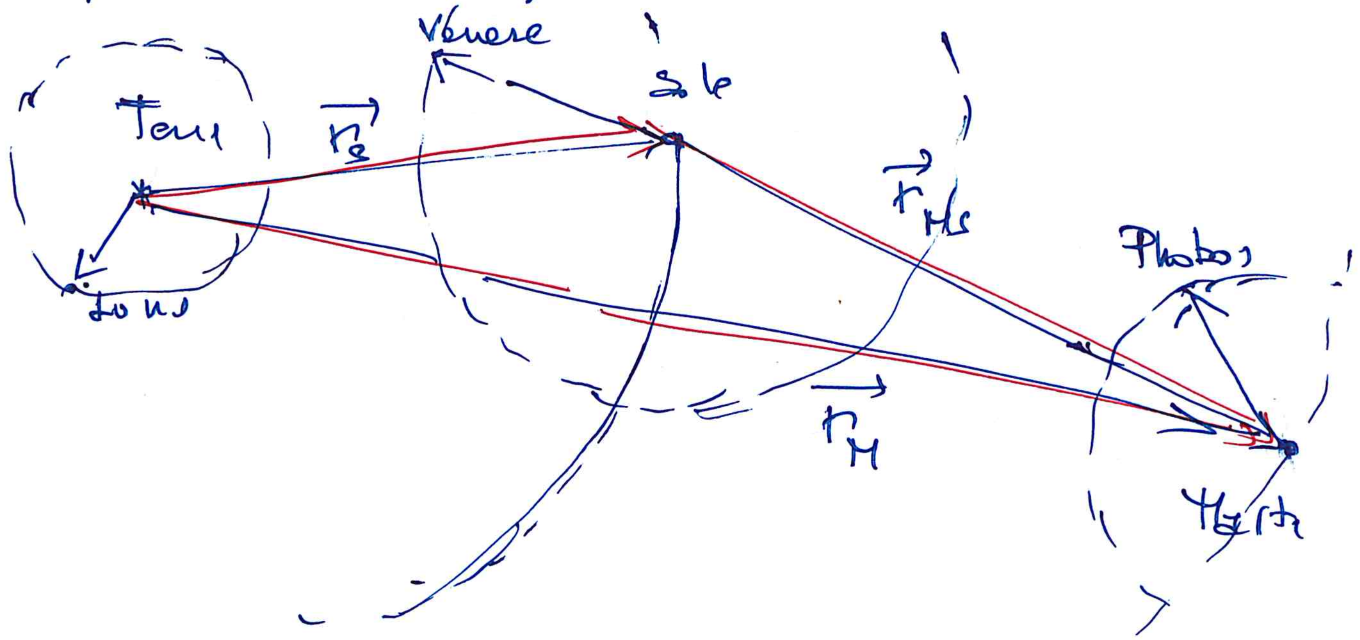
Utilizzeremo dunque, nel caso in studio, la legge della dinamica nei due modi che abbiamo prefigurato: 1) per esplicitare la legge della forza a partire dai moti (dall'accelerazione) 2) per dedurre ~~moti~~ (altri) moti dalla legge di forza generale

Percorso storico

× Antichità: Descrizione delle traiettorie dei corpi celesti nel riferimento Terrestre ("naturale")

× Epicicli (Tolomeo) = composizione di moti circolari

Interpretazione (cinetica) moderna (non in scala)



1) "moto" della ~~terra~~ sole nel rif ~~solare~~ terrestre

$$x_s(t) = r_s \cos(\omega t) = \mathrm{Re}[r_s e^{i\omega t}]$$
$$y_s(t) = r_s \sin(\omega t) = \mathrm{Im}[r_s e^{i\omega t}]$$

2) moto della ~~terra~~ terra nel rif. ~~terrestre~~ solare: cambio di sist. di rif. (sia O nel sole e O' nella terra)

$$\vec r_O = \vec r_{O'} + \vec{OO'}$$

Posizione della Terra-~~rispetto~~-sole $\vec r_O = \vec{OO'}$, $\vec r_{O'} = 0$

" del sole-re-terra $\vec r_{O'} = -\vec{OO'}$, $\vec r_O = 0$

dunque il moto della terra nel rif. solare è

$$\begin{cases} x_T(t) = -x_S(t) = r_S\cos(\omega t) \\ y_T(t) = -y_S(t) = -r_S\sin(\omega t) \end{cases}$$

È sempre un moto circolare, con $\theta \to -\theta$

Moti degli altri pianeti nel riferimento Terrestre – Es. Marte

$$\vec{r}_M = \underbrace{\vec{r}_S}_{\text{circolare attorno alla terra}} + \underbrace{\vec{r}_{MS}}_{\text{circolare attorno al sole}}$$

In coordinate polari

$$r_M(t) = r_S e^{i\omega_S t} + r_{MS} e^{i\omega_{MS} t}$$ con $x_M(t) = Re(r_M)$, $y_M(t) = Im(r_M)$

Es. Phobos (nel rif terrestre)

$$\vec{r}_{Ph} = \vec{r}_S + \vec{r}_{MS} + \vec{r}_{MPh}$$

$$\rightsquigarrow r_S e^{i\omega_S t} + r_{MS} e^{i\omega_{MS} t} + r_{MPh} e^{i\omega_{Ph} t}$$

$\rightsquigarrow$ "Descrizione Tolemaica sempre ok, ma il numero di parametri necessari è grande $\to$ non ci sono "semplificazioni"

- Nota: i moti dei corpi celesti attorno alla terra sono PERIODICI

In termini generali il moto di un pianeta tramite epicicli può essere rappresentato come la somma di funzioni sinusoidali di ampiezza e periodo differenti. ~~Questa~~

~~espressa~~ $$R(t) = r_1 e^{i\omega_1 t} + r_2 e^{i\omega_2 t} + \dots$$

dove la parte reale e immaginaria di $R(t)$ rappresentano le coordinate x e y.

Questa espressione matematica corrisponde alla rappresentazione di Fourier di una funzione periodica: ogni funzione periodica è rappresentabile come somma finita di funzioni sinusoidali elem.

elementari.

In quest'ottica, la rappresentazione dei moti di Tolomeo ~~è matematicamente co~~ (che non conosceva la ~~trasforma~~ rappresentazione di Fourier) è matematicamente corretta, ma di fatto richiede l'introduzione di un numero arbitrario di parametri per la descrizione dei moti e non consente di individuare ~~una~~ la regolarità del problema (chiave per l'interpretazione → RIDUZIONISMO

1500 COPERNICO: Ipotesi eliocentrica

→ sotto il profilo puramente cinematico dovrebbe

1600 BRAHE: Astronomia osservazionale di precisione e ricostruzione delle traiettorie dei pianeti secondo l'ipotesi eliocentrica

1602-1618 KEPLERO individua regolarità nelle osservazioni di Brahe che gli consentono di formulare tre leggi generali per il moto dei pianeti in un sistema eliocentrico

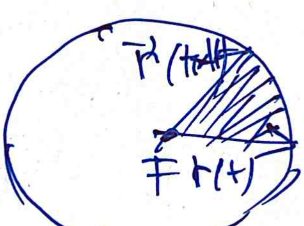
1° legge: I pianeti descrivono orbite ellittiche di cui il sole è uno dei fuochi
[⟹ il moto è piano]

Nota: orbite quasi circolari: $b/a = \begin{cases} 0.999 & \text{Terra} \\ 0.96 & \text{Plutone} \end{cases}$

2° legge I pianeti spazzano aree uguali in tempi uguali (velocità areale costante)

$\frac{dA}{dt} = cost$ è valida per tutti i pianeti, ma il valore della velocità cambia da pianeta a pianeta

Vedremo che questa legge implica/discende dalla conservazione del momento angolare nel moto



$$\frac{dA}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\left|\vec{r}(t) \times \vec{r}(t+dt)\right|\right)$$

3ª legge (1618) Il quadrato del periodo di rivoluzione è proporzionale al cubo della distanza media pianeta-sole. Nella formulazione precisa la distanza è espressa in termini di "semiasse" maggiore dell'ellisse

$$(3) \quad T^2 = K_S a^3$$ con K_S identica per tutti i pianeti

Nel 1610, scoperta dei pianeti Medicei (Galileo). Keplero osserva le stesse regolarità nel moto ~~rispetto~~ delle lune di Giove, nel riferimento di Giove. In particolare $T^2 = K_G a^3$

⟹ in un sistema a due corpi (*) sole-pianeta o pianeta-lune (quindi non solo in un sistema "eliocentrico") valgono le leggi di Keplero ⟶ INTERPRETAZIONE DINAMICA

⟹ Stesso tipo di "FORZA"

Secondo Keplero $F \rightarrow$ sostiene la velocità (visione pre-Newtoniana). La terza legge, indicando pianeti più "veloci" vicino al sole, suggerisce una forza maggiore vicino al sole. La formulazione corretta (in termini di accel) → Newton

(*) Nella descrizione di Keplero non si pensa a "due corpi" ma a 1 corpo in un riferimento fissato nell'altro corpo

1665 Newton $\vec{F} = m\vec{a}$ → la forza è associata all'accelerazione centripeta

Nell'approssimazione di moto circolare (adottata da Newton) l'accelerazione è centripeta vs il fuoco

$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\theta}{dt} = \text{cost}$

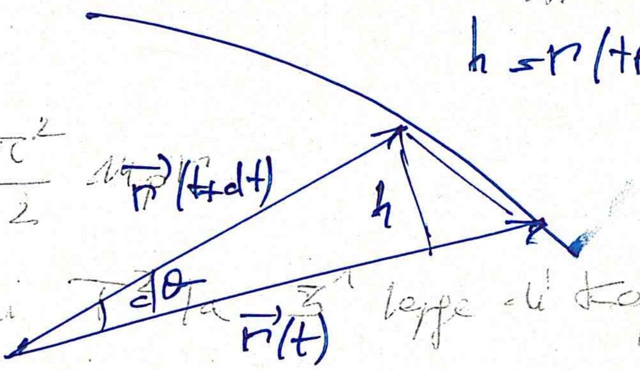
* Sappiamo che il moto è circolare con velocità areale costante $\omega = \frac{2\pi}{T}$

$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \omega$

(se vogliamo $\frac{\Delta A}{\Delta t} = \frac{\text{Area}}{T}$)

* Velocità areale

$h = r(t+dt) \sin(d\theta)$



$$A = \frac{1}{2} \vec{r}(t) \cdot r(t+dt) \sin(d\theta) \qquad (4)$$

Possiamo scrivere in forma vettoriale

$$A = \frac{1}{2} |\vec{r}(t) \times \vec{r}(t+dt)|$$

* per la velocità

$$\frac{dA}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta A}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{2} \left| \frac{\vec{r}(t) \times (\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t) + \vec{r}(t))}{\Delta t} \right|$$

Usando la proprietà distributiva e $\vec{r} \times \vec{r} = 0$

$$\frac{dA}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{2} \left| \vec{r}(t) \times \frac{\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} \right| = \frac{1}{2} \vec{r} \times \vec{v}$$

* Nel moto circolare $\vec{r}$ e $\vec{v}$ sono ortogonali e $v = \omega r$, dunque:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}\omega r^2 \overset{(*)}{=} \text{cost} \qquad \text{implica} \qquad \omega = \text{cost}$$

poiche $r = \text{cost}$ nel moto circolare.

(*) qst espressione è vera in generale (dim. sul retro)

* Dunque, nel limite di moto circolare

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \qquad \text{con } T = \text{periodo del moto}$$

e per l'accelerazione ~~[illegible]~~ centripeta sole-pianeta

$$F_{sp} = m_p \omega^2 r = m_p \left(\frac{4\pi^2}{T^2}\right) r$$

In base alla 3ª legge di Keplero: $T^2 = K_s r^3$

$$F_{s,p} = m_p \frac{4\pi^2}{K_s r^3} r = \frac{4\pi^2}{K_s} \frac{m_p}{r^2} \qquad (4)$$

~~Ka~~. <u>Legge di forza</u> per la forza gravitazionale: la forza dip. dalla massa (<u>inerziale</u>) del pianeta e dall'~~[illegible]~~ inverso del quadrato della distanza dal sole, tramite una costante comune $\frac{4\pi^2}{K_s}$

I pianeti non sono solo corpi orbitanti (soggetti "passivi" ~~all'effetto~~ dell'interazione con il sole), ma anche centri del moto orbitale di satelliti, per i quali valgono le stesse ~~rotazioni~~ leggi di Keplero.

Seguendo lo stesso percorso, possiamo scrivere per i satelliti di Giove:

$$F_{G,sat} = \frac{4\pi^2}{K_G}\,\frac{m_{sat}}{r^2}$$

Dunque si può assumere (per astrazione) che per una qualunque coppia di corpi valga una legge ~~generale con~~ di forza con la struttura della relazione trovata. In ~~Sfruttando il princi~~ particolare ~~per luce~~, ad esempio, per la coppia Sole-Giove possiamo scrivere

$$F_{S,G} = \frac{4\pi^2}{K_S}\,\frac{m_G}{r^2} \qquad (4.1)$$

$$F_{G,S} = \frac{4\pi^2}{K_G}\,\frac{m_S}{r^2} \qquad (4.2)$$

Dove la relaz. (4.1) discende direttamente dalla 3ª legge di Keplero, mentre la (4.2) consegue ~~dalla nostra~~ da un LA REGOLARITÀ DELLA processo di astrazione: NON ESISTE ~~DATA~~ LEGGE DI KEPLERO NEL RIF DI GIOVE, SE NON PER I SUOI SATELLITI

NOTA: Questo passaggio di derivazione non è espresso in modo chiaro sul Mazzoldi, dove si assume in modo esplicito che le relazioni valgono per il sole nel rif. di Galileo, rifacendosi alle leggi di Keplero

— o — o —

Per il principio di azione e reazione deve essere (in modulo)

$$F_{SP} = F_{PS} \Rightarrow k_P m_P = k_S m_S$$

Poiché la relazione deve valere per qualunque coppia sole - pianeta, $k_P m_P$ è una costante universale $\gamma = k_S m_S \longrightarrow 1/k_S = \frac{m_S}{\gamma}$

Posto nella forma $\frac{1}{\gamma} = G$, la legge di forza è

$$F = G \frac{m_S m_P}{r^2}$$

legge di gravitazione universale di Newton

G non dipende dalle masse e dalla geometria ma caratterizza l'intensità dell'interazione gravitazionale –

In termini dimensionali

$$[G] = [F] L^2 M^{-2}$$
$$= M L T^{-2} L^2 M^{-2} = L^3 T^{-2} M^{-1}$$

$$G = 6.67 \times 10^{-11} \, m^3 \, kg^{-1} \, s^{-2}$$

- La legge è verificata sperim. su ampia scala. Per ricavare G occorre conoscere il valore delle masse -

- Prima verifica ad opera di Newton

  - oggetti cadono sulla Terra $F = mg$

$$g = G\frac{m_T}{r_T^2}$$

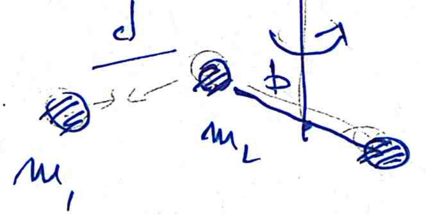
Tuttavia G e m_T non sono noti indip.: la misura di g misura $G m_T$ (r_T era noto con precisione dall'antichità)

  - Caduta della Luna sulla Terra:

$$m_L \omega_L^2 r_L = \frac{G m_T m_L}{r_L^2}$$ ← dalla misura di r_L e ω_L si ricava $G m_T$

- La misura separata di G e m_T (di fatto la "pesatura" della terra) ha richiesto un esperimento dedicato ad opera di Cavendish (1798) -

Bilancia di torsione per la misura di F tra due masse note -



condizione di equilibrio:

$\tau = F \cdot b$: τ = momento di richiamo prop. elastico del filo

$$\tau = G\frac{m_1 m_2}{d^2} \cdot b$$

calibrato, con

MASSA INERZIALE E GRAVITAZIONALE

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

Forza gravitazionale legata a propietà corpi $\longleftrightarrow$ massa Grav.

$$\vec{F} = m \vec{a}$$

Propietà cinematica

$\Rightarrow$ massa Inerziale

Nel ricavare la legge di gravitazione abbiamo implicitamente assunto che $m_{Grav} = m_{inerz.}$; nella relazione $F_{SP} = \frac{4\pi}{T_S} m_P / r^2$ m_P viene dall'acc. centripeta (inerziale)

- Per un corpo in caduta libera sulla Terra:

$$m_I g = G \frac{m_G m_{T,G}}{r^2} \quad \text{e cioè}$$

$$g = G \frac{m_{T,G}}{r^2} \left(\frac{m_G}{m_I} \right)$$

$\rightarrow$ massa inerziale e gravitazionale sono per lo meno proporzionali

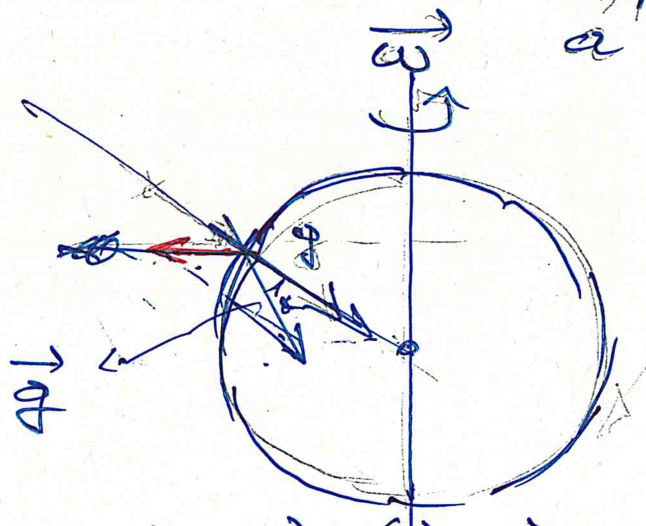
$\Longrightarrow$ Assunti identici e cost. di proporzionalità riassorbita in G

D'altronde se il rapporto m_G/m_I dipendesse dai corpi potrebbe essere possibile evidenziare le diff. tra i due concetti di massa per via sperim.

- Esp come filo a Pb $\rightarrow$ dipende da G e dall'acc. centripeta (I)

Dim. del FILO A PIOMBO (indica la verticale)

$$\vec{a}' = \vec{a} - \vec{a}_T - \vec{a}_C$$



$\underbrace{2\vec{\omega}\times\vec{v}'}$

Acc. di Coriolis è nulla, perché il filo a piombo è fisso nel sistema Terra

$$\vec{g}'(\theta) = \vec{g} + \underbrace{\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})}$$

- Accelerazione apparente (trascinam) determina una forza legata alla massa inerziale $\vec{F}_{app} = m_I \vec{a}$

La direzione del filo ~~dep~~ a piombo si discosta dalla verticale a seconda del rapporto m_I/m_G

$\longrightarrow$ non c'è evidenza di diff. m_I/m_G per diversi materiali

NOTA: L'esperimento và condotto in modo differenziale:

- Un materiale di riferimento definisce la verticale (la cui definizione ~~esatta~~ è la direzione di $\vec{g}'$ in m_G)
- Per altri materiali si verifica lo scostamento dalla verticale

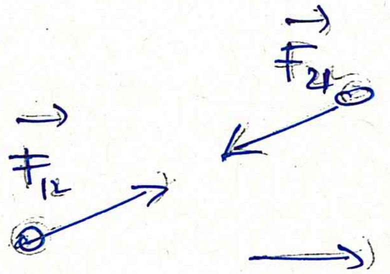
Espressione vettoriale

$$\vec{F} = -G\frac{M_S m_T}{r^2}\hat{u}_r$$

- È ~~forza~~ centrale $\longrightarrow$ giustificazione II^a legge Keplero

- Nel caso di ~~sole~~: ~~Forte~~ sole è il centro della forza, ma di fatto (e nel caso generale), abbiamo un sistema fatto di due corpi

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21} \longrightarrow$$ né sole, né terra (nessuno dei due corpi in generale) è un sistema di riferimento inerziale



~~Quindi risultato ottenuto~~ è vero in l'approx.

$\longrightarrow$ CM è fermo $\vec{F}^E = 0$

Ed è un riferimento inerziale (Buon rif.)

Sia $\vec{R}$ posizione del CM e $\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ posizione relativa

$\vec{R}$ def, $\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ di relativa

Si riscrivono per $\vec{F}_{12}$ ~~$\vec{R}$~~ e $\vec{F}_{21}$ $\longrightarrow$

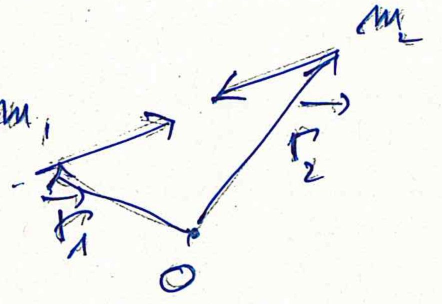
$$\mu \frac{d^2 r}{dt^2} = F_{12} \longrightarrow \text{massa ridotta}$$

$$= -G\frac{m_1 m_2}{r^2} \left(= \frac{G\mu M}{r^2} \right)$$

Interaz. corpo di massa ridotta μ e fissa a CM con massa totale M $\longrightarrow$

Possiamo descrivere il moto in riferimento al cdm

Siano $\vec{r}_1$ e $\vec{r}_2$ le posizioni di m_1 e m_2



$$\vec{R} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2}$$ CM → Fermo e inerziale

$$\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$$ posizione relativa

Eq del moto per $\vec{r}$

$$\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \frac{d^2}{dt^2}\left(\vec{r}_1 - \vec{r}_2\right) = \vec{a}_1 - \vec{a}_2$$

$$= \frac{\vec{F}_{12}}{m_1} - \frac{\vec{F}_{21}}{m_2} = \vec{F}\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)$$

$$\boxed{\mu \vec{a} = \vec{F}}$$ con $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \Rightarrow m_1 m_2 = \mu M$

$$F = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \hat{u}_{12}$$

$$\boxed{F = -G \frac{\mu M}{r^2} \hat{u}_{12}}$$ → FORZA CENTRALE PER μ ($M = m_1 + m_2$)

(Diretta LUNGO LA CONGIUNGENTE di 1,2 E QUINDI SEMPRE VERSO il CDM)

Moto relativo di un oggetto di massa ridotta

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$ nel campo di forza centrale di una massa totale M

I due corpi si muovono attorno al CDM sotto l'azione

Limite $m_1 >> m_2$ (sole pianeti)

$M = m_1$

$\mu = m_2$

$\vec{R} = \vec{r}_1$ CM coincide con la posizione del corpo (1)

$\vec{r}_2 = \vec{R} + \vec{r}$ pos. di 2 è relativa a CM

→ Coincide con la descrizione di Keplero

— o —

Orbita circolare per sistema $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$, M

$$\cancel{\mu}\,\omega^2 r = G\frac{M\cancel{\mu}}{r^2} \Rightarrow \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 = \frac{GM}{r^3}$$

$$T = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{r^3}{GM}\right]^{1/2}$$

$$M = m_1 + m_2 = m_1\left(1 + \frac{m_2}{m_2}\right)$$

$\simeq m_1(1 + 10^{-6})$ sole-pianeta

$\simeq m_1\left(1 + \frac{1}{80}\right)$ terra-luna

La misura del periodo della luna ha una correzione non trascurabile del rapporto della massa Luna/Terra ($\sim 1\%$)

→ Luna e Terra ruotano attorno a CdM che è poco sotto la crosta terrestre

Posizione del CdM : $\vec{R} = \dfrac{m_T \vec{r}_T + m_L \vec{r}_L}{m_T + m_L}$

Nel riferimento terrestre $\vec{r}_T = 0$

$$\vec{R} = \frac{m_L \vec{r}_L}{m_T + m_L} \simeq \frac{1}{80}\vec{r}_L \qquad |r_L| \simeq 50 R_T$$

$$\longrightarrow R = \frac{5}{8} R_T = \frac{5}{8} \cdot 6800\,\text{km}$$

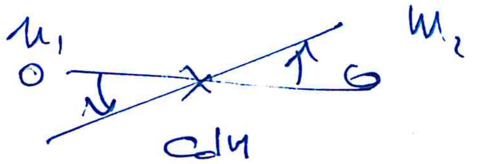
$$\simeq 4300\,\text{km} \longleftarrow (4700\,\text{km}$$

valore corretto)

× SISTEMA DI STELLE BINARIE

$m_1 = m_2$

Rotazione attorno a cdM corrispondente



$$T = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{r^3}{GM}\right]^{1/2} =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{r^3}{G m_1}\right]^{1/2} \cdot \left[\frac{m_1}{m_1 + m_2}\right]^{1/2}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{r^3}{G m_1}\right]^{1/2} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}}_{\text{correzione di periodo}}$$